Concours 2024

Rapport épreuve oral de mathématiques TSE

Adrien Blanchet [1], Mélanie Blazère [2] & Ludovic Garcia [3]

1 Déroulement de l'épreuve

En 2024, l'épreuve orale a eu lieu du mercredi 26 juin au mercredi 3 juillet à la Manufacture des Tabacs, dans le centre ville de Toulouse. Les oraux de mathématiques se sont déroulés dans les salles MC201 et MC202 (salles d'environ 40 places). Le jury était installé sur une rangée de tables à environ 5m du tableau sur lequel les candidats ont pu composer. Dans chaque salle le tableau est un tableau noir et des craies en bon état de couleur blanc, rouge et jaune étaient mis à disposition des candidats.

Chaque jury de mathématiques est constitué de deux professeurs : l'un issu de l'École d'Économie de Toulouse (TSE) et l'autre de classe préparatoire aux grandes écoles. Parmi les professeurs de classes préparatoires quatre étaient professeurs en classe préparatoire BL et deux en classe préparatoire ECG. Parmi les enseignants à TSE trois étaient maîtres de conférences et deux étaient PRAG.

Après 30 minutes de préparation dans une salle surveillée, le candidat est accompagné dans la salle où se déroule l'oral. Le responsable du jury, vérifie l'identité du candidat, présente rapidement les membres du jury et explique le déroulé de l'épreuve de la façon suivante : "Vous avez préparé pendant 30 minutes un exercice. Vous allez nous présenter au tableau pendant 15 minutes le résultat de vos réflexions. Nous vous recommandons de vous concentrer en premier lieu sur les questions que vous avez sues faire. Dans un deuxième temps vous pourrez revenir sur les questions sur lesquelles vous avez des pistes ou des idées mais qui n'ont pas pu aboutir et le jury vous aidera à avancer. Pour la présentation de vos résultats il n'est pas nécessaire de détailler l'ensemble des calculs, mais juste d'écrire le résultat, et de donner à l'oral les justifications et la démarche qui vous a permis d'y aboutir." Après ces 15 minutes, il est dit au candidat : "Merci. Le temps qui était imparti pour le premier exercice est maintenant écoulé. Nous vous demandons de prendre connaissance de ce deuxième exercice que je vous distribue et d'effacer la tableau. Vous aurez 15 minutes pour avancer sur ce deuxième exercice, en partageant éventuellement oralement vos réflexions avec le jury.".

L'oral se termine après 30 minutes.

2 Bilan

La moyenne des notes à l'épreuve orale de mathématiques 2024 se situe à 11.85/20. Note minimale : 3.5/20 ; note maximale : 19.5/20, écart-type : 4.26.

1. Toulouse School of Economics, Adrien.Blanchet@tse-fr.eu
2. Lycée Ozenne, Toulouse
3. Lycée Henri IV, Béziers

Le jury a apprécié l'attitude générale des candidats à l'oral. Quelque soit le niveau, les candidats ont visiblement bien préparé cette épreuve. Comme énoncé en début d'oral, le jury n'attend pas que les candidats détaillent l'entièreté de leur raisonnement mais plutôt qu'ils énoncent le résultat et ne donnent que les justifications nécessaires. Les bons étudiants traitent souvent toutes les premières questions à l'oral en quelques minutes sans ne rien écrire au tableau. Dans le cas où le jury aurait un doute, il n'hésitera pas à interrompre le candidat pour vérifier que les étapes sont toutes maîtrisées. L'interaction avec le jury est un élément particulièrement important qui permet d'évaluer le candidat. Il est ainsi conseillé au candidat d'être bien attentif aux interventions du jury afin d'y répondre pleinement, sans essayer de les contourner.

3 Perspectives

3.1 Note éliminatoire

Rappelons en préliminaire que l'évaluation d'un oral de mathématiques était basée sur le principe suivant :

— note en dessous de 7 : le cours n'est pas bien maîtrisé et plusieurs erreurs importantes sont commises.

— note entre 8 et 12 : le cours est plutôt maîtrisé et/ou les candidat.es accumulent quelques erreurs, arrivent à traiter plusieurs questions de la planche, mais ne tirent pas vraiment profit des interactions avec le jury.

— note entre 13 et 15 : le cours est globalement bien maîtrisé, les candidat.es ne commettent pas beaucoup d'erreurs et ont plutôt bien avancé dans les planches avec une aide conséquente du jury.

— note > 16 : le cours est bien maîtrisé, et les candidat.es ont bien avancé de manière autonome dans les planches et réagissent bien aux indications du jury.

La réussite à un cursus à TSE ne peut pas être complète sans une très bonne maîtrise des outils et théories mathématiques au programme de la classe préparatoire BL. En conséquence, il ne nous parait pas raisonnable d'accueillir à TSE un candidat qui serait considéré comme ne maîtrisant pas son cours pendant les oraux. La note éliminatoire étant à 5/20, le nouveau barème est le suivant :

— note en dessous de 5 : le cours n'est pas bien maîtrisé et plusieurs erreurs importantes sont commises.

— note entre 5 et 10 : le cours est plutôt maîtrisé et/ou les candidat.es accumulent quelques erreurs, arrivent à traiter plusieurs questions de la planche, mais ne tirent pas vraiment profit des interactions avec le jury.

— note entre 10 et 14 : le cours est globalement bien maîtrisé, les candidat.es ne commettent pas beaucoup d'erreurs et ont plutôt bien avancé dans les planches avec une aide conséquente du jury.

— note > 14 : le cours est bien maîtrisé, et les candidat.es ont bien avancé de manière autonome dans les planches et réagissent bien aux indications du jury.

3.2 Lutte contre les discriminations

Le jury de mathématiques est conscient des biais sociaux et de leurs effets délétères notamment sur les femmes et les minorités ethniques. En conséquence le jury a fait son possible pour prendre en compte ces biais. Ainsi il apparaît en particulier que les candidates perdent plus rapidement confiance. Le jury ne souhaite pas tester la résistance des candidats au stress. Le jury reste ainsi en tout temps encourageant et n'hésite pas à rassurer les candidats qui semblent paniquer du fait du stress. Le jury est aussi vigilant à ne pas se laisser embobiner par les candidats ayant une forte confiance en eux et un bagout qui leur permet de tenter de faire passer une lacune pour une incompréhension.

TSE prend très au sérieux la lutte contre les discriminations et les violences sexistes et sexuelles. L'école fait tout ce qui est en son pouvoir pour ne pas soumettre les candidats pendant les oraux et leur séjour à Toulouse à ces actes et pressions inadmissibles. Si un candidat ou une candidate venait à ressentir de l'inconfort lors des oraux que ce soit pendant l'oral, pendant les interactions avec les étudiants qui les accueillent ou leur font visiter le campus ou Toulouse il faut absolument le signaler à la cellule écoute de l'école care@tse-fr.eu ou à Adrien Blanchet, président du jury de mathématiques et membre de la cellule d'écoute : Adrien.Blanchet@tse-fr.eu

Concours BLSES 2024

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 1 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Soit x un réel appartenant à $[0,1[$. On souhaite étudier la convergence de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0,x]$

$$\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1}{1-t} - \frac{t^{n+1}}{1-t}.$$

2. En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\mathrm{d}t \ .$$

3. Justifier que pour tout $x \in [0,1[$,

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{(n+2)(1-x)} \ .$$

4. En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\mathrm{d}t.$$

5. En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} \ .$$

6. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} \ .$$

7. Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} \ .$$

Correction. — 1. Il s'agit d'une somme de suite géométrique de raison t. Puisque $t \leqslant x$ et que $x < 1$, on en déduit que $t < 1$, ce qui nous permet d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, x], \quad \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1 - t^{n+1}}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^{n+1}}{1-t} .$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1[$. En intégrant sur $[0, x]$, le terme de gauche on obtient, par linéarité de l'intégrale

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{n} t^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^x t^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} .$$

En intégrant sur $[0, x]$, le terme de droite on obtient

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} \mathrm{d}t = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} \mathrm{d}t .$$

3. Soit $t \in [0, x]$. On a :

$$0 \leq \frac{t^{n+1}}{1-t} \leq \frac{t^{n+1}}{1-x} .$$

En intégrant on obtient

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} \mathrm{d}t \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^{n+1} \mathrm{d}t \leq \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+2}}{n+2}$$

Et comme $x \leq 1$:

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} \mathrm{d}t \leq \frac{1}{1-x} \frac{1}{n+2} .$$

4. Par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} \mathrm{d}t = 0 .$$

5. D'après les deux questions précédentes,

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) - \lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} \mathrm{d}t = -\ln(1-x) .$$

6. En posant $j = k + 1$ on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{x^j}{j} = -\ln(1-x) .$$

Par conséquent, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge lorsque $x \in [0, 1[$ et l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} \right) = -\ln(1-x).$$

7. En choisissant $x = 1/2$ dans la somme précédente, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} \right)^n = -\ln \left(1 - \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n} = -\ln \left(\frac{1}{2} \right) = \ln 2 .$$

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 1 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — 1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On considère

$$M := \begin{pmatrix} x & x+y \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

(a) Pour quelles valeurs de x et de y la matrice M est-elle inversible ?

(b) Pour quelles valeurs de x et de y la matrice M est-elle diagonalisable ?

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre p. On considère la matrice aléatoire suivante :

$$A := \begin{pmatrix} X & X+Y \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

(a) Quelle est la probabilité que A soit inversible ?

(b) Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

Correction. — 1. (a) La matrice M est triangulaire supérieure donc elle est inversible si et seulement si $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

(b) Si $x \neq y$, la matrice a deux valeurs propres distinctes x et y donc elle est diagonalisable.

Si $x = y$, la matrice a une unique valeur propre et est donc diagonalisable si et seulement si elle est déjà diagonale, c'est-à-dire si $x + y = 0$.

2. (a) Notons Z l'évenement «A est inversible». Par indépendance de X et Y on a :

$$\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}((X \neq 0) \cap (Y \neq 0)) = \mathbb{P}(X \neq 0)\,\mathbb{P}(Y \neq 0) = \mathbb{P}(X = 1)\,\mathbb{P}(Y = 1) = p^2 .$$

(b) Notons T l'événement «A est disagonalisable dans $\mathbb{R}$». On a

$$T = \underbrace{\{X \neq Y\}}_{\text{Deux valeurs propres distinctes}} \cup \underbrace{(\{X = Y\} \cap \{X + Y = 0\})}_{\text{une seule valeur propre mais déjà diagonale}}$$

Or $\{X \neq Y\} = \{(X = 0) \cap (Y = 1)\} \cup \{(X = 1) \cap (Y = 0)\}$ donc

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = \mathbb{P}((X = 0) \cap (Y = 1)) + \mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 0)) .$$

Par indépendance de X et Y on obtient

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = 2p\,(1 - p) .$$

De même

$$\{X = Y\} \cap \{X + Y = 0\} = \{X = 0\} \cap \{Y = 0\} .$$

Donc par indépendance

$$\mathbb{P}((X = Y) \cap (X + Y = 0)) = \mathbb{P}(X = 0)\,\mathbb{P}(Y = 0) = p^2 .$$

Finalement on a

$$\mathbb{P}(T) = 2p\,(1 - p) + p^2 = 2p - p^2 .$$

Question supplémentaire : Établir la loi du rang de A ?
Soit R le rang de A. On a $R(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. De plus

— *$R = 0$ si $A = 0$ c'est-à-dire si $X = Y = 0$. Donc*

$$\mathbb{P}(R = 0) = \mathbb{P}((X = 0) \cap (Y = 0)) = (1 - p)^2 .$$

— *$R = 2$ si A est inversible. On a vu que $\mathbb{P}(R = 2) = p^2$.*
— *En conséquence $\mathbb{P}(R = 1) = 1 - \mathbb{P}(R = 0) - \mathbb{P}(R = 2) = 1 - (1 - p)^2 - p^2 = 2p(1 - p)$.*

Toulouse School of Economics

Concours BLSES 2024

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 2 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Un joueur A dispose d'une pièce qui a la propriété de faire pile avec probabilité 1/3. Un joueur B dispose d'une pièce qui a la propriété de faire pile avec probabilité $p \in]0,1[$. Les résultats des lancers de ces pièces sont indépendants.

Les joueurs A et B lancent leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'au moins une des deux pièces donne pile. Si A et B ont fait pile simultanément, le jeu s'arrête sans que personne n'ait gagné d'argent. Sinon, le premier à obtenir pile s'arrête et l'autre continue ses lancers jusqu'à obtenir pile également et paye un euro à son adversaire à chacun des lancers.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A et Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur B.

1. Justifier que les variables X et Y suivent des lois géométriques.
2. Déterminer l'espérance et la variance de X et de Y.
3. (a) Soit $Z := Y - X$. Interpréter les événements $(Z = 0)$, $(Z > 0)$ et $(Z < 0)$.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Z.
   (c) Montrer que
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\, \mathbb{P}(Y = k) = \frac{p}{1+2p}\ .$$
   (d) En déduire $\mathbb{P}(Z = 0)$.
   (e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
   $$\mathbb{P}(Z = n) = \frac{p}{1+2p}(1-p)^n\ .$$
   (f) En déduire $\mathbb{P}(Z > 0)$.
   (g) En déduire $\mathbb{P}(Z < 0)$.

Correction. — 1. On appelle succès l'événement «le joueur A obtient un pile». Le joueur A répète de manière identique et indépendante l'expérience aléatoire qui consiste à lancer la pièce en sa possession. Alors la variable aléatoire X égale au rang d'apparition du 1er succès, c'est à dire du premier pile suite une loi géométrique de paramètre 1/3. Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{G}(1/3)$:

$$P(X=k)=\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3}$$

Pour les mêmes raisons $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$:

$$P(Y=k)=(1-p)^{k-1}p$$

On a donc $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$

2. On a

$$E(X)=\frac{1}{1/3}=3 \text{ et } V(X)=\frac{2/3}{(1/3)^2}=6$$

De même on a

$$E(Y)=\frac{1}{p} \text{ et } V(Y)=\frac{1-p}{p^2}$$

3. (a) Interprétation :
   - $(Z=0)$: personne ne paye .
   - $(Z>0)$ c'est B qui doit payer (Y a été plus grand que X)
   - $(Z<0)$ c'est A qui doit payer.

   (b) Comme $Z=Y-X$ et que l'espérénace est linéaire on a

$$E(Z)=E(Y)-E(X)=\frac{1}{p}-3=\frac{1-3p}{p}$$

Par les propriété de la variance on a,

$$V(Z)=V(Y)+(-1)^2V(X)=\frac{1-p}{p^2}+6=\frac{6p^2-p+1}{p^2}$$

   (c) On calcule la somme partielle :

$$\sum_{k=1}^{N}\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=k)=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3}(1-p)^{k-1}p=\frac{p}{3}\sum_{k=1}^{N}\Bigg(\underbrace{\frac{2}{3}(1-p)}_{=\lambda}\Bigg)^{k-1}$$

Comme $|\lambda|<1$ la série géomérique converge lorsque $N\to\infty$ vers

$$\frac{p}{3}\frac{1}{1-\lambda}=\frac{p}{3}\frac{3}{1+2p}$$

   (d) Comme il s'agit d'une union d'évènements incompatibles on a

$$(Z=0)=\bigcup_{k=1}^{+\infty}(X=k\cap Y=k)$$

Donc

$$\mathbb{P}(Z=0)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=k)=\frac{p}{1+2p}$$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(Z=n)=\bigcup_{k=1}^{+\infty}(Y=n+k\cap X=k)$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=n) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=n+k\cap X=k)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=n+k)\,\mathbb{P}(X=k)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{n+k-1}\,p\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3}\\
&= \frac{1}{3}(1-p)^n\,p\frac{1}{1-\frac{2}{3}(1-p)}\\
&= \frac{(1-p)^n\,p}{1+2p}
\end{aligned}$$

(f) On a

$$(Z>0)=\bigcup_{n=1}^{+\infty}(Z=n)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z>0) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Z=n)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-p)^n\,p}{1+2p}\\
&= \frac{p}{1+2p}\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^n\\
&= \frac{p}{1+2p}\left[\frac{1-p}{p}\right]\\
&= \frac{1-p}{1+2p}
\end{aligned}$$

(g) Comme

$$\mathbb{P}(Z=0)+\mathbb{P}(Z<0)+\mathbb{P}(Z>0)=1$$

on a

$$\mathbb{P}(Z<0)=1-\frac{p}{1+2p}-\frac{1-p}{1+2p}=1-\frac{1}{1+2p}\ .$$

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 2 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Soit $\mathbb{R}_4[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 4. On considère

$$F := \{p \in \mathbb{R}_4[x] \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = x\,p'(x)\} ,$$

et

$$G := \{p \in \mathbb{R}_4[x] \ : \ p(1) = 0\} .$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[x]$.
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[x]$.
3. Déterminer une base de F.
4. Déterminer une base de G.
5. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_4[x]$.

Correction. — 1. $0_{\mathbb{R}_4[x]} \in F$.

Soit $(p, q) \in F^2$, on a

$$(p + \lambda q)(x) = p(x) + \lambda q(x) = xp'(x) + \lambda xq'(x) = x(p + \lambda q)'(x) \ .$$

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[x]$.

2. $0_{\mathbb{R}_4[x]} \in G$.

   Soit $(p, q) \in G^2$, on a

$$(p + \lambda q)(1) = p(1) + \lambda q(1) = 0 \ .$$

   Donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[x]$.

3. Pour tout $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, $(x^n)' = nx^{n-1}$ donc

$$\forall x,\ x^n = x(x^n)' \quad \Leftrightarrow \quad \forall x,\ x^n = nx^n \quad \Leftrightarrow \quad n = 1 \ .$$

   Donc une base de F est donnée par $\{x \mapsto x\}$.

4. Soit le polynôme $p(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k\, x^k$. Ce polynôme appartient à G si et seulement si $\sum_{k=0}^{4} a_k = 0$. Donc tout polynôme de G s'écrit

$$p(x) = \sum_{k=1}^{4} a_k\, x^k - 1 \ .$$

   Comme la famille $\{x^k - 1\}_{k \in \{1,2,3,4\}}$ est une famille libre elle est une base de G.

5. Soit $p \in F \cap G$. Comme $p \in F$ il est de la forme $x \mapsto \alpha\, x$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme p est dans G on a $\alpha = 0$ donc $F \cap G = \{0\}$.

   De plus $\dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}_4[x]$ donc F et G sont supplémentaires.

Concours BLSES 2024

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 3 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Le myosotis, est une fleur bisannuelle, c'est à dire qu'elle ne fleurit qu'une année sur deux. Chaque plant de mysosotis donne naissance à 4 descendants. On considère ainsi que le nombre de myosotis dans ce jardin vérifie

$$u_{n+2} = 4u_n \ . \tag{L}$$

1. Première méthode de résolution :
   (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{U}$, des suites vérifiants (L) n'est pas vide.
   (b) Montrer que $\mathcal{U}$ est stable par combinaison linéaire.
   (c) Démontrer qu'une suite géométrique de raison $q \neq 0$ appartient à $\mathcal{U}$ si et seulement si $q^2 = 4$.
   (d) Pour tout n dans $\mathbb{N}$ posons
   $$\begin{cases} a_n = u_{n+1} - 2u_n \\ b_n = u_{n+1} + 2u_n \ . \end{cases}$$
   Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites géométriques.
   (e) Conclure.
2. Deuxième méthode de résolution :
   (a) Écrire le système (L), sous la forme $X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
   (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $X_n = A^n X_0$.
   (c) Diagonaliser A.
   (d) Calculer A^n pour tout entier $n \geq 1$.
   (e) Conclure.

Correction. — 1. (a) La suite $(u_n) \equiv 0$ appartient à $\mathcal{U}$.

(b) Soit (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathcal{U}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a

$$u_{n+2} + \alpha v_{n+2} = 4u_n + \alpha 4v_n = 4(u_n + \alpha v_n)$$

Donc $\mathcal{U}$ est stable par combinaison linéaire.

(c) Soit la suite $(u_0\, q^n)_n$. Cette suite appartient à $\mathcal{U}$ si et seulement si $u_0\, q^{n+2} = 4u_0\, q^n$. Ce qui est vrai si et seulement si $q^2 = 4$.

(d) On a

$$\begin{cases} a_{n+1} = u_{n+2} - 2u_{n+1} = 4u_n - 2u_{n+1} = -2(u_{n+1} - 2u_n) = -2a_n \\ b_{n+1} = u_{n+2} + 2u_{n+1} = 4u_n + 2u_{n+1} = 2(u_{n+1} + 2u_n) = 2b_n \end{cases}$$

Donc (a_n) est une suite géométrique de raison -2 et (b_n) est une suite géométrique de raison 2.

(e) On a donc $a_n = (-2)^n a_0 = (-2)^n(u_1 - 2u_0)$ et $b_n = 2^n b_0 = 2^n(u_1 + 2u_0)$. Or pour tout n, $a_n + b_n = 2u_{n+1}$. Donc

$$\begin{aligned} 2u_{n+1} = (-2)^n(u_1 - 2u_0) + 2^n(u_1 + 2u_0) &= 2u_0(2^n - (-2)^n) + u_1(2^n + (-2)^n) \\ &= 2^{n+1}u_0(1 - (-1)^n) + 2^n u_1(1 + (-1)^n) \end{aligned}$$

D'où pour tout $n \geq 2$

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2}\left[2^n u_0(1 - (-1)^{n-1}) + 2^{n-1}u_1(1 + (-1)^{n-1})\right] \\ &= 2^{n-1}u_0(1 - (-1)^{n-1}) + 2^{n-2}u_1(1 + (-1)^{n-1}) \end{aligned}$$

2. (a) On a $X_{n+1} = AX_n$ avec

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Soit $\mathcal{P}(n)$: «$X_n = A^n X_0$»

$\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un rang n. On a

$$X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1}X_0$$

donc $\mathcal{P}$ est une proprtiété héréditaire et $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

(c) On calcule $A = PDP^{-1}$ avec

$$D := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } P := \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) On calcule

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Or $A^n = PD^nP^{-1}$ donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2^{n+1} - (-2)^{n+1} & 2^{n+2} + 2(-2)^{n+1} \\ 2^n - (-2)^n & 2^{n+1} + 2(-2)^n \end{pmatrix} &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2^{n+1} - (-1)^{n+1}2^{n+1} & 2^{n+2} + 2(-1)^{n+1}2^{n+1} \\ 2^n - (-1)^n 2^n & 2^{n+1} + 2(-1)^n 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-1} - (-1)^{n+1}2^{n-1} & 2^n + (-1)^{n+1}2^n \\ 2^{n-2} - (-1)^n 2^{n-2} & 2^{n-1} + (-1)^n 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-1}(1 - (-1)^{n+1}) & 2^n(1 + (-1)^{n+1}) \\ 2^{n-2}(1 - (-1)^n) & 2^{n-1}(1 + (-1)^n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(e) On a donc, pour tout $n \geq 2$

$$u_n = 2^{n-2}(1-(-1)^n)u_1 + 2^{n-1}(1+(-1)^n)u_0 = 2^{n-1}u_0(1-(-1)^{n-1}) + 2^{n-2}u_1(1+(-1)^{n-1})$$

Toulouse School of Economics

Concours BLSES 2024

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 3 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x\,\mathrm{e}^x - \sin(x) - x^2}{\ln(1+x) - x} \end{array}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer un développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de 0.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On appellera encore f ce prolongement.
4. Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.
5. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en l'origine.
6. Préciser les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et T.

Correction. — 1. On doit avoir

$$\begin{array}{l} 1+x>0 \\ \ln(1+x)-x\neq 0 \end{array}$$

Or

$$\ln(1+x)-x\neq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x)\neq x \Leftrightarrow 1+x\neq \exp(x) \Leftrightarrow \exp(x)-x\neq 1$$

La fonction $x\mapsto \exp(x)-x$ atteint un minimum de 1 en 0 Il faut donc $x\neq 0$. Ainsi le domaine de définition est $]-1,0[\cup]0,+\infty[$.

2. On calcule
$$f(x)=-\frac{4}{3}x-\frac{11}{9}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\ .$$
3. On prolonge par 0 en 0.
4. On a $f'(0)=-4/3$.
5. On a $d : x\mapsto -4/3x$.
6. On a $f-d=-11/9x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc C_f est toujours sous sa tangente à droite et à gauche de 0.

Toulouse School of Economics

Concours BLSES 2024

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 4 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on considère la fonction définie par :

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \, \mathrm{e}^{-x} - 1 \, . \end{array}$$

1. Pour tout $n \geq 3$, montrer que f_n est une bijection sur l'intervalle $[0, n]$.
2. Pour tout $n \geq 3$, montrer que l'équation :
$$x^n = e^x$$
admet une et une unique solution dans l'intervalle $[0, n]$. On la note x_n.
3. Montrer que pour tout $n \geq 3$ on a :
$$1 < x_n < n$$
4. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.
5. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 3}$ converge.
6. Montrer que pour tout $n \geq 3$ on a :
$$\ln(x_n) = \frac{x_n}{n} \, .$$
7. En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n \geq 3}$.
8. Établir le tableau de variation de f_n sur $\mathbb{R}$.

Correction. — 1. Pour tout n, f_n est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_n'(x) = \begin{cases} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}(n-x) & \text{si } n > 0 \\ -\mathrm{e}^{-x} & \text{si } n = 0\ . \end{cases}$$

Sur $[0, n[$, $f_n'(x) > 0$ donc elle forme une bijection.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^n = \mathrm{e}^x \Leftrightarrow x^n \mathrm{e}^{-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow f_n(x) = 0\ .$$

D'après la question 1, f_n est strictement monotone sur $[0, n]$. De plus f_n est continue sur $[0, n]$ avec $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(n) = (n/\mathrm{e})^n - 1 > 1^n - 1 = 0$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédaires $x^n = \mathrm{e}^x$ admet une unique solution sur $[0, n]$.

3. Pour tout $n \geq 3$, on a $f_n(1) = \mathrm{e}^{-1} - 1 < 0$. On a vu ci-dessus que pour tout $n \geq 3$, $f_n(n) > 0$. Donc $f_n(1) < f_n(x_n) < f_n(n)$. Or f_n est strictement croissante sur $[0, n]$ donc $1 < x_n < n$.

4. Par définition $x_{n+1}^{n+1}\mathrm{e}^{-x_{n+1}} = 1$. Or d'après la question précédente, $x_n > 1$ pour tout $n \geq 3$. Donc en divisant $x_{n+1}^{n+1}\mathrm{e}^{-x_{n+1}} = 1$ par x_{n+1} on obtient $x_{n+1}^{n}\mathrm{e}^{-x_{n+1}} < 1$. Ce qui est équivalent à $f_n(x_{n+1}) < 0$. Or $f_n(x_n) = 0$ donc $f_n(x_{n+1}) < f_n(x_n)$. Comme pour tout $n \geq 3$, $1 < x_n < n$ et que f_n est strictement croissante sur $[0, n]$, on en déduit que $x_{n+1} < x_n$ pour tout $n \geq 3$. Ce qui assure la décroissance de la suite $(x_n)_{n \geq 3}$.

5. La suite $(x_n)_{n\geq 3}$ est décroissante minorée par 1 donc elle converge.

6. Par définition de x_n on a $x_n^n = \mathrm{e}^{-x_n}$. Comme les deux termes de l'égalité sont positifs, on a pour tout $n \geq 3$:

$$n \ln(x_n) = x_n$$

qui assure le résutat attendu en divisant par n.

7. À la limite ℓ on a $\ln(\ell) = 0$. Comme ln est continue et bijective on a donc $\ell = 1$.

8. On distingue suivant la parite de n :

Si n est pair, $n \neq 0$:

x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
f_n'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_n		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Si $n = 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
f_n'		$-$	
f_n		$\searrow$	

Si $n > 1$ est impair :

x	$-\infty$		n		$+\infty$
f_n'		$+$	0	$-$	
f_n		$\nearrow$		$\searrow$	

Questions supplémentaires :

1. *On pose $y_n = x_n - 1$. Montrer que*

$$y_n + 1 = n \ln(1 + y_n) \ .$$

2. *En déduire que :*

$$\lim_{n \to +\infty} n\, y_n = 1 \ .$$

3. *On pose $z_n = x_n - 1 - \dfrac{1}{n}$. Montrer que*

$$\lim_{n \to +\infty} n^2\, z_n = \frac{3}{2} \ .$$

4. *Montrer enfin qu'il existe trois réels a , b et c tels que :*

$$x_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o(1/n^2) \ .$$

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 4 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. —

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $k_0 \in [\![1, n-1]\!]$. Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, déterminer
$$\sum_{k=k_0}^{n} x^k .$$
2. En déduire, pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$,
$$\sum_{k=1}^{n} k\, x^{k-1} .$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On jette n fois de manière indépendante une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir pile est p. Soit X la variable aléatoire égale au numéro du premier lancer qui donne pile, si l'on obtient au moins un pile, et qui vaut $n+1$ sinon. Déterminer la loi de X.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(X = k) = 1$.
5. Déterminer l'espérance de X.

Correction. — 1. On a
$$\sum_{k=k_0}^{n} x^k = x^{k_0}\frac{1-x^{n-k_0+1}}{1-x}\ .$$

2. On a
$$\sum_{k=1}^{n} x^k = x\frac{1-x^n}{1-x}\ .$$
En dérivant on obtient
$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x} + x\frac{-nx^{n-1}(1-x)+1-x^n}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}\ .$$

3. On a $X(\Omega) = [\![1;n+1]\!]$.
   Soit F_i l'évènement «ne pas obtenir pile au $i$ème lancer». On a
$$(X=n+1) = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$$
D'où par indépendance des évènements,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X=n+1\right) &= \mathbb{P}\left(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n\right)\\ &= \mathbb{P}\left(F_1\right)\mathbb{P}\left(F_2\right)\cdots\mathbb{P}\left(F_n\right)\\ &= (1-p)(1-p)\cdots(1-p)\\ &= (1-p)^n\end{aligned}$$
Soit maintenant $k \in [\![1;n]\!]$. On a :
$$(X=k) = F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap \bar{F}_k.$$
D'où par indépendance des évènements,
$$\mathbb{P}\left(X=k\right) = \mathbb{P}\left(F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap \bar{F}_k\right) = (1-p)^{k-1}p$$

4.
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}\left(X=k\right) &= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left(X=k\right) + \mathbb{P}\left(X=n+1\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(1-p)^{k-1}p + (1-p)^n\\ &= \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{n}(1-p)^k + (1-p)^n\\ &= \frac{p}{1-p}\left(1-p\right)\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} + (1-p)^n\\ &= 1-(1-p)^n + (1-p)^n\\ &= 1\end{aligned}$$

5. Le support de X étant fini, X admet donc nécessairement une espérance qui vaut :

$$
\begin{aligned}
E\left(X\right) &= \sum_{k=1}^{n+1} kP\left(X_n = k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}p + (n+1)(1-p)^n \\
&= p\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} + (n+1)(1-p)^n \\
&= p\,\frac{1-(n+1)(1-p)^n + n(1-p)^{n+1}}{(1-(1-p))^2} + (n+1)(1-p)^n \\
&= \frac{1-(n+1)(1-p)^n + n(1-p)^{n+1}}{p} + (n+1)(1-p)^n \\
&= \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p}.
\end{aligned}
$$

Remarque : à la limite quand n tend vers $+\infty$, on trouve que $E(X)$ converge vers l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.

Toulouse School of Economics

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 5 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de pile soit égale à $p \in]0;1[$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On effectue N lancers indépendants du dé. Si n est le nombre de 6 obtenus lors des N lancers, on lance ensuite n fois la pièce de manière indépendante.

1. Soit Z la variable aléatoire qui représente le nombre de 6 obtenus durant les lancers du dé. Préciser la loi de Z.
2. Déterminer l'espérance et la variance de Z.
3. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de piles obtenus au cours des lancers de la pièce. Pour $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, déterminer la probabilité conditionnelle de $(X = k)$ sachant que $(Z = n)$.
4. Pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, déterminer $\mathbb{P}(X = k \cap Z = n)$.
5. Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$.
6. Montrer pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leq k \leq n \leq N$:
$$\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}.$$
7. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, en déduire $\mathbb{P}(X = k)$.
8. Déterminer la loi de X.

Correction. — 1. On appelle succès l'évènement «obtenir un 6». La variable aléatoire Z qui compte le ombre de succès en N lancers suit une loi binomiale de paramètre $(N, 1/6)$: $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(N, 1/6)$.

2. On a

$$E(Z) = \frac{N}{6} \text{ et } V(Z) = \frac{3N}{36}$$

3. Le nombre X de piles obtenus suit une loi $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Comme on ne peut pas obtenir plus de 6 que le nombre de lancers effectués, on a

$$\mathbb{P}_{(Z=n)}(X=k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \in [\![0,n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. On a

$$\mathbb{P}(X=k \cap Z=n) = \mathbb{P}(Z=n)\, \mathbb{P}_{(Z=n)}(X=k)$$

D'où :

- si $0 \leq k \leq n \leq N$,

$$\mathbb{P}(X=k \cap Z=n) = \binom{N}{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- si $n > N$ alors $Z = n$ est impossible de même si $k > n$, $(X = k \cap Z = n)$ est impossible donc la probabilité est nulle.

5. $(Z=n)_{n\in[\![0,N]\!]}$ est un système complet d'évènements de probabilités non nulles. D'après la formule des probabilités totales appliquées à ce système complet d'évènements, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=0) &= \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(Z=n)\, \mathbb{P}_{(Z=n)}(X=0) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n \\
&= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1-p}{6}\right)^n \\
&= \left(\frac{1-p}{6} + \frac{5}{6}\right) \\
&= \left(1 - \frac{p}{6}\right)^N
\end{aligned}$$

6. On a :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, \frac{N!}{n!\,(N-n)!} &= \frac{N!}{k!\,(n-k)!\,(N-n)!} \\
&= \frac{N!}{k!\,(N-k)!}\, \frac{(N-k)!}{(n-k)!\,(N-k-(n-k))!} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}
\end{aligned}$$

7. $(Z=n)_{n\in[\![0,N]\!]}$ est un système complet d'évènements de probabilités non nulles. D'après la formule des probabilités totales appliquées à ce système complet d'évènements, il vient :

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(Z=n) \cdot \mathbb{P}_{(Z=n)}(X=k).$$

Comme la valeur de $\mathbb{P}_{(Z=n)}(X=k)$ dépend de $n \geq k$ ou $n < k$, on utilise la relation de Chasles.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \underbrace{\sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}(Z=n)\,\mathbb{P}_{(Z=n)}(X=k)}_{n<k} + \underbrace{\sum_{n=k}^{N} \mathbb{P}(Z=n)\,\mathbb{P}_{(Z=n)}(X=k)}_{n\geq k} \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} 0 + \sum_{n=k}^{N} \binom{N}{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{n=k}^{N} \binom{N}{n} \binom{n}{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^{n} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{n=k}^{N} \binom{N}{k} \binom{N-k}{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^{n} p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

D'où en posant $i = n-k$

$$\mathbb{P}(X=k) = p^k \binom{N}{k} \sum_{i=0}^{N-k} \binom{N-k}{i} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-i-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{i+k} (1-p)^i$$

On regroupe les puissances en faisant apparaître $N-k-i$ et i

$$\begin{aligned}
&= p^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \binom{N}{k} \sum_{i=0}^{N-k} \binom{N-k}{i} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k-i} \left(\frac{1-p}{6}\right)^{i} \\
&= \binom{N}{k} \left(\frac{p}{6}\right)^k \left(\frac{5+1-p}{6}\right)^{N-k} \\
&= \binom{N}{k} \left(\frac{p}{6}\right)^k \left(1-\frac{p}{6}\right)^{N-k}
\end{aligned}$$

8. On reconnait bien ici une loi binomiale de paramètres $(N, p/6)$.

Questions supplémentaires :

1. *Soit Y le nombre de faces obtenues. Déterminer la loi de Y.*
   En inversant les rôles de pile et de face on obtient de même que Y suit une loi binomiale de paramètres $(N, q/6)$ où $q = 1-p$.
2. *X et Y sont elles indépendantes ?*
   $\mathbb{P}((X=N) \cap (Y=N)) = 0$ car $(X=N) \cap (Y=N)$ est un évènement impossible (on aurait $2N$ lancers). Or $\mathbb{P}(X=N) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y=N) \neq 0$. Donc $\mathbb{P}((X=N) \cap (Y=N)) \neq \mathbb{P}(X=N)\,\mathbb{P}(Y=N)$ et X et Y ne sont pas indépendantes.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 5 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux espaces vectoriels supplémentaires de E. On considère p la projection sur F de direction G. On définit s par

$$s = 2p - \mathrm{id} \quad \text{où id est l'application identité de } E.$$

1. Montrer que s est une application linéaire de E vers E.
2. Montrer que $s^2 = \mathrm{id}$.
3. Montrer que s est une application linéaire bijective de E vers E.
4. En déduire $\mathrm{Ker}(s)$ et $\mathrm{Im}(s)$.
5. Montrer que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$ sont supplémentaires dans E.

Correction. — 1. Soient $(x,y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$s(\lambda x+y) = (2p-\mathrm{id})(\lambda x+y) = 2p(\lambda x+y)-(\lambda x+y) = 2\lambda p(x)-p(y)-\lambda x-y = \lambda s(x)+s(y)$$

Donc s est une application linéaire. De plus $p : E \to E$ et $\mathrm{id} : E \to E$ donc s est une application linéaire de E vers E.

2. Soit $x \in E$,

$$\begin{aligned} s^2(x) = s(2p(x)-x) = 2s(p(x)) - s(x) = 2[2p^2(x) - p(x)] - 2p(x) + x \\ = 2[2p(x) - p(x)] - 2p(x) + x = x \end{aligned}$$

Donc $s^2 = \mathrm{id}$.

3. On a $s^2 = s \circ s = \mathrm{id}$ donc s est bijective de E vers E et $s^{-1} = s$.

4. Comme s est bijective $\mathrm{Ker}(s) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}(s) = E$.

5. Soit $x \in \mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}) \cap \mathrm{Ker}(s+\mathrm{id})$ alors $s(x) = x$ et $s(x) = -x$. D'où $x = -x$ et $x = 0$.

   On va montrer que $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}) = G$: soit $x \in \mathrm{Ker}(s+\mathrm{id})$ on a $s(x) = -x$. Comme $E = F \oplus G$, il existe $(x_F, x_G) \in F \times G$, tel que $x = x_F + x_G$. On a alors

$$-x = -x_F - x_G = s(x) = s(x_F+x_G) = 2p(x_F+x_G) - x_F - x_G = 2x_F - x_F - x_G = x_F - x_G$$

donc $x_F = 0$ et $x = x_G$. Donc $x \in G$ et $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}) = G$.

   De même $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}) = F$: soit $x \in \mathrm{Ker}(s-\mathrm{id})$ on a $s(x) = x$. On a alors

$$x = x_F + x_G = s(x) = s(x_F + x_G) = 2p(x_F + x_G) - x_F - x_G = 2x_F - x_F - x_G = x_F - x_G$$

donc $x_G = 0$ et $x = x_F$. Donc $x \in F$ et $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}) = F$.

   Donc $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id})$ sont supplémentaires.

   Autre méthode : $s^2 = 1$ donc X^2-1 est un polynôme annulateur de s. En conséquence $\mathrm{Sp}(s) = \{-1, 1\}$ et s est diagonalisable. Par théorème ceci est équivalent au fait que les espaces propres associés à -1 et 1 sont supplémentaires.

Toulouse School of Economics

CONCOURS BLSES 2024

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 6 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — On considère l'application

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, x+3y) \, . \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer A, la représentation matricielle de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que 2 est valeur propre de A.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ?
5. Soit $\mathcal{F} := \{(-1,1),(1,0)\}$. Déterminer T, la représentation matricielle de f relativement à la base $\mathcal{F}$.
6. Soit P la représentation matricielle de $\mathcal{F}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Calculer P^{-1}.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer T^n en fonction de n.
8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire A^n en fonction de n.
9. Déterminer $f^{10}(1,1)$.

Correction. — 1. f est isomorphe à $X \mapsto AX$ où

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

qui est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2. On a
$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. On a
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - 2I) \Leftrightarrow x = -y$$
Donc $\{(1, -1)\}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

4. On calcule $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^2$. Donc la seule valeur propre est 2. Donc si A était diagonalisable on aurait $A = P(2I)P^{-1} = 2I$. Donc A n'est pas diagonalisable.

5. On a
$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6. On a
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7. On pose
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On a $T = 2I + N$. $2I$ et N commutent, donc d'après la formule du binôme de Newton on a
$$T^n = (2I + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I)^{n-k} N^k = 2^n I + 2^{n-1} n N = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

8. On a
$$A^n = PT^nP^{-1} = 2^{n-1}PTP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n - n2^{n-1} & -n2^{n-1} \\ n2^{n-1} & 2^n + n2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

9. On calcule
$$A^{(10)} = \begin{pmatrix} 2^{10} - 10.2^9 & -10.2^9 \\ 10.2^9 & 2^{10} + 10.2^9 \end{pmatrix} = 2^{10} \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$
D'où
$$A^{(10)}(1,1) = 2^{10} \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^{10} \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

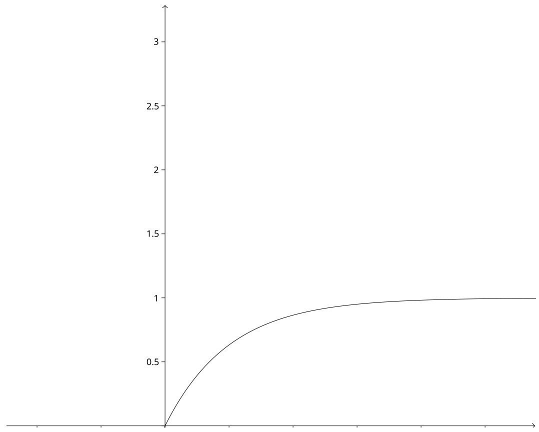
- Planche n$^\text{o}$ 6 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 2.

On pose $Y := e^X$.

1. Déterminer et tracer la fonction de répartition de X.
2. Calculer et tracer la fonction de répartition de Y.
3. Montrer que Y est à densité et déterminer une densité de Y.
4. Calculer $\mathbb{P}(Y = 1)$.
5. Calculer $\mathbb{P}(Y \leq 1/2)$.
6. Calculer $\mathbb{P}(2 \leq Y \leq 5)$.
7. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

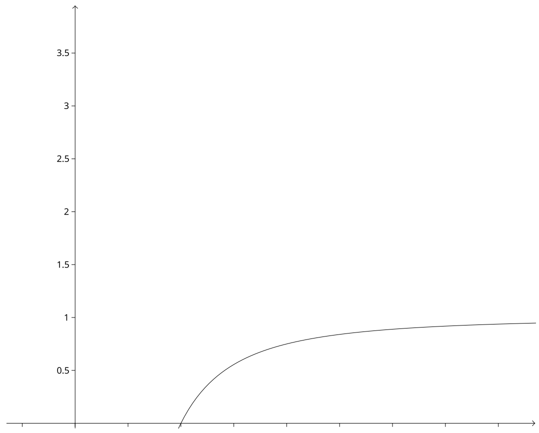
Correction. — 1. On a $F_X(x) = (1 - e^{-2x})\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$. Sa représentation graphique est



2. On a

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(e^X \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \ln(y)) = F_X(\ln(y)) = \left(1 - \frac{1}{y^2}\right)\mathbb{1}_{(1,+\infty)}(y)$$

Sa représentation graphique est



3. F_Y est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ donc Y est à densité. De plus la loi de densité est donnée par

$$f_Y(y) = \frac{2}{y^3}\mathbb{1}_{(1,+\infty)}(y)$$

4. On a $\mathbb{P}(Y = 1) = 0$.
5. On a $\mathbb{P}(Y \leq 1/2) = 0$.
6. On a

$$\mathbb{P}(2 \leq Y \leq 5) = F_Y(5) - F_Y(2) = \frac{24}{25} - \frac{3}{4} = \frac{21}{100}$$

7. On a

$$E(Y) = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{2}{y^2} \mathrm{d}y = 2$$

Toulouse School of Economics

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 7 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — On note $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes réels et pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_k[x]$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à k.

On considère n points du plan notés $M_i = (a_i, b_i)$, pour $i \in [\![1;n]\!]$. Pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, on considère que

$$i \neq j \quad \Rightarrow \quad a_i \neq a_j \ .$$

On dit qu'un polynôme $p \in \mathbb{R}[x]$ est un *polynôme d'interpolation* des points $(M_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ si pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on a $p(a_i) = b_i$.

On définit les n polynômes de Lagrange $(L_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad L_k(x) = \prod_{i\in[[1,n]]\setminus\{k\}} \frac{x - a_i}{a_k - a_i} \ .$$

1. (a) Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, calculer $L_k(a_k)$.
   (b) Pour tout $(k,j) \in [\![1;n]\!]^2$, calculer $L_k(a_j)$ pour $k \neq j$.
   (c) Soit $(b_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$. Montrer que $\sum_{k=1}^n b_k\, L_k$ est un polynôme d'interpolation des points $(M_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$.
2. On considère l'application

$$\varphi : \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{n-1}[x] & \to & \mathbb{R}^n \\ p & \mapsto & (p(a_i))_{i\in[\![1;n]\!]} \end{array} \ .$$

   (a) Montrer que φ est une application linéaire.
   (b) Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, calculer $\varphi(L_k)$.
   (c) Soit $\mathcal{L} = (L_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$. Montrer que $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
   (d) Déterminer la représentation matricielle de φ relativement à la base $\mathcal{L}$ et à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   (e) En déduire que φ est une bijection de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ dans $\mathbb{R}^n$.
   (f) Interpréter ce résultat en terme de polynôme d'interpolation.
   (g) Dans le cas $n = 3$. Déterminer G, la représentation matricielle de φ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[x]$ et $\mathbb{R}^3$.
   (h) La matrice G est-elle inversible ?

Correction. — 1. (a) On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad L_k(a_k) = \prod_{i\in[[1,n]]\setminus\{k\}} \frac{a_k - a_i}{a_k - a_i} = 1 \ .$$

(b) Pour $k \neq j$, on

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad L_k(a_j) = \prod_{i\in[[1,n]]\setminus\{k\}} \frac{a_j - a_i}{a_k - a_i} = 0 \ .$$

Car le terme $i = j$ du produit est nul.

(c) D'après les questions précédentes

$$p(a_i) = \sum_{k=1}^{n} b_k \, L_k(a_i) = b_i \ .$$

Donc p est un polynôme d'interpolation des points $(M_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$.

2. (a) Par la structure vectorielles de l'ensemble des applications et de $\mathbb{R}^n$ on a évidemement pour $(p, q) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(p + \lambda q) = \varphi(p) + \lambda\varphi(q) \ .$$

(b) Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\varphi(L_k) = (L_k(a_i))_{i\in[\![1;n]\!]}$. D'après les questions précédentes, $L_k(a_i)$ vaut 1 si $i = k$ et 0 sinon. $\varphi(L_k)$ représente donc le k-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(c) Montrons que cette famille est libre : soit $(\alpha_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, L_k = 0 \ .$$

On a pour tout $i \in [\![1; n]\!]$

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, L_k(a_i) = \alpha_i \ .$$

Donc la famille $\mathcal{L}$ est une famille libre de $n - 1$ éléments de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ donc c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

(d) D'après question 2(b), la représentation matricielle de φ relativement à la base $\mathcal{L}$ et à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est I_n.

(e) Comme la représentatin matricielle de φ relativement à la base $\mathcal{L}$ et à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est inversible, φ est une bijection de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ dans $\mathbb{R}^n$.

(f) Quand on prend un nuage de n points d'abscisses distincts, il existe un unique polynôme d'interpolation parmi les polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

(g) La première colonne est la matrice de $\varphi(1)$, la deuxième $\varphi(X)$, la troisième $\varphi(X^2)$, d'où

$$G = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} \ .$$

(h) G est inversible car c'est une matrice représentant φ qui est bijective.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 7 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Pour tout $(\alpha, \beta, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$, calculer

$$\int_{\alpha}^{\beta} (t-\alpha)^n (t-\beta)^n \mathrm{d}t.$$

Correction. — Pour $(\alpha, \beta, n, m) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^2$, on pose

$$I_{m,n} := \int_\alpha^\beta (t-\alpha)^m (t-\beta)^n \mathrm{d}t.$$

On intègre par parties pour obtenir une relation entre $I_{m,n}$ et $I_{m-1,n+1}$:

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \left[(t-\alpha)^m \frac{(t-\beta)^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^\beta - \frac{m}{n+1}\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^{m-1}(t-\beta)^{n+1}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{m}{n+1} I_{m-1,n+1}. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$I_{0,p} = \int_\alpha^\beta (t-\beta)^p dt = -\frac{(\alpha-\beta)^{p+1}}{p+1}.$$

Une récurrence immédiate donne alors

$$I_{m,n} = (-1)^{m+1} \frac{m(m-1)\dots 1}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)} \frac{(\alpha-\beta)^{m+n+1}}{m+n+1}.$$

En particulier, l'intégrale recherché vaut $I_{n,n}$, c'est-à-dire

$$I_{n,n} = (-1)^{n+1} \frac{n!}{(n+1)\dots(2n)} \frac{(\alpha-\beta)^{2n+1}}{2n+1} = (-1)^{n+1} \frac{(\alpha-\beta)^{2n+1}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}.$$

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 8 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — On considère trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la relation de récurrence

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 2x_n - y_n + 2z_n \\ y_{n+1} &= 3x_n - 2y_n + 4z_n \\ z_{n+1} &= 2x_n - 2y_n + 3z_n \end{cases}$$

les réels x_0, y_0 et z_0 étant donnés.

1. Écrire le système sous forme matricielle $V_{n+1} = AV_n$ où
$$V_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$
2. Déterminer l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ est A.
3. Montrer que $V_n = A^n V_0$, pour tout $n \geq 1$.
4. On considère la famille $\mathcal{E} := \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,0)\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer M, la représentation matricielle de f dans la base $\mathcal{E}$.
6. Pour tout $n \geq 1$, calculer M^n.
7. En déduire A^n, pour tout $n \geq 1$.
8. Pour tout $n \geq 1$, exprimer x_n, y_n et z_n en fonction de n, x_0, y_0 et z_0.

Correction. — 1.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x - y + 2z \\ 3x - 2y + 4z \\ 2x - 2y + 3z \end{pmatrix} \end{array}$$

3. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : «$V_n = A^n V_0$».

   $\mathcal{P}(1)$ est vraie

   Supposons $\mathcal{P}$ vraie à un certain rang n. Alors
   $$V_{n+1} = Av_n = AA^nV_0 = A^{n+1}V_0$$
   Donc $\mathcal{P}$ est héréditaire et $\mathcal{P}$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

4. On considère la matrice associée à la famille :
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   Sa réduite de Gauss est
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   qui a 3 pivots non-nuls. La famille est donc une famille de 3 vecteurs qui forme une famille libre de $\mathbb{R}^3$ elle est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

5. On a
   $$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Soit
   $$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   On a $M = I + N$. On calcule
   $$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Et pour tout $k \geq 3$, $N^k = 0$.

   Les matrices I et N communtent. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton : pour tout $n \geq 1$,
   $$M^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. On a $M = P^{-1}AP$ avec

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

On calcule

$$A^n = \begin{pmatrix} 1+n^2 & -n^2 & n+n^2 \\ 2n+n^2 & 1-2n-n^2 & 3n+n^2 \\ 2n & -2n & 2n+1 \end{pmatrix} .$$

8. On a donc

$$\begin{cases} x_n = (1+n^2)x_0 - n^2 y_0 + (n+n^2)z_0 \\ y_n = (2n+n^2)x_0 + (1-2n-n^2)y_0 + (3n+n^2)z_0 \\ z_n = 2n\,x_0 - 2n\,y_0 + (2n+1)z_0 \end{cases}$$

Toulouse School of Economics

Concours BLSES 2024

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 8 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — On effectue des tirages successifs dans une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire et :
- Si on pioche une boule noire on s'arrête.
- Si on tire une boule blanche, on double le nombre de boules blanches et on continue.

Soit A_n l'événement : «après n tirages, la boule noire n'a jamais été tirée».

1. Si la boule noire n'est pas tirée lors des n premiers tirages, quelle est la composition de l'urne pour le prochain tirage ?
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(A_{n+1}) = \frac{2^n}{2^n+1}\,\mathbb{P}(A_n)\ .$$
3. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n := -\ln(\mathbb{P}(A_n))$. Déduire de la question précédente que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\ .$$
4. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(1+x) \leq x$.
   (b) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - v_1 \leq 1 - \frac{1}{2^n}\ .$$
   (c) Justifier que $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers un réel l.
5. En déduire que $(\mathbb{P}(A_n))_{n\geq 1}$ converge vers un réel strictement positif.

Correction. — 1. Une boule noire et 2^n boules blanches.

2. On a
$$\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{2^n}{2^n+1} .$$
Par la formule des probabilités composées donne
$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\ \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})$$
car $A_{n+1} \subset A_n$.

3. On a
$$v_{n+1} = -\ln(u_{n+1}) = -\ln\left(u_n \cdot \frac{2^n}{2^n+1}\right) = -\ln(u_n) + \ln\left(\frac{2^n+1}{2^n}\right) = v_n + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

4. (a) Soit
$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x - \ln(1+x) \end{array}$$
On a
$$\begin{array}{cccc} f': & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} . \end{array}$$
Donc f' est positive et f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or $f(0) = 0$ donc f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui assure le résultat.

(b) On applique l'inégalité de la question précédente à $x = 1/2^k$, on a
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad v_{k+1} - v_k \leq \frac{1}{2^k} .$$
En sommant on obtient :
$$\sum_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \quad \Leftrightarrow \quad v_{n+1} - v_1 \leq \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

(c) La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante, car
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) > 0 .$$
La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est aussi majorée par $1 + v_1$ d'après l'inégalité précédente. Donc $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers un réel ℓ d'après le théorème de convergence monotone.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(A_n) = \mathrm{e}^{-v_n}$. D'où, par composition, $(\mathbb{P}(A_n))_{n\geq 1}$ converge vers $\mathrm{e}^{-\ell}$.

Question subsidiaire : Quelle est la probabilité que la boule noire soit tirée ?
L'événement : «la boule noire est tirée», est le contraire de «la boule noire n'est jamais tirée». Or l'événement «la boule noire n'est jamais tirée» est égal à
$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n .$$
Or, comme $(A_n)_n$ est une suite décroissante d'événements, le théorème de la limite monotone donne
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} u_n = \mathrm{e}^{-\ell} .$$
La probabilité que la boule noire soit tiréecherchée vaut $1 - \mathrm{e}^{-\ell}$.

Toulouse School of Economics

Concours BLSES 2024

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 9 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — On vous propose de jouer à un jeu dont le gain à chaque partie suit une loi uniforme à densité sur $[0,1]$. On peut jouer jusqu'à deux parties que l'on suppose dans ce cas indépendantes. On note X_1 et X_2 les gains respectifs de chacune des deux parties.

1. Donner les fonctions de répartition F_{X_1} et F_{X_2} des variables X_1 et X_2.
2. Dans cette question vous devez jouer deux parties et votre gain final Y est le plus grand des gains de ces deux parties.
   (a) Exprimer Y en fonction de X_1 et X_2.
   (b) Déterminer la fonction de répartition de Y.
   (c) Montrer que Y est admet une densité et déterminer une densité de Y
   (d) Déterminer l'espérance de Y.
3. Dans cette question, on suppose que vous avez le droit de jouer deux parties, et votre gain final Z est le gain de la dernière partie jouée. Vous décidez alors de la stratégie suivante : Vous fixez un seuil $\alpha \in]0,1[$ et
   - si le gain de la première partie est au moins égal à α alors vous arrêtez le jeu après cette première partie,
   - sinon vous jouez une seconde partie.

   (a) Montrer que si $x < \alpha$ alors la fonction de répartition F_Z de Z satisfait :
   $$F_Z(x) = F_{X_1}(\alpha)\, F_{X_2}(x)\ .$$
   (b) Montrer que si $x \geq \alpha$ alors :
   $$F_Z(x) = F_{X_1}(\alpha)\, F_{X_2}(x) + F_{X_1}(x) - F_{X_1}(\alpha)\ .$$
   (c) Déterminer F_Z.
   (d) Montrer que Z est admet une densité et déterminer une densité de Z.
   (e) Déterminer l'espérance de Z.

Correction. — 1. On a évidemment

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x) = \mathbb{P}(X_2 \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2. (a) $Y = \max\{Y_1, Y_2\}$.

(b) On a par indépendance

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leq x) &= \mathbb{P}((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x)) = \mathbb{P}(X_1 \leq x)\,\mathbb{P}(X_2 \leq x) = F_{X_1}(x)\,F_{X_2}(x) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}\end{aligned}$$

(c) F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf évntuellement en 0 et en 1. Or

$$\lim_{y \to O^+} F_Y(y) = 0 = F_Y(0) \quad \text{et} \quad \lim_{y \to 1^-} F_Y(y) = 1 = F_Y(1)$$

Donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.

Déterminons une densité de Y : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,

$$f_Y(y) := F_Y'(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 2y & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

On peut poser $f_Y(0) = 0$ et $f_Y(1) = 2$. Une densité de Y est ainsi donnée par

$$f_Y(y) = 2y\mathbb{1}_{[0,1]}(y) .$$

(d) On calcule

$$\int_{\mathbb{R}} y\, f_Y(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 y\, 2y\, \mathrm{d}y = \frac{2}{3}$$

donc Y admet une espérance et cette espérance est égale à $2/3$.

3. (a) Si $x < \alpha$ cela signifie que $(X_1 < \alpha)$ et $(X_2 \leq x)$. On a donc par indépendance

$$F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}((X_1 < \alpha) \cap (X_2 \leq x)) = \mathbb{P}(X_1 < \alpha)\,\mathbb{P}(X_2 \leq x) = F_{X_1}(\alpha)\,F_{X_2}(x) .$$

Ce qui est le résultat attendu.

(b) Si $x > \alpha$ cela signifie $\alpha \leq X_1 \leq x$ ou $(X_1 < \alpha$ et $X_2 \leq x)$. On a donc par indépendance

$$\begin{aligned}F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq x) &= \mathbb{P}(\alpha \leq X_1 \leq x) \cup ((X_1 < \alpha) \cap (X_2 \leq x)) \\ &= \mathbb{P}(\alpha \leq X_1 \leq x) + \mathbb{P}((X_1 < \alpha) \cap (X_2 \leq x)) \\ &= F_{X_1}(x) - F_{X_1}(\alpha) + F_{X_1}(\alpha)\,F_{X_2}(x) .\end{aligned}$$

Ce qui est le résultat attendu.

(c) Si $x < \alpha$, comme X_1 suit une loi uniforme on a

$$F_Z(x) = F_{X_1}(\alpha)\,F_{X_2}(x) = \alpha\,F_{X_2}(x) = \alpha\, x\mathbb{1}_{x \in [0,\alpha[}(x) .$$

Si $x \geq \alpha$, comme X_1 et X_2 suivent une loi uniforme on a

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= F_{X_1}(x) - F_{X_1}(\alpha) + F_{X_1}(\alpha)\, F_{X_2}(x) = F_{X_1}(x) - \alpha + \alpha\, F_{X_2}(x) \\ &= \begin{cases} (\alpha+1)x - \alpha & \text{si } \alpha \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement on a

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \alpha\, x & \text{si } 0 \leq x < \alpha \\ (\alpha+1)x - \alpha & \text{si } \alpha \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(d) Évidemment F_Z est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 0, α et 1. De plus on a

$$\lim_{x\to 0^-} F_Z(x) = 0 = F_Z(0) \quad , \quad \lim_{x\to\alpha^-} F_Z(x) = F_Z(\alpha) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} F_Z(x) = F_Z(1)$$

donc F_Z est continue sur $\mathbb{R}$. Donc Z admet une densité.

De plus,

$$f_Z(x) = F_Z'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ \alpha & \text{si } 0 < x < \alpha \\ \alpha+1 & \text{si } \alpha < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En posant $f_Z(0) = \alpha$, $f_Z(\alpha) = \alpha$ et $f_Z(1) = \alpha + 1$ on obtient

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ \alpha & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha \\ \alpha+1 & \text{si } \alpha < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(e) On a

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, f_Z(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 x\, f_Z(x)\, \mathrm{d}x$$

donc l'intégrale est définie. De plus, on calcule

$$E(Z) = \frac{1}{2}(-\alpha^2 + \alpha + 1)\ .$$

Question supplémentaire : Pour quelle valeur de α cette deuxième stratégie est-elle optimale ?

Toulouse School of Economics

Concours BLSES 2024

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 9 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, calculer

$$I_{n,p} := \int_0^1 x^n (\ln x)^p \mathrm{d}x \ .$$

Correction. — Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, l'application $x \mapsto x^n(\ln x)^p$ est définie et continue sur $]0,1]$. Comme $n \geq 1$, les théorèmes de comparaison usuels entraînent que cette fonction se prolonge par continuité en 0. Ceci justifie l'existence de $I_{n,p}$.

On remarque que

$$I_{n,0} = \frac{1}{n+1} \ .$$

On définit pour $a > 0$:

$$I_{n,p}(a) = \int_a^1 x^n(\ln x)^p \mathrm{d}x$$

Par intégration par parties on a

$$I_{n,p}(a) = \frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}(\ln x)^p\right]_a^1 - \frac{p}{n+1}\int_a^1 x^n(\ln x)^{p-1}dx = \frac{-a^{n+1}(\ln a)^p}{n+1} - \frac{p}{n+1}I_{n,p-1}.$$

On passe à la limite en faisant tendre a vers 0 :

$$I_{n,p} = -\frac{p}{n+1}I_{n,p-1}.$$

Finalement,

$$I_{n,p} = \frac{(-p)\times(-(p-1))\times\cdots\times(-1)}{(n+1)\times(n+1)\times\cdots\times(n+1)}I_{n,0} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^p}\frac{1}{n+1} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}.$$

Concours BLSES 2024

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 10 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x.$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

5. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. En faisant une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+1)\,u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{3/2}}\mathrm{d}x\ .$$

7. Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\ .$$

8. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$u_n = \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\ .$$

Correction. — 1. Pour tout n, la fonction
$$x \mapsto \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}$$
est continue sur $[0,1]$ car $1+x>0$. Donc l'intégrale est bien définie.

2. Pour tout n, la fonction
$$x \mapsto \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}$$
est positive sur $[0,1]$ donc l'intégrale est positive ou nulle.

3. Comme $x \in [0,1]$, on a $x^{n+1} \leq x^n$. En divisant par $\sqrt{1+x}>0$ et en intégrant on obtient
$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x = u_{n+1}\ .$$
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4. Comme $x \in [0,1]$, on a $1 \leq \sqrt{1+x} \leq \sqrt{2}$. D'où par décroissance de la fonction inverse
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq 1$$
Ainsi
$$\frac{x^n}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} \leq x^n$$
En intégrant on obtient
$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\mathrm{d}x$$
ce qui donne le résultat annoncé.

5. Par le théorème d'encadrement on obtient que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

6. Par intégration par parties on a
$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2(n+1)}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{3/2}}\mathrm{d}x + \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)\sqrt{1+x}}\right]_0^1\ .$$
D'où
$$u_n = \frac{1}{2(n+1)}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{3/2}}\mathrm{d}x + \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}}\ .$$
On obtient le résultat annoncé en multipliant par $n+1$.

7. Comme précédemment on a, pour tout $x \in [0,1]$,
$$\frac{1}{2^{3/2}} \leq \frac{1}{(1+x)^{3/2}} \leq 1$$
D'où
$$\frac{x^{n+1}}{2^{3/2}} \leq \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{3/2}} \leq x^{n+1}$$
et
$$\frac{1}{2^{3/2}}\frac{1}{n+2} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{3/2}}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n+2}\ .$$
On en déduit que cette intégrale converge vers 0 lorsque n tend vers ∞.

8. On a
$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\,u_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
d'où
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\ .$$

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 10 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille 2.

1. Montrer que la famille $\{I_2, A, A^2, A^3, A^4\}$ est liée.
2. Peut-on toujours extraire une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la famille $\{I_2, A, A^2, A^3, A^4\}$?
3. Montrer que si $I_2 \in \mathrm{Vect}(A, A^2, A^3, A^4)$, alors A est inversible.
4. Soit A non inversible. Peut-on affirmer que $I_2 \notin \mathrm{Vect}(A, A^2, A^3, A^4)$?
5. On suppose ici $I_2 \notin \mathrm{Vect}(A, A^2, A^3, A^4)$.
   (a) Justifier que la famille $\{A, A^2, A^3, A^4\}$ est liée.
   (b) En déduire que A n'est pas inversible.

Correction. — 1. Le cardinal de la famille est strictement supérieur à la dimension de l'espace vectoriel : la famille est donc liée.

2. Non, par exemple lorsque $I_2 = A$. On peut aussi penser aux symétries, aux rotations d'angle $\pi/4$ etc.

3. Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $I_2 = aA + bA^2 + cA^3 + dA^4$. Par conséquent, $I_2 = A(aI_2 + bA + cA^2 + dA^3)$. D'où A inversible, d'inverse $aI_2 + bA + cA^2 + dA^3$.

4. Cette question est la contraposée de la question précédente. Elle est donc vraie.

5. (a) Puisque $I_2 \notin \mathrm{Vect}(A, A^2, A^3, A^4)$, le rang de la famille $\{A, A^2, A^3, A^4\}$ est inférieur ou égal à 3. Autrement dit, la famille est liée.

   (b) Supposons A inversible. Comme la famille $\{A, A^2, A^3, A^4\}$ est liée, il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4/\{(0, 0, 0, 0)\}$ tel que $aA+bA^2+cA^3+dA^4 = 0$. On a donc $A(aI_2+bA+cA^2+dA^3) = 0$. En multipliant à gauche par A^{-1}, il vient $aI_2+bA+cA^2+dA^3 = 0$. a est nécessairement nul, sans quoi on aurait $I_2 \in \mathrm{Vect}(A, A^2, A^3, A^4)$. Il vient $bA+cA^2+dA^3 = 0$. En réitérant, (ou en appliquant la même méthode) on obtient $b = 0$, puis $c = 0$ et enfin $d = 0$ ou une absurdité. On a ainsi montré par l'absurde que A n'est pas inversible.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 11 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Pour tout entier $n \geq 3$, on pose

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - n \ln x \, . \end{array}$$

1. Soit $n \geq 3$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1, 2[$. On appelle a_n cette solution.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.
3. Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 3}$ converge et déterminer sa limite.
4. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de
$$\varphi : t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{1+t} \, .$$
5. On admet que la fonction φ admet une réciproque ψ au voisinage de 0 et que ψ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de ψ.
6. En déduire les constantes A, B, C telles que :
$$a_n = A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Correction. — 1. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $[1,2]$. De plus f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in [1,2], \qquad f_n'(x) = \frac{x_n}{x} < 0$$

Donc f est strictement décroissante sur $[1,2]$. De plus $f(1) = 1 > 0$ et $f(2) < 0$. Donc f_n réalise une bijection de $[1,2]$ sur $[f(2), f(1)]$. Comme $0 \in [f(2), f(1)]$, l'équation $f_n(x)+0$ admet une unique solution sur $]1,2[$.

2. On a

$$f_{n+1}(a_n) = a_n - (n+1)\ln(a_n) = a_n - n\ln(a_n) - \ln(a_n) = f_n(a_n) - \ln(a_n) = -\ln(a_n) < 0$$

Or $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$ et f_{n+1} est décroissante sur $[1,2]$ donc $a_n > a_{n+1}$ et la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

3. Comme $a_n > 1$ et que la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante, la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ converge vers une limite $\ell \in [1,2]$. À la limite on a

$$f_n(a_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(a_n) = \frac{a_n}{n}$$

donc par passage à la limite $\ln(\ell) = 0$, donc $\ell = 1$ car ln est continue. Ainsi la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ converge vers 1.

4. On a
$$\frac{\ln(1+t)}{1+t} = t - \frac{3}{2}t^2 + o(t^2)\ .$$

5. On admet que Ψ admet un DL :

$$\Psi(x) = a + bt + ct^2 + o(t^2)$$

Or $\Psi \circ \varphi = \mathrm{id}$ donc

$$t = \psi(\varphi(t) = a + b\left(t - \frac{3}{2}t^2\right) + c\left(t - \frac{3}{2}t^2\right) + o(t^2)$$

Par identification on a $a = 0$, $b = 1$ et $c = 3/2$. Donc

$$\Psi(x) = t + \frac{3}{2}t^2 + o(t^2)$$

6. On a
$$a_n = n\ln(a_n)$$

Posons $\varepsilon_n = a_n - 1$. On a

$$\frac{\ln(1+\varepsilon_n)}{1+\varepsilon_n} = \frac{1}{N} \Leftrightarrow \varphi(\varepsilon_n) = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \varepsilon_n = \Psi\left(\frac{1}{n}\right)$$

Comme $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ la question précédente implique

$$\Psi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{3}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'où l'on obtient le résultat avec $A = 1$, $B = 1$ et $C = 3/2$.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 11 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — On considère un réel $\alpha > 0$ et une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on ait :

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\alpha}{n}\,\mathbb{P}(X = n-1)\ .$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}(X = n)$ en fonction de α et de $\mathbb{P}(X = 0)$.
2. Déterminer $\mathbb{P}(X = 0)$.
3. Déterminer la loi de X.
4. Déterminer l'espérance et la variance de X.
5. Pour quelle(s) valeur(s) de n la probabilité $\mathbb{P}(X = n)$ est-elle maximale ?

Correction. — 1. Soit la propriété $\mathcal{P}(n)$:

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\alpha^n}{n!}\,\mathbb{P}(X = 0)\ .$$

$\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie au rang n. Alors

$$\mathbb{P}(X = n+1) = \frac{\alpha}{n+1}\,\mathbb{P}(X = n) = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathbb{P}(X = 0)$$

donc la propriété est héréditaire et $\mathcal{P}$ est vraie pour tout $n \geq 1$. $\mathcal{P}$ est aussi vraie au rang 0 donc $\mathcal{P}$ est vraie pour tout entier n.

2. On doit avoir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!}\mathbb{P}(X = 0) = 1$$

or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = \mathrm{e}^{\alpha}$$

donc $\mathbb{P}(X = 0) = \mathrm{e}^{-\alpha}$.

3. X suit une loi de Poisson de paramètre α.
4. On a $E(X) = \alpha$ et $V(X) = \alpha$.
5. On a

$$\frac{\mathbb{P}(X = n+1)}{\mathbb{P}(X = n)} = \frac{\alpha}{n+1}$$

donc $\mathbb{P}(X = n+1) > \mathbb{P}(X = n)$ si et seulement si $n < \alpha - 1$. En conséquence, si α n'est pas entier $\mathbb{P}(X = n)$ atteint son maximum en la partie entière de α. Si α est un entier, $\mathbb{P}(X = n)$ atteint son maximum en $n = \alpha - 1$ et en $n = \alpha$.

Toulouse School of Economics

Concours BLSES 2024

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 12 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x}\exp(-\mathrm{e}^{-x}) \end{array} .$$

1. Établir le tableau de variations de f.
2. En déduire le maximum de f.
3. Montrer que f est une densité.

   On dit qu'une variable X suit la loi de Gumbel de paramètres $(\mu, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\mu, \lambda)$ si X admet pour fonction de répartition la fonction

$$F_{\mu,\lambda} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp\left(-\mathrm{e}^{(\mu-x)/\lambda}\right) \end{array} .$$

4. Montrer que la loi dont la densité est f est une loi de Gumbel. La loi associée est appelée *loi de Gumbel standard.*
5. Soit $(\mu, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, montrer que :

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(\mu, \lambda) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X-\mu}{\lambda} \hookrightarrow \mathcal{G}(0, 1) .$$

6. Montrer que si une variable U suit la loi uniforme sur $]0; 1[$ alors

$$-\ln\left(-\ln(U)\right) \hookrightarrow \mathcal{G}(0, 1) .$$

7. (a) En utilisant le changement de variable $y = -\ln(t)$, montrer la convergence de l'intégrale
$$\int_0^1 -\ln(-\ln(t))\mathrm{d}t .$$
   (b) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(0, 1)$. En déduire que X admet une espérance.

Correction. — 1. On calcule

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\exp(-\mathrm{e}^{-x}) + \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-x}\exp(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-2x}(1-\mathrm{e}^{-x})\exp(-\mathrm{e}^{-x})$$

Donc f croissante sur $]-\infty, 0[$ et décroissante sur $]0, +\infty[$.

2. f a un maximum en 0 égal à $1/\mathrm{e}$.
3. f est continue et positive sur $\mathbb{R}$. On a aussi

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = [\exp(-\mathrm{e}^{-x})]_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

Donc f est une densité.

4. On a $F'_{0,1}(x) = f(x)$ donc la loi de densité f est une loi de Gumbel de paramètres $(0,1)$.
5. Posons

$$Y = \frac{X-\mu}{\lambda}\ .$$

On a $X(\Omega) = \mathbb{R}$ donc $Y(\Omega) = \mathbb{R}$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\lambda} \leq x\right) = \mathbb{P}(X \leq \mu + \lambda x) = F_X(\mu + \lambda x)$$

Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(0,1)$.

6. On pose $V = -\ln(-\ln(U))$. On a $U(\Omega) = [0,1]$ donc $V(\Omega) = \mathbb{R}$. De plus on a

$$F_V(x) = \mathbb{P}(V \leq x) = \mathbb{P}(-\ln(-\ln(U)) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq \exp(-\mathrm{e}^{-x})) = F_{0,1}(x) = \exp(-\mathrm{e}^{-x})$$

car $\exp(-\mathrm{e}^{-x}) \in [0,1]$.

7. (a) L'intégrale est impropre en 0 et en 1. On pose $u = -\ln(t)$ qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$, on obtient

$$\int_0^1 -\ln(-\ln(t))\mathrm{d}t = \int_0^\infty \ln(u)\,\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\ .$$

Au voisinage de 0 : $\ln(u)\,\mathrm{e}^{-u} \sim \ln(u)$ qui est intégrable positive au voisinage de 0. Donc l'intégrale est convergente en 0.
Au voisinage de $+\infty$: $u^2\ln(u)\,\mathrm{e}^{-u} \leq 1$ donc $\ln(u)\,\mathrm{e}^{-u} \leq 1/u^2$ qui est intégrable au voisinage de $+\infty$. L'intégrale est donc convergente au voisinage de $+\infty$.

Donc l'intégrale est convergente.

(b) On pose $V = -\ln(-\ln(U))$. D'après le théorème de transfert X :

$$E(Y) = E(-\ln(-\ln(U))) = \int_{\mathbb{R}} -\ln(-\ln(t))\,f_U(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 -\ln(-\ln(t))\,\mathrm{d}t$$

qui est convergente d'après le question précédente.

Toulouse School of Economics

Concours BLSES 2024

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 12 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccl} [0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0\,. \end{cases} \end{array}$$

On rappelle $0{,}69 < \ln(2) < 0{,}70$.

1. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ à l'origine.
4. Montrer que f admet un unique point en lequel f'' change de signe. On déterminera ce point.
5. Tracer précisément l'allure de la courbe.
6. Résoudre $f(t) = 1$ sur $[0;+\infty[$.

Correction. — 1. f est continue sur $]0;+\infty[$. De plus

$$\lim_{t\to 0^+} t^2 - t\ln(t) = 0 = f(0)\ .$$

Donc f est continue sur $[0;+\infty[$.

2. De plus f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$. Pour tout t de $]0;+\infty[$, on a

$$f'(t) = 2t - \ln(t) - 1\ .$$

Pour tout t de $]0;+\infty[$,

$$f''(t) = 2 - \frac{1}{t}\ .$$

Donc f' est décroissante sur $[0,1/2[$ et croissante sur $]1/2,+\infty[$. Donc elle admet un minimum en $1/2$, qui vaut $\ln(2) > 0$. Donc f est croissante sur $[0,+\infty[$:

x	0	$+\infty$
f'	$+$	
f	0 $\nearrow$	$+\infty$

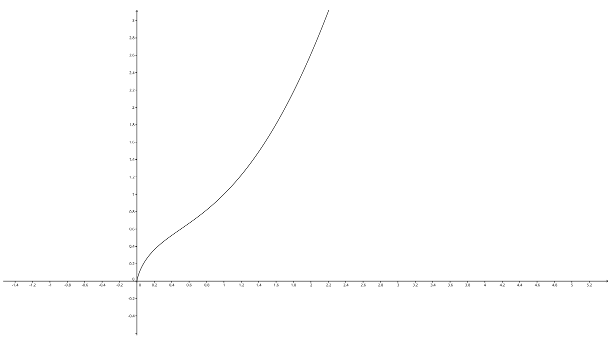
3. Pour tout $t > 0$,

$$\frac{f(t)-f(0)}{t} = t - \ln(t)$$

qui tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers 0. Donc $\mathcal{C}_f$ admet en 0 une (demi)-tangente verticale d'équation $x = 0$.

4. Comme f'' est négative sur $[0,1/2]$ et positive sur $[1/2,+\infty[$ donc f a un unique point d'inflexion en $1/2$.

5. D'après les questions précédentes on a :



La pente en $1/2$ est donnée par $f'(1/2) = \ln(2)$.

6. La fonction f est croissante de $[0,+\infty[$ à valeur dans $[0,+\infty[$, donc il existe une unique solution à $f(t) = 1$. Comme $f(1) = 1$, 1 est l'unique solution.