UNIVERSITÉ TOULOUSE 1 CAPITOLE

Toulouse School of Economics

CONCOURS 2022

Rapport épreuve oral de mathématiques TSE

Adrien Blanchet, Laurent Bras, Gautier Dietrich & Jean-Luc Voléry

1 Bilan

La note minimale a été 6, la note maximale de 18. La moyenne est à 11.73 avec un écart-type de 3,33.

Le niveau des candidats est satisfaisant et en général équivalent à celui d'un étudiant de TSE de niveau moyen. Il est à noter une certaine hétérogénéité, avec des étudiants qui, de façon très surprenante à ce niveau du concours, n'ont pas du tout assimilé les notions au programme et quelques étudiants assez brillants qui maîtrisent bien l'ensemble du cours et qui font preuve de rigueur dans leur réflexion et dans leur rédaction.

Le jury a été globalement satisfait de l'attitude de présentation à l'oral des candidats. Ils sont en général à l'aise à l'oral et savent bien interagir en temps réel avec les jurés. De façon exceptionnelle, il est arrivé qu'un candidat essaye de faire passer une correction du jury pour un malentendu. Quand ce n'était clairement pas le cas cette attitude a desservi le candidat.

Pendant la première partie le candidat présente ses réflexions sur le problème. Comme pour l'écrit du concours, il est autorisé de se focaliser sur les questions que le candidat sait résoudre afin d'engranger le maximum de points. Pendant la suite de l'oral le jury revient sur certains points pour tester la compréhension du candidat. Il est toujours souhaitable de présenter des pistes pour les questions non traitées, qu'elles aient été non traitées par manque de temps ou parce que le raisonnement n'a pas abouti. Le jury donne ensuite des indications pour ces questions qui n'ont pas été traitées. Cela permet au jury de tester la vivacité de compréhension du candidat.

L'analyse planche par planche de la Section 3 décrit les principales remarques et commentaires sur les difficultés rencontrées par les candidats.

2 Perspectives

Suite aux retours de cette première année un certain nombre de points devraient évoluer pour l'épreuve de l'année prochaine. Nous listons ci-dessous plusieurs pistes que nous explorerons :

Longueur des planches Il avait été décidé cette année de proposer un problème (avec 30 minutes de préparation) et deux exercices afin de pouvoir couvrir les trois grands domaines des mathématiques enseignées en classes préparatoires : l'analyse, l'algèbre et les probabilités/statistiques. Les candidats avaient le choix de commencer par l'exercice de leur choix. Lorsque le problème était jugé assez facile, les exercices étaient plus difficiles et réciproquement afin d'harmoniser la difficulté des planches. L'hétérogénéité résiduelle était prise en compte dans la note qualitative. Il s'avère que la longueur des planches a parfois déstabilisé les candidats. L'année prochaine nous réduirons les planches à un problème et un exercice.

L'homogénéité de traitement des candidats Cette année, chaque candidat tirait sa planche au hasard dans une urne contenant 12 papiers numérotés de 1 à 12 avec remise. L'année prochaine deux candidats de suite auront la même planche afin de minimiser le risque de fuite et d'assurer qu'un jury puisse comparer plusieurs candidats sur une même planche.

Constitution des jurés Chaque juré était constitué d'un professeur de TSE et d'un professeur en classe préparatoire. Il était assuré le chevauchement d'une demi-journée dans la rotation des membres du jury afin de maximiser la transmission d'information entre les différents jurés. Cela a été une réussite. L'année prochaine, il y aura deux jurys qui travailleront en parallèle avec mixage des jurys à la mi-journée.

Gestion du tableau L'année prochaine, il sera demandé que la rédaction du problème tienne sur un seul tableau (grand tableau noir). Un autre tableau contiendra l'ensemble des réflexions sur l'exercice sans préparation.

Délibération Afin de permettre de bien se souvenir du candidat lors de la délibération, lors de l'oral chaque candidat sera pris en photo devant son tableau.

3 Analyse des oraux

Planche 1

Planche qui nous semble assez difficile.

Problème - généralement bien réussi par les bons candidats. Question 4 : peu de candidat pensent à vérifier que la concaténation des bases forment effectivement une base de $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. Question 5 : jamais abordée alors que c'est la définition même de l'image et du théorème du rang. Questions 6 & 7 plus compliquées n'ont pas été traitées. Il nous semble souhaitable d'avoir une vision géométrique de l'effet d'une application linéaire.

Exercice 1 - Questions 2 et 3 très peu traitées. Exercice assez long si on ne traite pas efficacement la Question 1

Exercice 2 - Exercice qui nous semble assez difficile. Question 1 : on a demandé à l'oral de déterminer p_1, p_2 et p_3, puis d'exprimer p_n en fonction de p_{n-1}.

Planche 2

Planche qui nous semble plutôt facile.

Problème - Question 1 qui nous semble très facile si le supplémentaire choisi en 1b est l'orthogonal de F. Aucun candidat n'a eu ce réflexe. Question 3 b n'a pas été abordée mais c'était une question pour différencier les meilleurs candidats.

Exercice 1 - Très mal réussi par les candidats qui semblent déstabilisés par le caractère abstrait des questions. la Question 4 qui nous semble plus difficile n'a jamais été abordée.

Exercice 2 - Exercice qui nous semble plus simple, il a été bien réussi par les candidats.

Planche 3

Planche qui nous semble assez difficile.

Problème - Les candidats n'ont pas beaucoup avancé dans le problème. Ils ne semblent pas à l'aise avec la notion d'espace vectoriel lorsque celui-ci est différent de $\mathbb{R}^n$. Question 2 n'a pas été traitée alors qu'elle n'est pas difficile. Question 3 était piégeante, elle testait la capacité des candidats à garder en tête les ordres de grandeur.

Exercice 1 - Question 1 qui ne nous semble pas difficile a été très mal traitée par les candidats qui se précipitent et ne font pas une analyse rigoureuse des problèmes possibles. Question 2 nécessite une dextérité dans la manipulation des développements limités que les candidats n'avaient pas. Le jury leur demandait quelques développements limités classiques (rarement connus) puis on leur donnait le résultat pour qu'ils puissent poursuivre. Question 5 : pas d'aisance à utiliser les développements limités pour répondre à cette question.

Exercice 2 - Plutôt bien traité avec les arbres. Difficultés de certains à comprendre ce qu'est un modèle probabiliste.

Planche 4

Planche qui nous semble facile mais longue.

Problème - Question 2 bien mieux réussie que la Question 1. Question 1 difficile quand on n'est pas habitué à manipuler les vecteurs dans des espaces vectoriels différents de $\mathbb{R}^n$. Personne n'a mentionné qu'il était possible de résoudre (1) directement avec les résultats du cours. Problème assez long.

Exercice 1 - Pas très bien réussi même lorsque l'on donne les développements limités

Exercice 2 - Exercice qui nous semble très facile, souvent bien réussi.

Planche 5

Planche qui n'a pas souvent été tirée au sort.

Problème - Problème assez détaillé mais un peu long.

Exercice 1 - Question qui nous semble assez facile mais qui nécessite un peu de rigueur.

Exercice 2 - Question qui nous semble assez facile mais pourtant peu traitée.

Planche 6

Problème - Problème qui nous semble sans grande difficulté, assez long mais avec des questions détaillées. Souvent bien réussi.

Exercice 1 - Difficultés pour manier les inégalités ou envisager les différents cas.

Exercice 2 - Certains candidats ne savent pas ce qu'est une indicatrice. Il est alors difficile d'avancer dans l'exercice.

Planche 7

Problème - Des difficultés pour répondre à la question 3 mais les candidats ont su l'utiliser pour avancer dans le problème.

Exercice 1 - Exercice qui nous semble facile. La question 3 nécessite beaucoup de calculs et n'a pas été traitée.

Exercice 2 - Exercice qui nous semble plus difficile qui n'a que peu été traité.

Planche 8

Problème - Problème peu difficile. Les candidats ont pu bien avancer.

Exercice 1 - Exercice qui nous semble facile mais qui n'a pas été immédiat pour la plupart des candidats.

Exercice 2 - Exercice qui nous semble facile aussi mais qui a posé problème à la plupart des candidats.

Planche 9

Problème - Problème qui nous semble peu difficile qui a généralement été bien réussi. Certains candidats n'ont pas su utiliser les indications "en utilisant la symétrie" de la question 3 et se lancent dans des calculs longs.

Exercice 1 - Question 1 bien traitée. Question 2 mal réussie parce que les candidats n'ont pas le réflexe (même parfois pas la connaissance) d'utiliser les formules de projection orthogonale. Question 3 n'a jamais été trivialisée alors que cela pourrait être un réflexe. En effet $(-1, 1, 1)$ appartient à F donc la distance est nulle, sans faire aucun calcul. Il est intéressant de prendre un peud e recul avant de se lancer tête baissée dans les calculs.

Exercice 2 - L'utilisation des développements limités pour répondre à cette question pose souvent problème. Même lorsque l'on donne le développement limité.

Planche 10

Problème - Les candidats n'ont pas forcément eu le réflexe d'utiliser la question 2a pour répondre à la 2b. Les questions 3 et 4 ont été bien traitées.

Exercice 1 - Question 1 : pas de maîtrise de la formule de projection. Question 2 : bien réussie. Question 3 : pas abordée.

Exercice 2 - Question très bien réussies avec beaucoup d'aisance et peu d'erreur dans les calculs.

Planche 11

Problème - Les candidats ont souvent eu des difficultées à avancer dans ce problème. Beaucoup ont eu besoin de l'aide du jury. Les calculs sont maîtrisés mais parfois fastidieux.

Exercice 1 - Exercice souvent très bien réussi par les candidats qui font peu d'erreurs de calcul et maîtrisent ce genre de techniques.

Exercice 2 - Exercice facile souvent bien réussi.

Planche 12

Planche qui nous semble assez difficile

Problème - Les questions 3 et 4 sont difficiles et mal traitées. Le jury indiquait la relation de récurrence pour permettre au candidat de progresser dans sa résolution.

Exercice 1 - Bien traité pas les candidats.

Exercice 2 - Exercice un peu long mais bien détaillé et pas très difficile. Question 1 : certains candidats utilisent les développements limités, d'autres la règle de l'Hôpital.

Annexe A : L'épreuve

Les consignes qui suivent ont été imprimées et distribuées aux candidats avant l'épreuve. Elles avaient été aussi envoyées à l'Association des Professeurs de Mathématiques en classes préparatoires B/L par le biais de son président quelques semaines avant la début des épreuves.

Déroulement de l'épreuve Le candidat a 30 minutes pour préparer un problème tiré au sort. Puis il a 15 minutes pour présenter le fruit de ses réflexions. Durant les 15 minutes suivantes, le candidat a été interrogé sur deux exercices, plus proches de ceux qui sont généralement résolus en cours. Les calculatrices et tous les autres documents sont interdits.

Contenu de l'épreuve Chaque planche comporte un problème et deux exercices tous indépendants qui portent sur l'ensemble du programme de B/L. Chaque planche interroge en Analyse, Probabilité/Statistique et Algèbre (par exemple, si le problème tiré au sort est en algèbre les deux autres exercices seront en Probabilité/Statistique pour l'un et Analyse pour l'autre). Chaque planche comporte des questions faciles pour mettre en confiance les candidats et des questions plus difficiles pour permettre aux meilleurs de se distinguer. Les planches ont été tirées au hasard. Chaque problème, chaque exercice a été donné à plusieurs candidats.

Interactions avec le jury Chaque jury est composé de deux mathématiciens : un membre de TSE et un professeur de classe préparatoire. Il se peut que le jury intervienne pour tester les réactions, le recul sur les notions, poser des questions sur les productions écrite et orales ou suggérer des pistes. Des indications peuvent être données par le jury dans le cas où le candidat n'arrive pas à résoudre une question seul. Dans certains cas, le jury n'hésite pas à poser des questions qui ne figurent pas dans la planche. Ne pas s'étonner que le jury puisse interrompre, questionner, demander de préciser un raisonnement ou un résultat, etc. Ceci ne doit pas être interprété comme une marque de désapprobation. L'attitude des membres du jury ne préjuge pas de la note donnée à l'épreuve.

Notation Les planches sont parfois longues et il n'est pas nécessaire de résoudre l'ensemble des questions pour avoir une excellente note. Les candidats sont évalués sur leur connaissance du cours, leur autonomie sur les questions de bases et les questions plus difficiles, la concision et la qualité de leur rédaction, leur réaction et leur capacité à corriger leurs erreurs lors de l'intervention du jury, ainsi que sur leur intuition, la rigueur de leur raisonnement, l'intelligence de l'approche (prise d'initiative, plus ou moins calculatoire, plus ou moins efficace, etc.). S'il n'y a pas parfaite homogénéité dans la difficulté des planches, le jury en tient compte dans son évaluation.

Annexe B : Notation

Les notations de chaque candidat étaient constituées de deux notes :

- une note quantitative sur 20, qui était la somme des points des questions résolues (barème indiqué sur les feuilles des jurés et en annexe), même éventuellement avec l'aide du jury.
- une note sur 20 plus qualitative, qui reflétait l'autonomie du candidat. Basé sur le référentiel suivant :
  - note 6 ou 7 : le cours n'est pas bien maîtrisé et plusieurs erreurs importantes sont commises.
  - note entre 8 et 12 : le cours est plutôt maîtrisé et/ou les candidats accumulent quelques erreurs, arrivent à traiter plusieurs questions de la planche, mais ne tirent pas vraiment profit des interactions avec le jury.
  - note entre 13 et 15 : le cours est globalement bien maîtrisé, les candidats ne commettent pas beaucoup d'erreurs et avancent plutôt bien dans les planches avec une aide conséquente du jury.
  - note > 16 : le cours est bien maîtrisé et les candidats avancent de manière autonome dans les planches et réagissent bien aux indications du jury.

Chaque note était donnée indépendamment par chaque membre du jury puis harmonisée pour arriver à un consensus sur l'ensemble des deux notes. Dans le cas où le consensus n'était pas possible, ce qui n'a jamais été le cas cette année, il était prévu que les deux membres du jury prolongent la discussion avec le président du jury après les oraux.

La note finale était le barycentre entre la note quantitative pondérée d'un coefficient 3 et la note qualitative pondérée d'un coefficient 1.

Annexe C : Élément de corrections

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 1 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème

On considére l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x-y+z \\ -2x+2z \\ -x-y+3z \end{pmatrix} \end{array}.$$

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Déterminer la représentation matricielle de f dans les bases canoniques.
4. Déterminer la représentation matricielle de f dans une base $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$.
5. Discuter suivant les valeurs des paramètres $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, le nombre de solutions de $f(x, y, z) = (a, b, c)$.

Correction du problème

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :
$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$
2. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\{(1, 2, 1)\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{(1, -2, -1), (-1, 0, -1)\}$.
3. Déja vu.
4. $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
5. On a $\mathrm{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y - z = 0 \ \}$, il y a deux possibilités :
   — $(a, b, c) \notin \mathrm{Im}(f)$, c'est-à-dire $a + b - c \neq 0$, dans ce cas le système est sans solution ;

- $(a, b, c) \in \mathrm{Im}(f)$, c'est-à-dire $a+b-c=0$, dans ce cas cas comme $\dim\mathrm{Ker}(f) = 1 > 0$, le système admet une droite affine solution.

Remarques pour le jury :

- On peut faire remarquer que f est la composée de la projection orthogonale $(x, y, z)_{\mathcal{B}} \longmapsto (0, y, z)_{\mathcal{B}}$ et de l'homothétie de rapport 2.
- On peut aussi faire remarquer que f est la composée de la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$ et de l'homothétie de rapport 2.

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 1 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on veut calculer la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 \ .$$

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $T_p = S_{2p}$.
   (a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
   $$T_p = \sum_{k=1}^{p} (T_k - T_{k-1}) \ .$$
   (b) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, calculer $T_p - T_{p-1}$.
   (c) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, en déduire la valeur de T_p, puis celle de S_n si n est pair.
2. Si n est impair, quelle formule a-t-on pour S_{n-1} ? En déduire une expression pour S_n.
3. Donner une expression générale de S_n ne dépendant pas de la parité de n.

Correction de l'exercice 1

1. (a) À $p \geq 1$ fixé , on a par télescopage
   $$T_p = T_p - T_{p-1} + T_{p-1} - T_{p-2} + T_{p-2} - \ldots + T_1 - T_0 = T_p - S_0 = T_p.$$
   (b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$T_p - T_{p-1} = S_{2p} - S_{2p-2} = (2p)^2 - (2p-1)^2 = 4p - 1.$$
   (c) On a évidemment $T_0 = S_0 = 0.$ et pour $p \geq 1$
   $$S_{2p} = T_p = \sum_{k=1}^{p} (4k-1) = 4(1 + 2 + \cdots + p) - p = p(2p+1).$$
2. Si n est impair, alors $n-1$ est pair et $S_{n-1} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. On a donc
   $$S_n = -n^2 + S_{n-1} = -\frac{n(n+1)}{2}.$$
3. $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une succession de n individus $\{A_1, \cdots, A_n\}$ se transmet une information binaire du type “oui” ou “non”. L’individu A_k transmet à A_{k+1} l’information qu’il a reçue avec une probabilité de $p \in [0,1]$ ou la transforme en son contraire avec une probabilité de $1-p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.

1. Calculer la probabilité p_n pour que l’information reçue par A_n soit identique à celle détenue au départ par A_1.
2. En supposant $0 < p < 1$, déterminer la limite de p_n quand n tend vers l’infini.

Correction de l’exercice 2

1. On peut supposer $p_1 = 1$. On a évidemment $p_2 = p$. Soit $n \geqslant 1$. On suppose connue la probabilité p_n. Alors, suivant que A_n transmette l’information émise par A_1 ou son contraire, on a par la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = p\, p_n + (1-p)(1-p_n).$$

Ainsi, la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ est définie par récurrence et de plus, on a :

$$\forall n \geqslant 1, \quad p_{n+1} = (2p-1)p_n + 1 - p,$$

c’est-à-dire que $(p_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmético-géométrique

$$\forall n \geqslant 1, \quad p_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p-1)\left(p_n - \frac{1}{2}\right),$$

et donc

$$\forall n \geqslant 1, \quad p_n = (2p-1)^{n-1}\left(p_1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{(2p-1)^{n-1}+1}{2}.$$

2. En supposant $0 < p < 1$, on a que $-1 < 2p-1 < 1$ et donc à la limite

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} p_n = \frac{1}{2}.$$

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 2 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème

Soit $E = \mathbb{R}^3$.

1. On considère le sous-ensemble :

$$F = \{(x, y, z) \in E \mid x - 2y + z = 0\}.$$

   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

   (b) Déterminer un supplémentaire K de F dans E.

   (c) Déterminer la matrice de la projection sur F de direction K dans la base canonique.

2. (a) On pose $G = \mathrm{vect}\{(1, 1, 1)\}$ et $H = \mathrm{vect}\{(1, 2, 3)\}$. Montrer que G et H sont supplémentaires dans F.

   (b) On pose $u = (x, y, z)$ un vecteur de F. Déterminer l'image de u par la projection sur G de direction H dans la base canonique.

3. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $f : x \mapsto \cos(x + \pi/4)$.

   (a) Montrer que f appartient à $\mathrm{vect}(\cos, \exp, \sin)$.

   (b) On pose $g = \cos + \exp + \sin$ et $h = \cos + 2\exp + 3\sin$. Montrer que f est combinaison linéaire de g et h.

Correction du problème

1. (a) $F = \mathrm{Ker}(f)$ où f est la forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = x - 2y + z$, donc $(F, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

   (b) $K = \mathrm{Vect}\{(1, -2, 1)\}$ par exemple.

   (c) La matrice canonique de projection sur F parallèlement à K est donnée par :

$$P = I_3 - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Les vecteurs $(1,1,1)$ et $(1,2,3)$ sont libres et tout élément de F s'écrit :

$$x.(1,0,-1)+y.(0,1,2)=(2x-y).(1,1,1)+(y-x).(1,2,3),$$

donc $G \oplus H = F$.

(b)

$$P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(2x-y)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\2&-1&0\\2&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

3. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x)=\cos(x+\pi/4)=\cos(x)\cos(\pi/4)-\sin(x)\sin(\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x).$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on déduit :

$$f(x)=\sqrt{2}\,g(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\,h(x).$$

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 2 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On veut montrer le lemme des cordes (Paul Lévy (1886-1971)) : *il existe* $c \in [0, 1 - 1/n]$ *tel que :*

$$f(c) = f\left(c + \frac{1}{n}\right) .$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction
$$g : x \mapsto f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right) .$$
2. Montrer que si c n'existe pas, alors g est de signe constant.
3. Montrer que si g est strictement positive, alors $f(0) > f(1)$. Conclure.
4. Application : un coureur parcourt 10 kilomètres en 30 minutes. Montrer qu'il y a un kilomètre qu'il parcourt en 3 minutes exactement.

Correction de l'exercice 1

1. $\mathcal{D}_g = [0, 1 - \frac{1}{n}]$.
2. La fonction g est continue sur son ensemble de définition, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, si g ne s'annule pas sur cet intervalle, c'est qu'elle garde un signe constant.
3. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}$, $f(x) > f(x + \frac{1}{n})$, alors en particulier pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $g\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right) > 0$ et donc en sommant tous ces termes, on aboutit à :
$$f(1) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) > 0,$$
ce qui contredit l'hypothèse faite sur f. Par le même argument, on montre que g n'est pas non plus strictement négative. Comme g est continue sur $[0, 1 - \frac{1}{n}]$, le TVI assure qu'il existe $c \in [0, 1 - 1/n]$ tel que $f(c) = f\left(c + \frac{1}{n}\right)$.

4. Soit $x : [0, 30] \to \mathbb{R}$ la fonction distance (supposée continue) et $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = x(30t)$. Définissons alors la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par $f(t) = h(t) - (h(1) - h(0))t$, qui est continue sur $[0, 1]$ et telle que $f(0) = f(1)$. Comme, pour $n = 10$, il existe $c \in [0, \frac{1}{10}]$ tel que $f(c) = f\left(c + \frac{1}{10}\right)$, il s'en suit qu'il existe $c \in [0, \frac{1}{10}]$ tel que

$$x(30c) + 1 = x(30c + 3).$$

Exercice 2

Pour se rendre à son bureau en vélo, Monsieur T. met, en l'absence de feu rouge, 10 minutes. Mais il y a sur son trajet 6 feux, la probabilité qu'il puisse passer à chacun des feux (indépendamment des autres) étant de 2/3. On admet que chaque arrêt à un feu fait perdre à Monsieur T. 2 minutes.

1. Soit D la variable aléatoire représentant la durée (en minutes) du parcours. Montrer que $D = aX + b$ où a et b sont des constantes à déterminer et X une variable aléatoire suivant une loi binomiale à préciser.
2. Calculer $\mathbb{P}(D = 16)$.
3. Monsieur T. part de chez lui 15 minutes avant l'heure d'une réunion à son bureau. Quelle est la probabilité qu'il arrive en retard ?

Correction de l'exercice 2

1. Soit la variable aléatoire X égale au nombre de feux où Monsieur T. s'arrête. X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(6, \frac{1}{3})$ et il est clair que $D = 2X + 10$.
2. On a : $\mathbb{P}(D = 16) = \mathbb{P}(X = 3) = \binom{6}{3}(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^3 \approx 0,2195$.
3. Monsieur T. est en retard si $D > 15$ soit ici $D \geq 16$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D \geq 16) &= \mathbb{P}(D = 16) + \mathbb{P}(D = 18) + \mathbb{P}(D = 20) + \mathbb{P}(D = 22)\\ &\approx 0,2195 + 0,0823 + 0,0165 + 0,0014\\ &\approx 0,32.\end{aligned}$$

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 3 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non-vide de dimension finie.

1. On veut déterminer l'ensemble H des endomorphismes f de E tels que : pour tout $x \in E$, la famille $\{x, f(x)\}$ est liée.
   (a) Montrer que H est non vide.
   (b) Soit f dans H. Montrer que :
   $$\forall x \in E, \exists \alpha_x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha_x x\ .$$
   (c) Soit f dans H. Soient x et y deux vecteurs non nuls de E.
      i. Montrer que si (x, y) est une famille liée, alors $\alpha_x = \alpha_y$.
      ii. Montrer que si (x, y) est une famille libre, alors $\alpha_{x+y} = \alpha_x = \alpha_y$.
      iii. En déduire que :
      $$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\ f(x) = \lambda x\ .$$
2. Déterminer l'ensemble des endomorphismes réels diagonalisables de E qui n'ont qu'une valeur propre.
3. La tour Eiffel mesure 300 m de hauteur. Elle est entièrement construite en fer, et pèse 8000 tonnes. Vous en achetez un modèle réduit de 1m de haut. Quel est son poids ?

Correction du problème

1. (a) H est non vide car il contient id_E l'endomorphisme identité de E.
   (b) Si $x = 0_E$, on a $f(0_E) = 1.0_E$ c'est-à-dire $\alpha_{0_E} = 1$ convient.
   Sinon, comme la famille $\{x, f(x)\}$ est liée, il existe $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tel que
   $$\alpha\, x + \beta\, f(x) = 0_E.$$
   Si $\beta = 0$, alors $\alpha\, x = 0$ ce qui nous conduit à $\alpha = 0$ contradiction.
   Donc $\beta \neq 0$ et on peut poser $\alpha_x = -\frac{\alpha}{\beta}$.

(c) i. Soient x et y deux vecteurs non nuls de E. Si la famille (x, y) est liée, alors il existe $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tel que $\alpha\, x + \beta\, y = 0_E$. Le cas $a = 0$ étant impossible (conduit à $a = b = 0$), nécessairement $a \neq 0$ et on a $x = -\frac{b}{a}\, y$. On a donc les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) = \alpha_x\, x &\iff -\frac{b}{a}\, f(y) = \alpha_x \left(-\frac{b}{a}\right) y \\ &\iff f(y) = \alpha_x\, y \end{aligned}$$

et comme par définition de y on a aussi $f(y) = \alpha_y\, y$, il vient que $\alpha_x = \alpha_y$.

ii. Supposons que la famille (x, y) est libre. On a par linéarité : $f(x+y) = f(x)+f(y)$ et donc

$$\begin{aligned} &\alpha_{x+y}\,(x+y) - \alpha_x\, x - \alpha_y\, y = 0_E \\ \iff &(\alpha_{x+y} - \alpha_x)\, x + (\alpha_{x+y} - \alpha_y)\, y = 0_E. \end{aligned}$$

Or (x, y) est libre, donc $\alpha_{x+y} = \alpha_x = \alpha_y$.

iii. Si $x \neq 0_E$, on a vu dans les questions précédentes que α_x ne dépend pas de x : il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \neq 0_E$, $f(x) = \lambda\, x$.
Si $x = 0_E$ on peut prendre le même λ.

2. Comme f est diagonalisable sur les réels, on a pour sa matrice canonique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = P\, D\, P^{-1}$. Comme de plus $D = \lambda\, I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, il vient $A = \lambda\, I_n$. Donc cet ensemble est celui des homothéties de rapport λ.

3. Même si la Tour Eiffel n'est pas cubique, on peut considérer que sa masse (en Kg) est donnée en fonction de sa hauteur (en m) par :

$$m(h) = \lambda\, h \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{1000 \times 8000}{(300)^3} \approx 0,29.$$

CONCOURS BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 3 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \frac{xe^x - \sin(x) - x^2}{\ln(1+x) - x}\ .$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Donner un développement limité d'ordre 2 en 0 de f.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On appelle g ce prolongement.
4. Montrer que g est dérivable en 0, et déterminer $g'(0)$.
5. Déterminer l'équation de la tangente T en 0 au graphe Γ de g, et préciser les positions relatives de Γ et T.

Correction de l'exercice 1

1. L'ensemble de définition de f est

$$\mathcal{D}_f = \{x \in]-1, +\infty[\,;\, \ln(1+x) - x \neq 0\}\,.$$

<u>Méthode 1</u> : La fonction $(x \longmapsto \ln(1+x))$ est concave sur $]-1,+\infty[$. Or, l'équation de la tangente en $(0,0)$ à sa courbe représentative est la suivante :

$$y = \ln(1+0) + \frac{1}{1+0}(x-0), \quad \text{soit} \quad y = x.$$

Comme son graphe est toujours en dessous de n'importe qu'elle tangente, on en déduit que :

$$\forall x > -1, \quad \ln(1+x) - x \leqslant 0,$$

avec égalité pour $x = 0$. D'où l'ensemble cherché est $\mathcal{D}_f =]-1,0[\cup]0,+\infty[$.
<u>Méthode 2</u> : On pose $g(x) = \ln(1+x) - x$. Ainsi définie, la fonction g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et

$$\forall x > -1, \quad g'(x) = -\frac{x}{1+x}.$$

On déduit du signe de g' que g est croissante sur $]-1,0]$ et décroissante sur $[0,+\infty[$. Le résultat s'en suit.

2. Donnons une le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction f. Pour tout $x > -1$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x(1+x+x^2/2+x^3/6+x^3\varepsilon_1(x)) - (x - x^3/6 + x^4\varepsilon_2(x)) - x^2}{(x - x^2/2 + x^3/3 + x^3\varepsilon_3(x)) - x}, \\
& \quad \text{avec} \quad \varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \varepsilon_3(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \\
&= \frac{x + x^2 + x^3/2 + x^4/6 + x^4\varepsilon_1(x) - x + x^3/6 - x^4\varepsilon_2(x) - x^2}{-x^2/2 + x^3/3 + x^3\varepsilon_3(x)} \\
&= \frac{x^3/2 + x^4/6 + x^4\varepsilon_1(x) + x^3/6 - x^4\varepsilon_2(x)}{-x^2/2 + x^3/3 + x^3\varepsilon_3(x)} \\
&= \frac{x/2 + x^2/6 + x^2\varepsilon_1(x) + x/6 - x^2\varepsilon_2(x)}{-1/2 + x/3 + x\varepsilon_3(x)} \\
&= \frac{-4x/3 - x^2/3 - 2x^2\varepsilon_1(x) + 2x^2\varepsilon_2(x)}{1 - 2x/3 - 2x\varepsilon_3(x)} \\
&= (-4x/3 - x^2/3 + x^2\varepsilon_4(x))(1 + 2x/3 + x\varepsilon_5(x)), \\
& \quad \text{avec} \quad \varepsilon_4(x), \varepsilon_5(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0, 0 \\
&= -4x/3 - 11x^2/9 + x^2\varepsilon_6(x), \quad \text{avec} \quad \varepsilon_6(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

3. De la question précédente on déduit que :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ \neq}} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} -\frac{4}{3}x = 0,$$

donc la fonction f se prolonge par continuité en 0, en posant :

$$\forall x > -1, \quad g(x) \;=\; \begin{cases} f(x) & x \neq 0; \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

4. Montrons que la fonction g définie dans 3. est dérivable en 0.
Pour tout $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, on a :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{4}{3},$$

donc g est dérivable en 0, de nombre dérivé $g'(0) = -4/3$.

5. L'équation de la tangente en $(0, 0)$ au graphe de g est la suivante :

$$y = -\frac{4}{3}x.$$

La position du graphe de g par rapport à cette tangente découle de la question 1. :

$$g(x) - \left(-\frac{4}{3}x\right) = -11x^2/9 + x^2\varepsilon_6(x), \quad \text{avec} \quad \varepsilon_6(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Donc au voisinage de 0, le graphe de g est en dessous de cette tangente.

Exercice 2

On considère trois boules numérotées de 1 à 3. On dispose une seule boule par boîte dans trois boîtes elles aussi numérotées de 1 à 3.

1. Donner un modèle probabiliste associé au problème.
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une coïncidence entre le numéro de la boule et le numéro de la boîte ?
3. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait auncune coïncidence ?

Correction de l'exercice 2

1. Si les boules sont numérotées $1, 2, 3$ et si l'ordre des boîtes est celui du produit cartésien, l'espace probabilisé est $\Omega = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)\}$ muni de la loi uniforme.
2. L'événement "il y a au moins une coïncidence entre le numéro de la boule et le numéro de la boîte" est la partie $A \subset \Omega$:

$$A = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (3,2,1)\}$$

et sa probabilité vaut

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{2}{3}.$$

3. La probabilité de l'événement contraire à A vaut

$$\mathbb{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 4 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème

On cherche à déterminer l'ensemble des suites qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n\,, \tag{1}$$

u_0 et u_1 étant donnés.

1. Première méthode : Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles. Soit

$$F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0\}.$$

   (a) Montrer que F, muni des lois de E, est un sous-espace vectoriel de E.

   (b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = u_n - 2u_{n-1}.$$

      i. Exprimer v_n en fonction de n, u_0 et u_1.

      ii. Montrer à l'aide de la question précédente qu'il existe deux suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F telles que :

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F, \quad \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha\, a_n + \beta\, b_n.$$

   (c) Montrer que la famille $\{a, b\}$ est libre. En déduire la dimension de F.

   (d) Exprimer, pour tout $n \geq 2$, u_n solution de (1) en fonction de u_0 et u_1.

2. Deuxième méthode :

   (a) Déterminer A tel que (1) s'écrive $X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = {}^t(u_{n+1}, u_n)$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

   (c) Déterminer la décomposition en produit $A = P\,D\,P^{-1}$ où D est une matrice diagonale et P est une matrice inversible.

   (d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (e) Exprimer, pour tout $n \geq 2$, u_n solution de (1) en fonction de u_0 et u_1.

Correction du problème

1. (a) — F est un sous-ensemble de E qui contient la suite nulle 0_E :

$$0 - 3 \times 0 + 2 \times 0 = 0.$$

— Soient (u_n) et (v_n) deux suites de F et λ un réel. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + \lambda v_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} w_{n+2} - 3\,w_{n+1} + 2\,w_n &= (u_{n+2} + \lambda v_{n+2}) - 3\,(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) + 2\,(u_n + \lambda v_n) \\ &= (u_{n+2} - 3\,u_{n+1} + 2\,u_n) + \lambda\,(v_{n+2} - 3\,v_{n+1} + 2\,v_n) \\ &= 0 + \lambda\,0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (w_n) appartient à F. Dès lors $F \neq \emptyset$ est stable par les lois de E, c'est donc un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$.

(b) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= u_{n+2} - 2\,u_{n+1} \\ &= u_{n+1} - 2\,u_n \\ &= v_{n+1}. \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est constante égale à $v_1 = u_1 - 2\,u_0$.
D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = u_1 - 2\,u_0$.

ii. D'après la question précédente

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2\,u_n + (u_1 - 2\,u_0).$$

Raisonnons par analyse-synthèse : s'il existe deux suites (a_n) et (b_n) de F et deux constantes α et β telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

$$P_n \ :\ u_n = \alpha\,a_n + \beta\,b_n$$

est vraie, il est nécessaire de les choisir de telle sorte que P_0 et P_1 soient vraies. Posons :

$$a_0 = 1,\ b_0 = 1,\ a_1 = 2,\ b_1 = 1.$$

Pour ce choix, on a en résolvant le système $\alpha = u_1 - u_0$ et $\beta = 2\,u_0 - u_1$. Cherchons à montrer que les propriétés P_n sont toutes vraies par le principe de récurrence double. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que P_n et P_{n+1} sont vraies. On a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3\,u_{n+1} - 2\,u_n \\ &= 3\,(\alpha\,a_{n+1} + \beta\,b_{n+1}) - 2\,(\alpha\,a_n + \beta\,b_n) \\ &= \alpha\,(3\,a_{n+1} - 2\,a_n) + \beta\,(3\,b_{n+1} - 2\,b_n) \\ &= \alpha\,a_{n+2} + \beta\,b_{n+2}. \end{aligned}$$

(c) S'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda\,a_n + \mu\,b_n = 0$, c'est en particulier vrai pour $n = 0$ et $n = 1$, ce qui nous amène à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + \mu &=& 0; \\ 2\,\lambda + \mu &=& 0. \end{array} \right. \iff \lambda = \mu = 0.$$

Ainsi, la famille $\{a, b\}$ est libre et génératrice d'après b), donc F est sev de E de dimension 2.

(d) En posant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 2^n \quad \text{et} \quad b_n = 1,$$

on a bien que (a_n) et (b_n) sont deux suites de F et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (u_1 - u_0)\, 2^n + 2\, u_0 - u_1.$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A\, X_n.$$

.

(b) Par une récurrence immédiate, on trouve : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n\, X_0$.

(c) Comme $A - I_2$ est de rang 1, on a une valeur propre qui est 1. Comme $A - 2\, I_2$ est également de rang 1, la seconde valeur propre est 2. La matrice A ayant donc deux valeurs propres simples, elle est donc diagonalisable dans les matrices 2×2 réelles et un calcul simple conduit à :

$$A = P\, D\, P^{-1}, \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} A^n &= P\, D^n\, P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 + 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} \\ -1 + 2^n & 2 - 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(e) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient grâce à la seconde ligne de la matrice A^n

$$u_n = (-1 + 2^n)\, u_1 + (2 - 2^n)\, u_0 = (u_1 - u_0)\, 2^n + (2\, u_0 - u_1).$$

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 4 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

$$f : x \mapsto x \exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) .$$

Déterminer la droite asymptote et la position de la courbe représentative de f par rapport à cette droite en $+\infty$ et $-\infty$.

Correction de l'exercice 1

On a le développement asymptotique suivant :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\ \exp\left(\frac{2}{x}\left(1+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right), \quad \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \to 0 \\
&= x\ \exp\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\
&= x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{x^2}\right)+\frac{1}{x^2}\varepsilon'\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad \varepsilon'\left(\frac{1}{x}\right) \to 0 \\
&= x+2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon'\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

Donc la droite affine d'équation $y = x+2$ est asymptote au graphe de f en $\pm\infty$, elle en dessous de ce dernier en $+\infty$ et au dessus en $-\infty$.

Exercice 2

On lance deux fois un dé équilibré à 6 faces et on considère les événements suivants :
— événement X : la somme des deux lancers vaut 6 ;
— événement Y : la somme des deux lancers vaut 7 ;
— événement Z : le premier lancer a donné 4.
Discuter de l'indépendance de ces trois événements.

Correction de l'exercice 2

$\Omega = \{(x, y)\ :\ x, y \in \{1, \dots, 6\}\}$ est un ensemble à 36 événements, tous équiprobables.

— On a pour l'événement $X = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$, $\mathbb{P}(X) = \frac{5}{36}$.

— On a pour l'événement $Y = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$, $\mathbb{P}(Y) = \frac{1}{6}$.

— On a pour l'événement $Z = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)\}$, $\mathbb{P}(Z) = \frac{1}{6}$.

Comme les événements X et Y sont disjoints $\mathbb{P}(X \cap Y) = 0$. On a donc $\mathbb{P}(X \cap Y) \neq \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y)$, donc X et Y ne sont pas indépendants.
Comme $X \cap Z = \{(4, 2)\}$, on a $\mathbb{P}(X \cap Z) = \frac{1}{36}$ et donc $\mathbb{P}(X \cap Z) \neq \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Z) = \frac{5}{36} \times \frac{1}{6}$, donc X et Z ne sont pas indépendants.
Comme $Y \cap Z = \{(4, 3)\}$, on a $\mathbb{P}(Y \cap Z) = \frac{1}{36}$ et on a bien $\mathbb{P}(Y \cap Z) = \mathbb{P}(Y)\mathbb{P}(Z) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$, donc Y et Z sont bien indépendants.

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 5 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 2.

Problème

Le but de cet exercice est de déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ en fonction du réel α.

1. On suppose $\alpha > 1$, montrer que la série $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ converge.
2. Supposons maintenant $\alpha \in]1/2, 1]$. On définit la fonction φ par

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \varphi(t) = \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \varphi(n) = \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad v_n = \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Démontrer que pour tout $x > 1$, on a

$$\int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}}\,\mathrm{d}y.$$

(b) En déduire que

$$\int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 2\left(-\frac{\cos(\pi\sqrt{x})}{\pi x^{\alpha-1/2}} - \frac{1}{\pi}\right) - \frac{2(2\alpha-1)}{\pi}\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\,\mathrm{d}y.$$

(c) Démontrer que $\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\,\mathrm{d}y$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$.

(d) Démontrer qu'il existe $K > 0$ telle que : $\forall t \geq 1$, $|\varphi'(t)| \leq \frac{K}{t^{\alpha+1/2}}$.

(e) En déduire que : $\forall (a,b) \in [1, +\infty[^2$, $a \leq b$, $|\varphi(a) - \varphi(b)| \leq \frac{K}{a^{\alpha+1/2}}|a-b|$.

(f) Exprimer la somme partielle $V_N = \sum_{n=1}^{N} v_n$ à l'aide de l'intégrale de φ. En déduire la nature de $\sum v_n$.

(g) Vérifier que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_n - v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} (\varphi(n) - \varphi(t))\mathrm{d}t$.

(h) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ on a $|u_n - v_n| \leq \dfrac{K}{n^{\alpha+1/2}}$. En déduire la nature de la série $\sum(u_n - v_n)$.

(i) Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

Correction du problème

1.
$$\left|\frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

Comme $\alpha > 1$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge et par comparaison la série de terme général $\left|\dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}\right|$ converge. La série $\sum \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ est donc absolument convergente et donc convergente.

2. (a) Posons $y = \psi(t) = \sqrt{t}$, ψ est $\mathcal{C}^1$ de $[1, x]$ sur $[1, \sqrt{x}]$ pour $x \geq 1$. On peut donc utiliser ce chagement de variable pour l'intégrale $y^2 = t$, $2y\mathrm{d}y = \mathrm{d}t$,

$$\int_1^x \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(\pi y)}{(y^2)^\alpha} 2y\,\mathrm{d}y = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}}\,\mathrm{d}y.$$

(b) Utilisons maintenant une intégration par parties avec $u'(y) = \sin(\pi y)$ et $v(y) = \frac{1}{y^{2\alpha-1}}$. Nous avons $u(y) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi y)$ et $v'(y) = -(2\alpha - 1)y^{-2\alpha}$. les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1, \sqrt{x}]$ pour $x \geq 1$. Nous obtenons

$$2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}}\,\mathrm{d}y = 2\left[-\frac{1}{\pi}\frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha-1}}\right]_1^{\sqrt{x}} - \frac{2(2\alpha-1)}{\pi}\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\,\mathrm{d}y$$

d'où

$$\int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 2\left(-\frac{1}{\pi}\frac{\cos(\pi\sqrt{x})}{x^{\alpha-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\pi}\right) - \frac{2(2\alpha-1)}{\pi}\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\,\mathrm{d}y.$$

(c)
$$\forall y \in [1, +\infty[, \quad \left|\frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\right| \leq \frac{1}{y^{2\alpha}}.$$

Comme $2\alpha > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^{2\alpha}}\,\mathrm{d}y$ converge et par comparaison $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\right|\,\mathrm{d}y$ converge. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\,\mathrm{d}y$ étant absolument convergente, elle est aussi convergente et

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\,\mathrm{d}y = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\,\mathrm{d}y < +\infty.$$

$\cos(\pi\sqrt{(x)})$ est borné, donc $2\left(-\frac{1}{\pi}\frac{\cos(\pi\sqrt{x})}{x^{\alpha-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\pi}\right)$ tend vers $-\frac{2}{\pi}$ quand x tend vers $+\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{\pi} - \frac{2(2\alpha-1)}{\pi}\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\,\mathrm{d}y < +\infty.$$

(d)

$$\forall t \geq 1, \quad |\varphi'(t)| = \left| \frac{\frac{\pi}{2}\cos(\pi\sqrt{t})\sqrt{t} - \alpha\sin(\pi\sqrt{t})}{t^{\alpha+1}} \right| = \left| \frac{\frac{\pi}{2}\cos(\pi\sqrt{t}) - \frac{\alpha\sin(\pi\sqrt{t})}{\sqrt{t}}}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}} \right|$$

$$\forall t \geq 1, \quad |\varphi'(t)| \leq \frac{1}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{\sqrt{t}}\right) \leq \frac{1}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{K}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

(e) La fonction φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, en appliquant le théorème des accroissements finis sur $[a, b]$, on obtient

$$\forall a, b \in [1, +\infty[, \quad a \leq b, \quad |\varphi(a) - \varphi(b)| \leq \sup_{t \in]a,b[} |\varphi'(t)|\, |a - b| \leq \frac{K}{a^{\alpha+\frac{1}{2}}}|a - b|$$

(f)

$$V_N = \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{N+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc

$$\lim_{N \to +\infty} V_N = \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

La série est donc convergente.

(g)

$$u_n - v_n = \varphi(n) - \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} (\varphi(n) - \varphi(t))\,\mathrm{d}t$$

(h)

$$|u_n - v_n| \leq \int_n^{n+1} |\varphi(n) - \varphi(t)|\,\mathrm{d}t \leq\leq \int_n^{n+1} \frac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}|n - t|\,\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} \frac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t = \frac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

La série $\sum(u_n - v_n)$ est donc absolument convergente puisque $\alpha > \frac{1}{2}$ et donc convergente.

(i) Nous avons vu que $\sum v_n$ converge et que $\sum(u_n - v_n)$ converge. Nous en déduisons donc que $\sum u_n = \sum \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ converge.

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 5 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$

Correction de l'exercice 1

Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On remarque que $A^2 = -I_2$ et que donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^{2p} = (-1)^p I_2$.
On déduit ensuite que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^{2p+1} = A^{2p}\ A = (-1)^p A$.
Finalement, on trouve :

$$A^n = \begin{cases} (-1)^{n/2} I_2 & \text{si} \quad \text{n est pair} \\ (-1)^{n/2} A & \text{si} \quad \text{n est impair} \end{cases}$$

Remarques pour le jury :

— On peut faire remarquer que A est la matrice canonique de la rotation de centre l'origine et de $\frac{\pi}{2}$ radians, donc que A^n est la matrice de rotation d'un angle de $\frac{n\pi}{2}$ radians, soit :

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos(\frac{n\pi}{2}) & -\sin(\frac{n\pi}{2}) \\ \sin(\frac{n\pi}{2}) & \cos(\frac{n\pi}{2}) \end{pmatrix}.$$

— On peut aussi faire remarquer que $\chi_A(X) = X^2 + 1$, donc que les valeurs propres de A sont complexes conjuguées et que la décomposition suivante

$$A = (-i)\frac{i}{2}(A - i\, I_2) + i(-\frac{i}{2})(A + i\, I_2)$$

fournit

$$A^n = (-i)^n \frac{i}{2}(A - i\, I_2) + i^n(-\frac{i}{2})(A + i\, I_2) = \left(i^{n+1}\frac{(-1)^n - 1}{2}\right) A + \left(i^n \frac{1 + (-1)^n}{2}\right) I_2.$$

Exercice 2

Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules rouges. On tire une boule dans l'urne, puis on remet la boule dans l'urne en ajoutant 2 boules de la même couleur.

Calculer la probabilité d'obtenir la première boule blanche au $n^{\text{ème}}$ tirage.

Correction de l'exercice 2

Notons A_n l'événement obtenir la première boule blanche au $n^{\text{ème}}$ tirage. On a facilement pour $n = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1) &= \frac{4}{10} \\
\mathbb{P}(A_2) &= \frac{6}{10} \times \frac{4}{12} \\
\mathbb{P}(A_3) &= \frac{6}{10} \times \frac{8}{12} \times \frac{4}{14}
\end{aligned}$$

L'événement A_n correspond au tirage d'une boule rouge aux $n-1$ premiers tirages et d'une boule blanche au $n^{\text{ème}}$ tirage, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{6 + 2(k-1)}{10 + 2(k-1)} \right) \times \frac{4}{10 + 2(n-1)} \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2+k}{4+k} \right) \times \frac{2}{4+n},
\end{aligned}$$

soit après télescopage :

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{24}{(2+n)(3+n)(4+n)}.$$

CONCOURS BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 6 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème

Le but de ce problème est de montrer le Lemme de condensation de Cauchy : *Soit (u_n) une suite réelle positive et décroissante. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.*

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle positive et décroissante. Notons :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \ .$$

1. Pour tout k dans $\mathbb{N}$, posons $v_k = 2^k u_{2^k}$. Montrer que $\dfrac{1}{2}v_3 \leq S_8 - S_4 \leq 4u_4$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$\frac{1}{2}v_{k+1} \leq S_{2^{k+1}} - S_{2^k} \leq v_k.$$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} v_{k+1} \leq \sum_{k=0}^{n}(S_{2^{k+1}} - S_{2^k}) \leq \sum_{k=0}^{n} v_k.$$
4. Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge et réciproquement.
5. Application : on considère la série de Riemann :
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$$
(on ne suppose pas connu ici la nature de cette série de cours). Pour $\alpha \geq 0$ vérifier les hypothèses du critère de condensation et montrer que la série de Riemann converge si et seulement si la série :
$$\sum_{n\geq 0} (2^{1-\alpha})^n.$$
est convergente. En déduire la nature de la série de Riemann selon la valeur de α.
6. Étudier de même la nature de la série dite de Bertrand :
$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln^\alpha n}.$$

Correction du problème

1. $$S_8 - S_4 = u_8 + u_7 + u_6 + u_5$$
   Comme la suite (u_n) est décroissante nous avons :
   $$\frac{1}{2}v_3 = \frac{1}{2}2^3 u_{2^3} = 4u_8 \leq u_8 + u_7 + u_6 + u_5 \leq 4u_4$$
2. $$S_{2^{n+1}} - S_{2^n} = \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} u_k = u_{(2^n+1)} + \cdots + u_{(2^{n+1})}.$$
   La suite (u_n) est décroissante et la somme comporte $2^{n+1} - 2^n = 2^n$ termes. D'où
   $$\frac{1}{2}v_{n+1} = \frac{1}{2}2^{n+1}u_{(2^{n+1})} = 2^n u_{(2^{n+1})} \leq S_{2^{n+1}} - S_{2^n} \leq 2^n u_{(2^n)}.$$
3. Si on somme de 0 à n, les inégalités de la question 1), on obtient
   $$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} v_{k+1} \leq \sum_{k=0}^{n}(S_{2^{k+1}} - S_{2^k}) \leq \sum_{k=0}^{n} 2^k u_{2^k}.$$
4. Nous avons donc avec l'encadrement de la question 2),
   $$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} v_{k+1} \leq S_{2^{n+1}} - S_0 \leq \sum_{k=0}^{n} v_k.$$
   Les termes des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont positifs. Les sommes partielles de ces deux séries sont donc croissantes et il suffit de montrer qu'elles sont majorées pour montrer la convergence. D'où si $\sum u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2^{n+1}} - S_0 = S - S_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $S_{2^{n+1}} - S_0 \leq S - S_0$. Nous avons donc
   $$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} v_{k+1} \leq S_{2^{n+1}} - S_0 \leq S - S_0.$$
   La somme $\sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ est donc majorée par $2(S - S_0) + v_0$ et la série est donc convergente.

   De même si $\sum v_n$ converge, alors $\sum\limits_{k=0}^{n} v_k \leq \sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k = S'$. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leq 2^{n+1}$ (par récurrence évidente),
   $$\sum_{0}^{n} u_k = S_n \leq S_{2^{n+1}} \leq S_0 + \sum_{k=0}^{n} v_k \leq S_0 + S'.$$
   La somme $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est donc majorée par $S_0 + S'$ et la série est donc convergente.
5. Ici nous avons $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, suite clairement réelle positive et décroissante pour $\alpha > 0$. Nous pouvons donc conclure que la série $\sum u_n$ est de même nature que la série $\sum v_n$ avec $v_n = \dfrac{2^n}{(2^n)^\alpha} = (2^{1-\alpha})^n$.

   Pour la série $\sum v_n$, il s'agit d'une série géométrique de raison $2^{1-\alpha}$, elle est donc convergente si et seulement si la raison est strictement inférieure à 1, c'est-à-dire si $\alpha > 1$.

6. Ici nous avons $u_n = \dfrac{1}{n \ln^\alpha n}$, suite clairement réelle positive et décroissante pour $\alpha > 0$. Nous pouvons donc conclure que la série $\sum u_n$ est de même nature que la série $\sum v_n$ avec $v_n = \dfrac{2^n}{2^n (\ln 2^n)^\alpha} = \dfrac{1}{(\ln 2)^\alpha n^\alpha}$.

   Pour la série $\sum v_n = \frac{1}{(\ln 2)^\alpha} \sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ et nous savons avec la question précédente qu'elle converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 6 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

Soient F et G deux sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^3$ tels que $\dim F = \dim G = 2$ et $F \neq G$.

1. Déterminer la dimension de $F+G$.
2. Déterminer la dimension de $F \cap G$.

Correction de l'exercice 1

1. Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de $F+G$, on sait que $\dim(F+G)$ vaut 2 ou 3. Si $\dim(F+G)=2$, les inclusions précédentes sont des égalités $F = F+G = G$, ce qui est absurde puisqu'on a supposé $F \neq G$. Donc $\dim(F+G) = 3$.
2. On alors déduit de
$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G),$$
que $\dim(F \cap G) = 2+2-3 = 1$.

Exercice 2

Soit $\alpha > 0$. Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité

$$f_X(t) = \alpha(\mathbb{1}_{[-2,-1]}(t) + \mathbb{1}_{[1,2]}(t)).$$

1. Déterminer α.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Donner
$$\mathbb{P}(X \in]-1,2[), \quad \mathbb{P}(X = \frac{3}{2}), \quad \mathbb{P}(X \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]).$$
4. On pose
$$Y = \exp(X).$$
Déterminer la loi de la variable aléatoire Y en déterminant sa densité de probabilité.

Soit $\alpha > 0$. Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité

$$f_X(t) = \alpha(\mathbb{1}_{[-2,-1]}(t) + \mathbb{1}_{[1,2]}(t)).$$

1. Déterminer α.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Donner
$$\mathbb{P}(X \in]-1,2[), \quad \mathbb{P}(X = \frac{3}{2}), \quad \mathbb{P}(X \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]).$$
4. On pose
$$Y = \exp(X).$$
Déterminer la loi de la variable aléatoire Y en déterminant sa densité de probabilité.

Correction de l'exercice 2

1. Pour que f_X soit une densité de probabilité il faut et suffit que :
$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt = \int_{-2}^{-1} \alpha dt + \int_{1}^{2} \alpha dt = 2\,\alpha \Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}.$$
2. La fonction de répartition de X est donnée par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \frac{x+2}{2}\,\mathbb{1}_{[-2,-1]}(x) + \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(x) + \frac{x}{2}\,\mathbb{1}_{[1,2]}(x) + \mathbb{1}_{[2,+\infty[}(x).$$
3. On a :
$$\mathbb{P}(X \in]-1,2[) = \int_{-1}^{2} f_X(t)dt = \int_{1}^{2} \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(X = \frac{3}{2}) = 0,$$
$$\mathbb{P}(X \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]) = \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \frac{1}{2}dt + \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$
4. La loi de la variable aléatoire Y est déterminée par sa fonction de répartition :
$$\begin{aligned}\forall y > 0, \quad F_Y(y) &= \mathbb{P}([Y \leq y]) \\ &= \mathbb{P}([\exp(X) \leq y]) \\ &= \mathbb{P}([X \leq \ln(y)]) \\ &= F_X(\ln(y))\end{aligned}$$
Sa densité de probabilité s'obtient en dérivant :
$$\forall y > 0, \quad f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{y}\,f_X(\ln(y)) = \frac{1}{2y}\,\left(\mathbb{1}_{[e^{-2},e^{-1}]}(y) + \mathbb{1}_{[e,e^2]}(y)\right).$$

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 7 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème

On veut démontrer la *formule de Wallis* :

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{p} \left(\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1} \right)^2 = \pi.$$

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la suite $(W_n)_n$ est décroissante.
2. En déduire que la suite $(W_n)_n$ converge.
3. Montrer que la suite de terme général

$$J_n = (n+1)\, W_n\, W_{n+1}$$

   est constante et déterminer cette constante.
4. Montrer que $W_n \underset{n \to +\infty}{\sim} W_{n+1}$.
5. Montrer que pour tout $p \geq 0$:

$$\begin{cases} W_{2p} & = & \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \dfrac{\pi}{2} \\ W_{2p+1} & = & \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$

6. En déduire que

$$W_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

7. Conclure.

Correction du problème

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $0 \leq \sin(x) \leq 1$, il vient que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x)$. Par croissance de l'intégrale classique, il vient donc $W_{n+1} \leq W_n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin^n(x) \leq 1$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx,$$

soit encore $0 \leq W_n \leq \frac{\pi}{2}$. La suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.
3. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \ J_{n+1} = J_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $J_{n+1} = (n+2) \, W_{n+1} \, W_{n+2}$, avec

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x) \, \sin(x) \, dx \\ &= \left[\sin^{n+1}(x) \, (-\cos(x))\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1) \, \sin^n(x) \, \cos(x) \, (-\cos(x)) \, dx \\ &= (0-0) + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \, (1 - \sin^2(x)) \, dx \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \, dx - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x) \, dx \\ &= (n+1) \, W_n - (n+1) \, W_{n+2} \end{aligned}$$

soit $W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) W_n$. En définitive, on a :

$$J_{n+1} = (n+2) \, W_{n+1} \left(\frac{n+1}{n+2}\right) W_n = (n+1) \, W_n \, W_{n+1} = J_n.$$

La suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc constante égale à

$$J_0 = W_0 \, W_1 = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx\right) = \frac{\pi}{2}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a grâce à la question précédente que $W_n > 0$ et que $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$ entraîne l'encadrement suivant :

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

En passant à la limite sur n, on obtient que $\lim_{n \to +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a d'après la question 3 :

$$W_{2n} = \left(\frac{2n-1}{2n}\right) W_{2n-2} = \ldots = \left(\frac{\prod_{k=1}^n (2k-1)}{\prod_{k=1}^n (2k)}\right) W_0,$$

Or,

$$\frac{\prod_{k=1}^n (2k-1)}{\prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{\prod_{k=1}^n (2k-1) \, \prod_{k=1}^n (2k)}{\left(\prod_{k=1}^n (2k)\right)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n} \, (n!)^2},$$

d'où la formule

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,\frac{\pi}{2}.$$

De la même manière, nous avons :

$$W_{2n+1} = \left(\frac{2n}{2n+1}\right) W_{2n-1} = \ldots = \left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}\right) W_1 = \frac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

6. D'après les questions 3 et 4, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\pi}{2} = n\,W_{n-1}\,W_n = n\left(\frac{W_{n-1}}{W_n}\right)(W_n)^2,$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2n}}{(W_n)^2} = 1,$$

autrement dit

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} &= \frac{(2^n(n!))^2}{(2n+1)!}\,\frac{(2^n(n!))^2}{(2n)!}\,\frac{2}{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi(2n+1)}\left(\frac{(2^n(n!))^2}{(2n)!}\right)^2 \\
&= \frac{2n}{\pi(2n+1)}\left(\frac{1}{n}\,\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}\right)^2
\end{aligned}$$

Donc, à la limite, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\,\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)} = \pi.$$

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 7 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

Soient

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 2y + z = 0 \quad \text{et} \quad x - y + z = 0 \quad \text{et} \quad x + y + 2z = 0\}$$

et

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x + 2y - z = 0 \quad \text{et} \quad 2x + 4y - 2z = 0\}\,.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que F est un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la représentation matricielle dans les bases canoniques de la projection sur E de direction F.

Correction de l'exercice 1

1. E est le noyau de l'application linéaire de matrice canonique

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

c'est donc un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ et de plus

$$E = \mathrm{Vect}\{(3, 1, -2)\}.$$

2. On a que $F = \mathrm{Vect}\{(1, 0, 1), (2, -1, 0)\}$ et comme les éléments de base de E et F forment une famille libre à trois éléments de $\mathbb{R}^3$, E et F sont bien supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. La matrice canonique de la projection sur E parallèlement à F s'obtient en calculant les images $p(e_1), p(e_2), p(e_3)$ des éléments de la base canonique.
Calculons $p(e_1)$. Comme $p(e_1) \in E$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $p(e_1) = (3\alpha, \alpha, -2\alpha)$. Comme de plus $e_1 - p(e_1) \in F$, il existe $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$e_1 - p(e_1) = (\beta + 2\gamma, -\gamma, \beta).$$

Ainsi, (α, β, γ) est solution de :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -5 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

soit $p(e_1) = \frac{1}{7}(3, 1, -2)$.
On obtiendrait de la même manière :

$$p(e_2) = \frac{1}{7}(6, 2, -4) \quad \text{et} \quad p(e_3) = \frac{1}{7}(-3, -1, 2).$$

D'où :

$$P = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarque pour le jury : On pourra faire remarquer que si on note $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$, son inverse est donnée par $A^{-1} = \frac{1}{7} \left(\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 5 \\ 1 & -5 & -1 \\ \hline 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$ et la matrice canonique de la projection sur E parallèlement à F s'obtient par :

$$P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 & -1/7 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Dans une usine, on utilise conjointement deux machines M1 et M2 pour fabriquer des masques FFP2 en série. Pour une période donnée, leurs probabilités de tomber en panne sont respectivement 0,01 et 0,008. De plus la probabilité de l'événement "la machine M2 est en panne sachant que M1 est en panne" est égale à 0,4.

1. Quelle est la probabilité d'avoir les deux machines en panne au même moment ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une machine qui fonctionne ?

Correction de l'exercice 2

1. Notons A l'événement "M1 est en panne" et B l'événement "M2 est en panne". On a $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{100}$ et $\mathbb{P}(B|A) = \frac{4}{10}$, d'où $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(A|B) = \frac{4}{1000} = 0,004$.
2. On a $\mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cap B) = 0,996$.

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 8 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème

Alice et Bob jouent aux dés. À tour de rôle, en commençant par Alice, chacun lance deux dés. Alice gagne si la somme des dés donne 6 et Bob gagne si la somme des dés donne 7. Dès qu'un des joueurs gagne, le jeu s'arrête ; tant qu'aucun des joueurs n'a gagné, le jeu continue. On suppose que les dés ne sont pas truqués.

1. Calculer la probabilité pour qu'Alice gagne dès son premier lancer.
2. Calculer la probabilité pour qu'Alice ne gagne pas à son premier lancer et que Bob gagne dès son premier lancer.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité A_n pour qu'Alice gagne à son $n^{\text{ème}}$ lancer.
   (b) En déduire la probabilité a_n pour qu'Alice gagne en n lancers ou moins.
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité B_n pour que Bob gagne à son $n^{\text{ème}}$ lancer.
   (b) En déduire la probabilité b_n pour que Bob gagne en n lancers ou moins.
5. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n$.
6. Qui a le plus de chances de gagner ?

Correction du problème

1. Notons $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ l'ensemble des issues possibles du lancer de deux dés. L'événement A_1 est alors le sous-ensemble $\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$. La probabilité étant uniforme, on a donc $\mathbb{P}(A_1) = \frac{\text{Card}(A_1)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{5}{36}$.
2. Notons B_0 l'événement « La somme des dés donne 7 ». Par le même raisonnement qu'à la question précédente, $\mathbb{P}(B_0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. L'événement B_1 est alors $B_1 = \overline{A_1} \cap B_0$. Les lancers de dés étant indépendants les uns des autres, on a donc : $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(\overline{A_1}) \times \mathbb{P}(B_0) = \frac{31}{36} \times \frac{1}{6} = \frac{31}{216}$.
3. (a) Pour qu'Alice gagne à son $n^{\text{ème}}$ lancer, il faut que personne n'ait gagné précédemment. Notons A_n l'événement « Alice gagne à son $n^{\text{ème}}$ lancer » ; les lancers étant tous indépendants, on a donc : $\mathbb{P}(A_n) = \left(\frac{31}{36} \times \frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{5}{36}$.

(b) Notons A'_n l'événement « Alice gagne en n lancers ou moins », alors $A'_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$; les événements A_k étant incompatibles deux Ã deux, on a donc :

$$a_n = \mathbb{P}(A'_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) = \frac{1-q^n}{1-q} \times \frac{5}{36}, \quad \text{où} \quad q = \frac{31}{36} \times \frac{5}{6}.$$

4. (a) Avec des notations similaires, on a : $\mathbb{P}(B_n) = \left(\frac{31}{36} \times \frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{31}{36} \times \frac{1}{6}$.

(b) Par conséquent :

$$b_n = \mathbb{P}(B'_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k) = \frac{1-q^n}{1-q} \times \frac{31}{36} \times \frac{1}{6}, \quad \text{où} \quad q = \frac{31}{36} \times \frac{5}{6}.$$

5. D'après les calculs précédents :
$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{1-q} \times \frac{5}{36} = \frac{30}{61}$,
$\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{1-q} \times \frac{31}{36} \times \frac{1}{6} = \frac{31}{61}$.
6. Bob a le plus de chances de gagner.

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 8 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

Discuter suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right) e^{-1/t} t^{-n} \mathrm{d}t \, .$$

Correction de l'exercice 1

La fonction $f : t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}} t^{-n}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f est intégrable sur tout compact de $]0, +\infty[$. De plus :

— $\forall n \in \mathbb{N},\ f(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc f est prolongeable par continuité, donc intégrable, en 0,

— $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{n+1}}$, donc d'après le critère de Riemann, f est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $n \in \mathbb{N}^*$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ est donc convergente si et seulement si $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2

Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Montrer que

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y - z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix} \end{array}$$

est une projection orthogonale et la caractériser.

Correction de l'exercice 2

Ainsi définie, l'application p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, de matrice canonique :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors facilement que $A^2 = A$ (p est un projecteur) et que

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}\{(1,1,1\},$$

$$\mathrm{im}(A) = \mathrm{Vect}\{(2,-1,-1),(-1,2,-1)\},$$

et donc $\ker(A) = (\mathrm{im}(A))^{\perp}$, autrement dit que p est la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{im}(A)$.

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 9 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème

Deux joueurs lancent simultanément chacun une pièce équilibrée comportant deux faces : Pile et Face. Si les joueurs ont obtenu le premier Pile au même essai, il y a match nul. Sinon le joueur qui a obtenu Pile en premier gagne.

Pour modéliser le jeu, on considère que le numéro du lancer auquel le joueur obtient son premier Pile suit une loi géométrique de paramètre $1/2$: $\mathcal{G}(1/2)$. Soit $X \sim \mathcal{G}(1/2)$ le numéro du lancer auquel le joueur 1 obtient son premier Pile et $Y \sim \mathcal{G}(1/2)$ le numéro du lancer auquel le joueur 2 obtient son premier Pile.

1. Montrer que X et Y sont indépendantes.
2. Quelle est la probabilité que $X = Y$?
3. En utilisant la symétrie du problème, quelle est la probabilité que le premier joueur gagne ?
4. On désigne par Z le nombre d'essais effectués avant que le jeu ne s'arrête. Exprimer Z en fonction de X et de Y.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la probabilité que le jeu dure au moins n essais.
6. En déduire la loi de Z.
7. Combien de lancers en moyenne dure une partie ?

Correction du problème

1. Le résultat du lancer d'une pièce n'influence pas celui de l'autre, donc X et Y sont indépendantes. On a : $\forall (k,l) \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k \cap Y = l) = \frac{1}{2^{k+l}} = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = l)$.
2. Comme X et Y sont indépendantes, on a :
$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$
3. D'après la question précédente, la probabilité que l'un des joueurs gagne est $\frac{2}{3}$. Par symétrie du problème, les deux joueurs ont la même probabilité de gagner, donc le joueur 1 a une probabilité $\frac{1}{3}$ de gagner.

4. On a $Z = \min(X, Y)$.
5. On a $\mathbb{P}(Z \geq n) = \mathbb{P}(X \geq n \cap Y \geq n) = \mathbb{P}(X \geq n)\mathbb{P}(Y \geq n) = \left(\frac{1}{2^n}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2^{2n-2}}$.
6. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On a $\mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(Z \geq n) - \mathbb{P}(Z \geq n+1) = \frac{3}{2^{2n}}$.
7. On a $E(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{2^{2n}} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{3}{4}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{4}{3}$.

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 9 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

Soit $\mathbb{R}^3$ équipé du produit scalaire usuel et muni de la base canonique.

1. Déterminer une base du sous-espace vectoriel orthogonal à
$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - y + 2z = 0 \ \text{ et } \ y - z = 0\} \ .$$
2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.
3. Déterminer la distance de $(-1, 1, 1)$ à F.
4. Déterminer la distance de $(2, 1, 0)$ à F.
5. Déterminer la distance de $(2, 1, 0)$ à l'orthogonal de F.

Correction de l'exercice 1

1. Une base de $F^\perp$ est, par définition de F, $((1, -1, 2), (0, 1, -1))$.
2. Notons p la projection orthogonale sur F et $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. F étant la droite de vecteur directeur $u = (-1, 1, 1)$, on a :
$$p(e_1) = \frac{\langle e_1, u\rangle}{\|u\|^2} u = -\frac{1}{3}(-1, 1, 1),$$
et de même : $p(e_2) = p(e_3) = \frac{1}{3}(-1, 1, 1)$. La matrice de p dans β est donc
$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
3. Comme $v = (-1, 1, 1) \in F$, la distance de v à F est nulle.
4. La distance d de $w = (2, 1, 0)$ à F est la norme de $w - p(w) = (2, 1, 0) - \frac{-1}{3}(-1, 1, 1) = \frac{1}{3}(5, 4, 1)$, c'est-à-dire que $d = \frac{\sqrt{5^2+4^2+1^2}}{3} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}$.
5. La distance d de w à $F^\perp$ est la norme de $p(w) = \frac{-1}{3}(-1, 1, 1)$, donc $d = \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 2

Déterminer l'équation des droites asymptotiques en $+\infty$ et $-\infty$ ainsi que leur position par rapport à la courbe représentative de

$$x \mapsto (x-1)\exp\left(\frac{1}{1+x}\right) \ .$$

Correction de l'exercice 2

Soit $f : x \mapsto (x-1)\exp\left(\frac{1}{1+x}\right)$. On a :

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x} + \underset{x\to\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \underset{x\to\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

donc

$$f(x) = (x-1)\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + \underset{x\to\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x - \frac{3}{2x} + \underset{x\to\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

La courbe représentative de f a donc pour asymptote en $\pm\infty$ la droite d'équation $y = x$.

De plus, $f(x) - x = -\frac{3}{2x} + \underset{x\to\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$, donc la courbe est au-dessus de son asymptote en $-\infty$, et en-dessous en $+\infty$.

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 10 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire réelle admettant comme densité la fonction f.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer
   $$\lim_{x \to +\infty} x^{n+2} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} x^{n+2} f(x) \ .$$
   (b) En déduire que X admet un moment de tout ordre.
   (c) Calculer $\mathbb{E}(X^{2p+1})$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   (d) Donner les valeurs de t pour lesquelles $\mathbb{E}(e^{tX})$ existe.
3. Soit $Z = e^X$. Déterminer la loi de Z.
4. Soient $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On pose $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $Z_n = Y_n - \ln n$. Déterminer la fonction de répartition de Y_n puis celle de Z_n.

Correction du problème

1. Ainsi définie, f est positive et continue sur $\mathbb{R}$. Soit $\alpha > 0$. On a :
$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \left[\frac{-1}{1+e^x}\right]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{-1}{1+e^\alpha} + \frac{1}{1+e^{-\alpha}},$$
donc à la limite $\alpha \to +\infty$, on obtient :
$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{-1}{1+e^\alpha} + \frac{1}{1+e^{-\alpha}} = 1.$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a par équivalence puis croissances comparées :

$$\lim_{x \to +\infty} x^{n+2} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{n+2}}{e^x} = 0.$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^{n+2} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^{n+2}\, e^x = 0.$$

(b) D'après la question précédente, il existe un $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \geq \alpha$, $x^n\, f(x) \leq \dfrac{1}{x^2}$, donc l'intégrale $\int_\alpha^{+\infty} x^n\, f(x)\, dx$ converge par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_\alpha^{+\infty} \dfrac{1}{x^2}\, dx$, et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^n\, f(x)\, dx$ converge.
Il en va de même pour $\int_{-\infty}^0 x^n\, f(x)\, dx$, et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, f(x)\, dx$ converge. D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire X admet donc un moment de tout ordre.

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$. Comme la fonction f est paire, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^{2p+1}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p+1}\, f(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} x^{2p+1}\, f(x)\, dx + \int_0^{+\infty} x^{2p+1}\, f(x)\, dx \\
&= \int_0^{+\infty} (-x)^{2p+1}\, f(-x)\, dx + \int_0^{+\infty} x^{2p+1}\, f(x)\, dx \\
&= -\int_0^{+\infty} x^{2p+1}\, f(x)\, dx + \int_0^{+\infty} x^{2p+1}\, f(x)\, dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(d) Soit $t \in \mathbb{R}$. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^{tx}\, f(x) = \dfrac{e^{(t+1)x}}{(1+e^x)^2}$. Ainsi définie, la fonction g est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et nous avons les équivalents suivants :

$$g(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{(t-1)x} \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} e^{(t+1)x},$$

donc l'intégrale $\int g(x)\, dx$ converge si et seulement si $-1 < t < 1$.

3. La loi de $Z = e^X$ est complètement déterminée par sa fonction de répartition. Comme Z est à valeurs positives, on a que $\forall x \leq 0,\ F_Z(x) = 0$. Soit $x > 0$. On a :

$$F_Z(x) = \mathbb{P}([e^X \leq x]) = \mathbb{P}([X \leq \ln(x)]) = F_X(\ln(x)) = \int_{-\infty}^{\ln(x)} f(t)\, dt = 1 - \frac{1}{1+x}.$$

Ainsi définie par morceaux, la fonction F_Z est continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$. Elle est également croissante sur $\mathbb{R}$ et a pour limite 0 en $-\infty$ et pour limite 1 en $+\infty$. En outre, F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 donc sur $\mathbb{R}$ et la v.a. Z admet pour densité la fonction f_Z définie comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Z(x) = F_Z'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
F_{Y_n}(x) &= \mathbb{P}([Y_n \leq x]) \\
&= \mathbb{P}([\max(X_1, \ldots, X_n) \leq x]) \\
&= \mathbb{P}(\cap_{k=1}^{n} [X_k \leq x]) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_n \leq x]) \\
&= (F_X(x))^n \\
&= \left(1 - \frac{1}{1+e^x}\right)^n.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
F_{Z_n}(x) &= \mathbb{P}([Y_n - \ln(n) \leq x]) \\
&= \mathbb{P}([Y_n \leq x + \ln(n)]) \\
&= (F_X(x + \ln(n)))^n \\
&= \left(1 - \frac{1}{1+n\,e^x}\right)^n.
\end{aligned}$$

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 10 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

Soient $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et $D := \text{vect}\{(1, a, 0)\}$, avec $a \neq 0$.

1. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur D dans la base canonique.
2. Déterminer une base de $D^\perp$, l'orthogonal de D.
3. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + ay = 0\}$ dans la base canonique.

Correction de l'exercice 1

1. Soit $a \neq 0$. Notons $v = (1, a, 0)$ et $w = v/\|v\| = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}(1, a, 0)$.
   La matrice canonique de la projection orthogonale p_D sur D est obtenue en calculant les images suivantes :
   $p_D(e_1) = \langle e_1, w\rangle\, w = \dfrac{1}{1+a^2}(1, a, 0)$
   $p_D(e_2) = \langle e_2, w\rangle\, w = \dfrac{a}{1+a^2}(1, a, 0)$
   $p_D(e_3) = \langle e_3, w\rangle\, w = (0, 0, 0)$

   D'où
   $$P_D = \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. Le sous-espace vectoriel $D^\perp$ est de dimension $3 - \dim(D) = 2$. Les vecteurs $w_1 = (0, 0, 1)$ et $w_2 = (a, -1, 0)$ appartiennent à $D^\perp$ et sont non colinéaires, ils forment donc une base de $D^\perp$.
3. Il s'agit du sous-espace vectoreil $D^\perp$ (par définition), la matrice canonique de la projection orthogonale sur $D^\perp$ est
   $$P_{D^\perp} = I_3 - P_D = \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} a^2 & -a & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Déterminer les extrema, s'ils existent, de la fonction suivante :

$$f(x, y) = -10 + x^2 + 5y^2 - 3xy + x - 2y \; .$$

Correction de l'exercice 2

Comme f est polynomiale, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ (même de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$) et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\nabla f(x, y) = (2\,x - 3\,y + 1, -3\,x + 10\,y - 2) = (0, 0) \Longleftrightarrow (x, y) = \left(-\frac{4}{11}, \frac{1}{11}\right),$$

donc $\left(-\frac{4}{11}, \frac{1}{11}\right)$ est l'unique point critique de f.

En outre, comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, la matrice hessienne de f en tout point (x, y) est

$$H_f\,(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}, \quad r = 2,\; rt - s^2 = 11$$

et en vertu du critère de Monge, ce point critique est bien un point de minimum global de f.

Concours BLSES 2021–2022

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 11 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème

On suppose que toutes les variables aléatoires dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a^2} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2a^2}\right) & \text{si } x \geq 0\,, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où a est un paramètre réel strictement positif.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire réelle admettant comme densité la fonction f.
   (a) Montrer que X admet un moment d'ordre n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, calculer $\mathbb{E}(X^n)$ en fonction de $\mathbb{E}(X^{n-2})$.
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}$, en déduire $\mathbb{E}(X^n)$ en fonction de n et de a.
3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que X. On pose
$$Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{et} \quad Z_n = \frac{1}{n} \cdot \exp\left(\frac{Y_n^2}{2a^2}\right).$$
   (a) Déterminer la fonction de répartition de Y_n puis celle de Z_n.
   (b) Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer
$$F_Z(t) := \lim_{n \to +\infty} F_{Z_n}(t),$$
   où F_{Z_n} est la fonction de répartition de Z_n.
   (c) Vérifier que F_Z est une fonction de répartition.

Correction du problème

1. Ainsi définie, f est positive et continue sur $\mathbb{R}$. Soit $b > 0$, on a :

$$I_b = \int_0^b \frac{t}{a^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) dt = \left[-\exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right)\right]_0^b = 1 - \exp\left(-\frac{b^2}{2a^2}\right),$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \lim_{b \to +\infty} I_b = 1.$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\forall t \geq 0$, $g(t) = \frac{t^{n+1}}{a^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right)$. On a par croissances comparées

$$\lim_{t \to +\infty} t^2\, g(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^{n+3}}{a^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) = 0,$$

d'où par comparaison avec l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^n\, f(t)\, dt$ converge. Dès lors $\int t^n\, f(t)\, dt$ converge, autrement dit X admet un moment d'ordre n.

(b) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit $b > 0$, on note $I_n(b) = \int_0^b t^n\, f(t)\, dt$.

Posons $\forall t \geq 0$, $\left\{ \begin{array}{lcl} u(t) & = & t^n \\ u'(t) & = & n\, t^{n-1} \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{lcl} v'(t) & = & \frac{t}{a^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) \\ v(t) & = & -\exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) \end{array} \right.$.

Ainsi définies u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$I_n(b) = -b^n \exp\left(-\frac{b^2}{2a^2}\right) + n\, a^2 \int_0^b \frac{t^{n-1}}{a^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) dt,$$

d'où à la limite

$$\mathbb{E}(X^n) = \lim_{b \to +\infty} I_n(b) = n\, a^2\, E(X^{n-2}).$$

(c) On a d'une part $\mathbb{E}(X^0) = 1$ et, d'après la question précédente que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(X^{2k}) = (2\, a^2)^k\, k!.$$

D'autre part, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi} a} \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi} a} \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) dt.$$

On reconnait $\mathbb{E}(Y^2)$ où Y suit une loi normale $\mathcal{N}(0, a^2)$. Or $\mathbb{E}(Y^2) = V(Y) + \mathbb{E}(Y)^2 = a^2$, d'où $\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(X^{2k+1}) = \prod_{i=0}^{k} (2i+1) \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a^{2k+1} = \frac{(2k+1)!}{2^k\, k!} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a^{2k+1}.$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x < 0$, on a $F_{Y_n}(x) = 0$ et pour $x \geq 0$

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) &= \mathbb{P}([\max(X_1, \ldots, X_n) \leq x) \\ &= \mathbb{P}(\cap_{i=1}^n [X_i \leq x]) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}([X_i \leq x]) \\ &= \left(1 - e^{-\frac{x^2}{2\, a^2}}\right)^n. \end{aligned}$$

Pour tout $x < \frac{1}{n}$, $F_{Z_n}(x) = 0$ et pour $x \geq \frac{1}{n}$, on a :

$$\begin{aligned}
F_{Z_n}(x) &= \mathbb{P}([\frac{1}{n}\, e^{\frac{Y_n^2}{2a^2}} \leq x]) \\
&= \mathbb{P}([Y_n \leq \sqrt{2a^2\, \ln(nx)}]) \\
&= F_{Y_n}(\sqrt{2a^2\, \ln(nx)}) \\
&= \left(1 - \frac{1}{nx}\right)^n.
\end{aligned}$$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. On distingue deux cas :
Si $t \leq 0$, on a $F_Z(t) = \lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$.
Si $t > 0$, on a $F_Z(t) = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{n\, \ln(1 - 1/(nt))} = e^{-1/t}$.

(c) Ainsi définie, la fonction F_Z est continue sur $\mathbb{R}$, de limites aux bornes

$$\lim_{t \to -\infty} F_Z(t) = 0, \quad \lim_{t \to +\infty} e^{-1/t} = 1,$$

et $\forall t > 0, \quad F_Z'(t) = \frac{1}{t^2}\, e^{-1/t} > 0$ donc F_z est croissante.

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 11 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M^3 - 3M^2 + 3M$.
2. Démontrer que M est inversible.
3. Exprimer M^{-1} en fonction de M et I_3.

Correction de l'exercice 1

1. On a $M^3 - 3\,M^2 + 3\,M = I_3$.
2. Donc d'après la question précédente que $M(M^2 - 3\,M + 3\,I_3) = I_3$, ce qui montre que M est inversible.
3. Son inverse est donnée par $M^{-1} = M^2 - 3\,M + 3\,I_3$.

Exercice 2

Pour $n \geq 0$, on consière

$$u_n = \frac{4}{(n+1)(n+3)} .$$

1. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.
2. Déterminer la valeur de
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n .$$

Correction de l'exercice 2

1. La série $\sum u_n$ est une série à terme positifs et $u_n \sim_{n\to+\infty} \frac{4}{n^2}$ donc série converge.
2. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{n+1} - \dfrac{2}{n+3}$, on a pour la somme partielle

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+3} = 2\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$

et par passage à la limite $n \to +\infty$, on trouve donc :

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = 3.$$

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 12 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème

Alice et Bob s'affrontent lors d'une succession de parties d'un jeu de hasard. Ils possèdent initialement a et b euros respectivement. Lors d'une partie un des deux joueurs est désigné gagnant et l'autre perdant (sans possibilité d'égalité). À chaque partie le perdant donne un euro au gagnant, alimenant ainsi leur richesse. À chaque partie, on suppose qu'Alice a une probabilité p de perdre et une probabilité $q = 1 - p$ de gagner. Le jeu s'arrête lorsqu'un joueur n'a plus d'argent.

Soient p, q dans $]0, 1[$, N un entier naturel non nul et a et b des entiers naturels. Soit $N = a + b$. Pour $n \in [\![0, N]\!]$, on note p_n la probabilité qu'Alice finisse ruinée si elle commence avec n euros, et q_n la probabilité que Bob finisse ruiné s'il commence avec n euros.

1. Montrer que $(p - q)^2 = 1 - 4pq$.
2. Déterminer p_0 et p_N.
3. Si $p = 1/2$, pour tout $a \in [\![1, N - 1]\!]$, déterminer l'expression générale de p_a.
4. Si $p \neq 1/2$:
   (a) Montrer que pour tout $a \in [\![1, N - 1]\!]$, $p_a = pp_{a-1} + qp_{a+1}$.
   (b) En déduire l'expression générale de p_a.
5. Déterminer de même l'expression générale de q_b.

Correction du problème

1. On a :

$$1 - 4\,p\,(1 - p) = 1 - 4\,p + 4\,p^2 = (1 - 2\,p)^2 = (1 - p - p)^2 = (q - p)^2.$$

2. On a évidemment $p_0 = 0$ et $p_N = 0$.
3. Soit $a \in [\![1, N - 1]\!]$. A chaque partie, on a par la formule de Bayes :

$$p_a = p\,p_{a-1} + q\,p_{a+1},$$

ce qui fournit les équations de récurrence double :

$$q\,p_{a+1} - p_a + p\,p_{a-1} = 0\ , \quad a = 1, \ldots, N - 1.$$

4. Si $p \neq 1/2$, le polynôme caractéristique $q\,X^2 - X + p$ admet 1 pour racine double et

$$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2;\ \forall a \in [\![0,N]\!],\ p_a = \alpha + \beta\,a.$$

Avec les conditions $p_0 = 1$ et $p_N = 0$, on trouve $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{1}{N}$, d'où :

$$\forall a \in [\![0,N]\!], \quad p_a = 1 - \frac{a}{N}.$$

(a) Déjà vu.

(b) Dans tout cas de (p,q) avec $p+q=1$ autre qu'en 4., le polynôme caractéristique a pour discriminant

$$\Delta = 1 - 4\,p\,q = (p-q)^2 > 0,$$

donc a deux racines réelles distinctes $\lambda = \frac{1+p-q}{2q} = \frac{p}{q}$ et $\lambda' = \frac{1-p+q}{2q} = 1$ et

$$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2;\ \forall a \in [\![0,N]\!],\ p_a = \alpha + \beta\left(\frac{p}{q}\right)^a.$$

Avec les conditions $p_0 = 1$ et $p_N = 0$, on trouve $\alpha = -\frac{\left(\frac{p}{q}\right)^N}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^N}$ et $\beta = \frac{1}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^N}$, d'où :

$$\forall a \in [\![0,N]\!], \quad p_a = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^a - \left(\frac{p}{q}\right)^N}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^N}.$$

5. On trouverait de la même manière que :

$$\forall b \in [\![0,N]\!], \quad q_b = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}.$$

Épreuve orale d'admission : Mathématique

- Planche n° 12 : Deuxième partie – Exercices sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice 1

On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 1

1. On a :
$$J^0 = I_3, \;\; J^1 = J, \;\; J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\text{ et } \forall n \geq 3, \;\; J^n = 0_{3\times 3}.$$
2. On remarque que
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + J,$$
avec $I_3\, J = J\, I_3 = J$, donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (I_3 + J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k = I_3 + n\, J + \frac{n(n-1)}{2}\, J^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

1. Démontrer la convergence de l'intégrale
$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} \mathrm{d}x \,.$$

2. Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$,

$$\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1\ .$$

3. Pour tout $\alpha \in]0,1[$, démontrer l'égalité

$$\int_0^{\alpha} \frac{x}{\ln x}\, dx = \int_0^{\alpha^2} \frac{1}{\ln x} \mathrm{d}x.$$

4. En déduire un encadrement de

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} \mathrm{d}x\ .$$

Correction de l'exercice 2

1. Posons $\forall x \in]0,1[,\ f(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$. Ainsi définie f est une fonction continue et positive sur $]0,1[$. Comme

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{-t}{\ln(1-t)} = 1,$$

la fonction f se prolonge par continuité aux bornes de son intervalle de définition et donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} \mathrm{d}x$ converge.

2. Pour tout $0 < x \leq 1$, posons :

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x} - \ln(x) \quad \text{et} \quad h(x) = \ln(x) - x + 1.$$

Ainsi définies, les fonctions g et h sont dérivables sur $]0,1[$ et

$$\forall x \in]0,1[, \quad g'(x) = \frac{1-x}{x^2} > 0, \quad h'(x) = \frac{1-x}{x} > 0,$$

c'est-à-dire que g et h sont croissantes sur $]0,1]$. Comme de plus $g(1) = h(1) = 0$, les deux inégalités en découlent.

3. Soit $\alpha \in]0,1[$, on a par le changement de variable strictement croissant $y = x^2$

$$\int_0^{\alpha} \frac{x}{\ln x}\, dx = \int_0^{\alpha} \frac{2\,x}{\ln(x^2)}\, dx = \int_0^{\alpha^2} \frac{1}{\ln y} \mathrm{d}y.$$

4. On a d'après la question 2. que

$$\forall x \in]0,1[, \quad x \leq \frac{x-1}{\ln(x)} \leq 1,$$

donc par croissance de l'intégrale classique

$$\forall 0 < \gamma \leq 1, \quad \int_{\gamma}^1 x\, dx \leq \int_{\gamma}^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\, dx \leq \int_{\gamma}^1 dx,$$

D'où à la limite $\gamma \to 0$

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\, dx \leq 1.$$