Concours 2023

Rapport épreuve oral de mathématiques TSE

Adrien Blanchet [1], Mélanie Blazère [2] & Ludovic Garcia [3]

1 Préambule

Par sa présence à la Banque d'épreuves Lettres et Sciences Économiques et Sociales (BLSES), l'École d'Économie de Toulouse (TSE) offre la possibilité à 12 étudiants de Khâgnes B/L d'entrer dans ses parcours en Licence 3 Économie ou en Licence 3 Économie-Mathématiques.

Le programme des classes préparatoires B/L est moins ambitieux que ce qui est enseigné à TSE durant les deux premières années de licence. Cependant, un parcours appliqué de CPGE donne assurément aux étudiants les bases nécessaires à la poursuite d'un parcours brillant à TSE. Cela nécessite de rattraper un peu le léger décalage dans les apprentissages de certaines notions mathématiques, voir Chapitre 5, mais la force de travail acquise pendant les années de classe préparatoire permet à tout étudiant motivé de suivre et de briller dans son parcours à TSE.

Le jury de mathématiques de l'épreuve oral 2023 du concours d'entrée à TSE vous propose un rapport d'expérience et livre ses impressions et ses recommandations. Ce rapport vise à éclairer le lecteur sur les modalités d'examen et les attentes des jurys. Ce rapport n'engage que ses auteurs et en aucun cas l'École d'Économie de Toulouse. En outre l'authenticité et la rigueur des lignes qui vont suivre ne seraient supputées l'être autant qu'une démonstration mathématiques. Sans même parler de l'élégance.

Le bilan global de l'épreuve d'entrée à l'École d'Économie de Toulouse est disponible à l'adresse : `https://www.tse-fr.eu/fr/concoursblses`

En cas de questions sur les oraux de mathématiques (ou pour toute remarque sur ce rapport) ne pas hésiter à écrire au responsable du jury de mathématiques à l'adresse : Adrien.Blanchet@tse-fr.eu.

2 Déroulement de l'épreuve

Les oraux se sont déroulés du 28 juin au 5 juillet 2023 dans les locaux de l'Université Toulouse Capitole dans la très jolie Manufacture des Tabacs dans le centre de Toulouse. L'oral de mathématiques se déroulait dans les amphithéâtres MB3 et MB4. Nous tenons à remercier l'ensemble de l'équipe administrative et tous les étudiants de TSE qui ont participé à l'organisation de cette épreuve avec précision, soucis de bien accueillir et diligence.

1. Toulouse School of Economics, Adrien.Blanchet@tse-fr.eu
2. Lycée Ozenne, Toulouse
3. Lycée Henri IV, Béziers

Les amphithéâtres dans lesquels se déroulaient les épreuves sont grands, pour ne pas rajouter de pression aux candidats les membres du jury ne se plaçaient pas dans l'amphithéâtre mais sur des tables à proximité du candidat. Ces amphithéâtres sont équipés de grands tableaux blancs et des marqueurs noirs, bleus, rouges et verts en bon état de fonctionnement sont fournis aux candidats.

En général deux jurys œuvraient en parallèle.

Chaque jury de mathématiques est constitué de deux professeurs : l'un issu de l'École d'Économie de Toulouse et l'autre de classe préparatoire aux grandes écoles.

Après 30 minutes de préparation sur un problème tiré au sort, le candidat est accompagné dans la salle où se déroule l'oral. Le membre du jury issu de l'École d'Économie de Toulouse, présente rapidement les membres du jury et explique le déroulé de l'épreuve de la façon suivante : "Vous avez préparé pendant 30 minutes un exercice. Vous allez nous présenter au tableau pendant 15 minutes le résultat de vos réflexions. Nous vous recommandons de vous concentrer en premier lieu sur les questions que vous avez sues faire. Dans un deuxième temps vous pourrez revenir sur les questions sur lesquelles vous avez des pistes ou des idées mais qui n'ont pas pu aboutir et le jury vous aidera à avancer. Pour la présentation de vos résultats il n'est pas nécessaire de détailler l'ensemble des calculs, mais juste d'écrire le résultat, et de donner à l'oral les justifications et la démarche qui vous a permis d'y aboutir. Nous vous demandons d'organiser le tableau afin de ne pas avoir à effacer au cours de la résolution de chaque exercice." Après ces 15 minutes, il est dit au candidat : "Merci. Le temps qui était imparti pour le premier exercice est maintenant écoulé. Nous vous demandons de prendre connaissance de ce deuxième exercice que je vous distribue et d'effacer la tableau. Vous aurez 15 minutes pour avancer sur ce deuxième exercice, en partageant éventuellement oralement vos réflexions avec le jury. Nous vous prions d'organiser votre tableau de sorte à n'avoir pas à effacer durant ce deuxième exercice." .

Cette dernière épreuve permet de voir comment le candidat explore une question en temps réel. Dans l'ensemble des deux épreuves le jury aide le candidat à avancer quand il est bloqué et vérifie régulièrement que les concepts sont bien compris, parfois en posant des questions supplémentaires qui ne sont pas sur les planches. Pour départager les quelques excellents candidats, le jury propose parfois des questions qui sortent de la résolution classique des exercices.

L'oral se termine après 30 minutes.

Il a été envisagé de demander au membres du jury de mathématiques d'avoir, pendant les oraux, une expressivité neutre. Il s'avère que les membres du jury de mathématiques sont naturellement souriants et bienveillants, probablement du fait de la joie qu'ils ont à faire des mathématiques. Certains candidats manquent malheureusement de confiance en eux et cherchent l'assentiment des membres du jury, nous sommes trop compatissants pour le leur refuser. Par contre, nous encourageons les candidats à ne pas se baser sur l'attitude des membres du jury pour se faire une idée sur la réussite à cette épreuve.

Le jury de mathématiques est particulièrement attentif aux biais liés au genre, à l'origine ethnique et/ou à l'origine sociale. Le jury essaye d'en être conscient pour l'atténuer. Nous encourageons donc les candidats à se présenter tels qu'ils sont. Certains s'offusquent d'un pull moche, pas un mathématicien. Certains s'agacent d'un manque de confiance, pas notre jury.

3 Bilan

La moyenne des notes à l'épreuve oral de mathématiques 2023 se situe à 13.1/20, la moins bonne note est 4/20 et la meilleure est 20/20.

L'attitude des candidats, dans un oral de concours, est souvent très satisfaisante. C'est un exercice qui est visiblement bien préparé. Les candidats présentent bien leurs résultats, savent aller à l'essentiel lors de rédaction de solutions au tableau et savent, généralement, bien interagir avec le jury. Ce dernier point est cependant encore perfectible, quand trop de candidats, suivent fixement leur idée alors que le jury tentent désespérément de les remettre sur une meilleure piste. Certains faisaient attention à employer un vocabulaire adapté et précis (et même se reprenaient quand c'était imprécis). En probabilité les candidats font preuve d'une certaine dextérité à manipuler les arbres et les calculs pratiques mais manquent parfois de recul théorique et de précision dans l'utilisation du vocabulaire et des résultats.

Si la plupart des candidats écrivent proprement et organisent clairement leur tableau, quelques candidats ont une présentation brouillonne. Rappelons que l'oral évalue aussi trivialement la capacité du candidat à présenter et qu'un exposé peu ordonné influe négativement sur l'évaluation.

Conscients que les suites récurrentes linéaires d'ordre deux ne figurent pas au programme des classes préparatoires B/L, les membres du jury n'ont bien sûr pas sanctionné les candidats qui étaient bloqués sur ces questions. Quand le candidat semblait solide, il était parfois suggéré de poser et étudier le polynôme caractéristique et/ou de déterminer une base de solution. Beaucoup de candidats étaient cependant familiers de ces résultats. De même pour la notion d'équivalence qui était alors vue comme une limite de quotients.

4 Perspectives

Donner plus de poids à la note qualitative L'ensemble des membres du jury de mathématiques souhaite donner plus de poids à la note qualitative par rapport à la note quantitative. Quitte à avoir plusieurs points du type : connaissance du cours, réactivité aux interactions avec le jury, capacité à prendre du recul, etc. La note qualitative est moins sujette aux inévitables hétérogénéités dans les sujets. Nous proposons que ces deux notes quantitative et qualitative rentrent en compte chacune pour moitié de la note (contre 75% pour la note quantitative et 25% pour la note qualitative pour le moment).

Organisation des oraux Le jury de mathématiques s'inquiète de la possibilité de rupture de traitement des candidats du fait de fuite des sujets. Durant l'épreuve 2023, les sujets étaient tirés au sort par le candidat mais certains sujets pouvaient retomber plusieurs fois, voir même d'une semaine sur l'autre. C'est un grand risque de fuite de sujet. L'année prochaine les épreuves du concours devraient être plus concentrées avec deux ou trois oraux de mathématiques sur la même planche sur une même demi-journée. Cela permet en outre aux membres du jury de pouvoir davantage comparer les candidats entre eux afin de mieux harmoniser les notes.

Culture mathématique En plus d'être moins nocif pour la planète, le tableau noir fait partie intégrante de la tradition mathématique. Si l'organisation n'est pas plus difficile pour l'administration, les oraux de mathématiques 2024 se feront sur un grand tableau noir. Soucieux aussi que les candidats ne soient pas juste des bachoteurs, une question de culture générale mathématique sera proposée au candidat. Question qui n'a pas de "bonne" réponse. Ex : que pouvez-vous dire de l'intégrale entre 0 et 1 de $x \mapsto \sin(x)/x$.

5 Annexe

L'étudiant qui entre à TSE sur le concours BL peut choisir d'intégrer la L3 "économie" ou la L3 "économie mathématiques". Nous recensons, ci-dessous, l'ensemble des syllabus des cours qui sont donnés en L1 et L2 dans les licences "économie" et "économie-mathématiques". Nous soulignons à titre indicatif, en bleu, les notions qui ne sont pas, à notre sens, au programme des classes préparatoires B/L. Seules les notions du programme des classes préparatoires B/L sont attendues au concours d'entrée à TSE. Rappelons aussi que conscients du léger décalage entre ce qui est enseigné en classes préparatoires B/L et à TSE, une semaine de remise à niveau est proposée pour les candidats qui intègrent TSE sur concours. Notons enfin que l'immense majorité des étudiants de TSE qui sont issus de ce concours d'entrée réussissent brillamment leurs études à TSE.

5.1 Licence économie

Pour plus d'information sur l'ensemble des cours enseignés voir `https://www.tse-fr.eu/fr/licence-1-licence-2-economie`. Responsable pédagogique 2023–2024 : philippe.alby@tse-fr.eu

Mathématiques 1, L1S1

- Comprendre et maîtriser les outils et le vocabulaire mathématiques de base : quantificateurs universel et existentiel, assertion, négation, conjonction, disjonction, implication.
- Effectuer un raisonnement rigoureux afin de justifier les résultats : démonstration par disjonction de cas, par contraposée, par l'absurde, par équivalence, par récurrence.
- Comprendre les notions de base sur les suites numériques : suite croissante, décroissante, majorée, minorée, convergente, limite d'une suite.
- Déterminer les propriétés élémentaires d'une fonction réelle d'une variable : monotonie, injectivité, surjectivité, bijectivité, continuité, dérivabilité.
- Étude des variations et détermination des optimums d'une fonction réelle d'une variable : tableau de variation, conditions d'optimalité d'ordre 1 et 2.

Mathématiques 2, L1S2

- Calculer une intégrale sur un intervalle fermé-borné du type $[a, b]$ (connaître les primitives des fonctions usuelles, utiliser les techniques d'intégration par partie et de changement de variable, connaître le lien entre l'aire d'un domaine sous la courbe et l'intégrale correspondante).
- Résoudre un système linéaire à l'aide de la méthode des pivots de Gauss.
- Représenter des points / plans / droites dans l'espace.
- Déterminer l'équation d'une droite et d'un plan de l'espace.
- Décrire des domaines du plan ou de l'espace (produit cartésiens d'intervalles, demi-plan, sphères, disques, etc...).
- Résoudre géométriquement un système linéaire à deux ou trois variables.
- comprendre les problèmes d'optimisation des fonctions de deux variables à l'aide d'un graphique (courbes de niveau, etc...).
- Déterminer et interpréter les dérivées partielles d'une fonction de deux variables.
- Rechercher les extrema d'une fonction de deux variables, sans contrainte.

Mathématiques 3, L2S3

- Maîtriser le calcul matriciel.
- Savoir si une matrice est inversible et l'inverser le cas échéant.
- Savoir démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.
- Savoir démontrer qu'une fonction est linéaire, savoir, le cas échéant, réduire une matrice carrée (décomposition LU, diagonalisation).
- Savoir calculer la puissance n d'une matrice carrée.

Probabilités, L2S3

- Probabilités.
  - Espace de probabilité.
  - Dénombrements
  - Probabilités conditionnelles.
- Variables aléatoires.
  - Variables aléatoires discrètes fondamentales.
  - Variables aléatoires continues fondamentales.
  - Transformations de variables aléatoires continues.
- Moments.
  - Espérance et variance.
  - Moments des variables aléatoires fondamentales.
  - Inégalité de Tchebychev.
  - Moments d'un vecteur aléatoire.
- Couples continus.
  - Symétrie et indépendance.
  - Techniques de calculs.

Mathématiques 4, L2S3

- Espace Euclidien.
  - Produit scalaire, orthogonalité et bases.
  - Formes quadratiques en dimension finie.
- Fonctions de plusieurs variables réelles.
  - Limites et continuité.
  - Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$.
  - Problèmes d'extremums.
  - Optimisation sous contraintes d'égalité.

5.2 Licence économie et mathématiques

Pour plus d'information sur l'ensemble des cours enseignés voir `https://www.tse-fr.eu/fr/licence-1-licence-2-economie-et-mathematiques`. Responsables pédagogiques 2023–2024 : benedicte.alziary-chassat@tse-fr.eu, fabien.gensbittel@tse-fr.eu.

Apprentissage des techniques et outils mathématiques, L1S1 :

- Dériver une fonction à une variable réelle.
- Résoudre une équation ou une inéquation avec un paramètre réel.
- Étudier une fonction réelle avec paramètre.
- Utiliser les formules trigonométriques classiques.
- La définition de l'ensemble des nombres complexes.
- Partie réelle, partie imaginaire, conjugué et module d'un nombre complexe.
- Les propriétés fondamentales des nombres complexes.
- La forme trigonométrique et la forme exponentielle d'un nombre complexe.
- La formule d'Euler et la formule de Moivre.
- La racine carré et la racine n-ième d'un nombre complexe.
- Résoudre une équation polynomiale dans l'ensemble des nombres complexes.

Les fondamentaux en mathématiques, L1S1

- Ensembles.
- Relations.

- Les réels et les suites.
- Applications.
- Fonction d'une variable réelle.
- Lois de composition et structures algébriques.

Apprentissage des techniques et outils mathématiques, L1S2
- Définition de l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.
- Effectuer une division euclidienne d'un polynôme par un autre.
- Décomposer un polynôme en produit d'irréductible dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.
- Notion de PGCD de deux polynômes.
- Théorème de Gauss et l'identité de Bézout.
- Définition du déterminant d'une matrice à coefficients réels.
- Calculer le déterminant d'une matrice de taille 2, 3 ou 4.
- Propriétés du déterminant (relation avec l'inversibilité de la matrice).
- Inverser une matrice.

Algèbre linéaire, L1S2
- Théorie des espaces vectoriels.
- Théorie de la dimension.
- Calcul matriciel.
- Applications linéaires.

Fonctions d'une variable réelle, L1S2
- Continuité - Dérivabilté.
- Intégration.
- Formules de Taylor.
- Développements Limités
- Convexité, concavité, recherche d'extremum.
- Etude locale, étude générale d'une fonction, courbe.

Apprentissage des techniques et outils mathématiques pour l'économie, L2S3
- Structures algébriques.
  - Groupes : relation d'équivalence associée à un sous-groupe, homomorphisme de groupes, sous-groupe distingué, groupe quotient.
  - Anneaux : homomorphisme d'anneaux, corps des fractions d'un anneau commutatif unitaire intègre, idéal, anneau quotient.
  - Applications : groupes de matrices, relations de congruence, algorithme RSA.
- Anneaux des polynômes et corps des fractions rationnelles.
  - Anneau des polynômes : construction et propriétés générales, division euclidienne.
  - Anneau des polynômes sur un corps commutatif : PGCD, PPCM, fonctions polynômes, racines, dérivées. Corps des fractions rationnelles : décomposition en éléments simples, fonctions rationnelles.
  - Applications : calcul d'intégrales et de sommes des termes d'une suite.

Fonctions de plusieurs variables, L2S3
- Topologie dans les espaces vectoriels normés de dimension finie.
  Les normes ; équivalence des normes en dimension finie ; les boules ouvertes ; les boules fermées ; les ouverts ; les fermés ; les bornés ; propriétés des ouverts et des fermés ; connexité

des espaces vectoriels normés de dimension finie ; espaces produits ; fermeture et adhérence d'un ensemble ; les suites ; convergence dans les espaces vectoriels normés de dimension finie ; caractérisation séquentielle des fermés ; les compacts ; théorème de Bolzano-Weierstrass : continuité ; continuité séquentielle ; propriétés des fonctions continues.

— Calcul différentiel dans les espaces vectoriels normés de dimension finie.
Applications linéaires en dimension finie ; différentiabilité d'ordre 1 ; dérivées directionnelles ; dérivées partielles ; propriétés des applications différentiables ; matrice jacobienne ; gradient ; applications continûment différentiables ; différentiabilité d'ordre 2 ; matrice hessienne ; théorème de Schwarz ; différentiabilité d'ordre supérieur.

Algèbre approfondie, L2S3

- Diagonalisation.
  - Éléments propres.
  - Critère de dimension.
  - Critère de multiplicité.
  - Applications à la résolution de systèmes linéaires, aux suites linéaires d'ordre supérieur.
- Formes bilinéaires et quadratiques.
  - Dual.
  - Forme bilinéaire.
  - Formes quadratiques.
  - Signe d'une forme quadratique : méthode de réduction en carrés de Gauss.
  - Diagonalisation de formes quadratiques.
- Projection orthogonale dans un espaces Euclidien.
  - Espaces Euclidiens : produit scalaire, inégalités fonctionnelles, base orthonormée, espace orthogonal.
  - Projection orthogonale : expression de la projection orthogonale, expression matricielle de la projection orthogonale, applications à la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel.

Probabilités 1, L2S3

- Théorie de base des probabilités : le langage des évènements, le langage des probabilités.
- Probabilité conditionnelle et indépendance : probabilité conditionnelle, théorème des probabilités totales et théorème de Bayes, évènements indépendants.
- Analyse combinatoire : assemblages ordonnés avec répétition, assemblages ordonnés sans répétition, assemblages non-ordonnés sans répétition, assemblages non-ordonnés avec répétition.
- Variables aléatoires discrètes : loi de probabilité, fonction de répartition, espérance mathématique, variance et écart-type, lois discrètes usuelles, fonctions de variables aléatoires, théorème de changement de variable, théorème de transfert.

Intégrales et Séries, L2S4

- Séries numériques.
- Intégrales impropres.
- Suites et séries de fonctions.

Probabilités 2, L2S4

- Variables aléatoires à densité.
- Fonctions de variables aléatoires.
- Couples de variables aléatoires / Indépendance / Convolution.

— Fonctions génératrices.

Mathématiques pour la finance, L2S4

— Taux d'intérêt simples et composés.
— Définition et exemples de produits dérivés (contrats à terme, futures, options,...)
— Exemples d'utilisation des produits dérivés par différents agents du marché.
— Stratégies d'investissement utilisant les produits dérivés.
— Principe d'arbitrage pour l'évaluation des produits financiers.
— Modèle binomial à une période pour l'évaluation des options.
— Modèle binomial à plusieurs périodes. Exemples de calcul des prix des options européennes et américaines.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 1 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème. — Soient $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel associé. On note $x \perp y$ si x et y sont orthogonaux.

Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda > 0$. On dit que f est une similitude de rapport λ si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$.

1. Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tels que $u + v \perp u - v$. Démontrer que $\|u\| = \|v\|$.
2. Démontrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \lambda^2\langle x, y\rangle$.
3. On dit que f conserve l'orthogonalité si pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^n$, si $x \perp y$, alors $f(x) \perp f(y)$. On souhaite prouver que f est une similitude si et seulement f est non-nulle et conserve l'orthogonalité.
   (a) Prouver le sens direct.
   (b) Réciproquement, on suppose que f est non-nulle et préserve l'orthogonalité. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que, pour tout couple (i, j), $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.
   (c) Conclure.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 1 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice. — Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout entier n, $0 \leq I_n \leq \dfrac{e}{n!}$.
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
4. Montrer que pour tout entier n, $I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$.
5. Montrer que pour tout entier n, $\forall n \geq 0, \quad I_n = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
6. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
7. Quel résultat du cours retrouve t-on ?

Toulouse School of Economics

CONCOURS BLSES 2023

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 2 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème. — On considère $\mathbb{R}_5[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 5. Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{R}_5[X] & \mapsto & \mathbb{R}_5[X] \\ & P & \mapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $(\mathbb{R}_5[X],+,\cdot)$.
2. Donner la représentation matricielle de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_5[X]$.
3. Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(u)$ est égal à l'ensemble des polynômes constants.
4. Déterminer u^2 et u^3.
5. Montrer que u est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$.
6. Déterminer le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(u)$.
7. Montrer que pour tout P dans $\mathbb{R}_5[X]$

$$\sum_{i=0}^{6} (-1)^{6-i} \binom{6}{i} P(X+i) = 0 \ .$$

Toulouse School of Economics

CONCOURS BLSES 2023

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 2 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice. — Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne avec remise, jusqu'à l'obtention d'une boule noire, en ajoutant à chaque tirage une boule blanche supplémentaire.

On note X la variable aléatoire qui vaut 0 lorsqu'on n'obtient jamais la boule noire, et qui vaut le numéro du tirage amenant la boule noire, sinon.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer l'événement $[X = n]$ à l'aide des événements :
   B_k : « on obtient une boule blanche au $k^{\text{ième}}$ tirage ».
3. Montrer que $P(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$.
   Indication : $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.
5. En déduire $P(X = 0)$ et interpréter le résultat.

Toulouse School of Economics

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 3 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème. — Soit $E = \mathbb{R}^4$. On pose

$$G = \operatorname{Vect}\left((1, 2, -3, 1)\right) \quad \text{et} \quad H = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + y - z = 0\}.$$

1. Montrer que G et H sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer une base de G et une base de H. Interpréter géométriquement ces sous-espaces.
3. Déterminer une équation cartésienne de G.
4. Montrer que G et H sont supplémentaires dans E.
5. Déterminer la décomposition du vecteur $(1, 1, 1, 1)$ selon G et H.
6. Considérons $F = \operatorname{Vect}\{(1, 1, 2, 0), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$. Montrer que $H = F$.
7. Montrer que $\{(1, 1, 2, 0), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ est un base orthogonale de H.
8. Déterminer la représentation matricielle dans la base canonique de la projection orthogonale sur H.
9. Calculer la distance de $(1, 0, 1, 0)$ à H.
10. Calculer la distance de $(1, 1, 1, 1)$ à H.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 3 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice. — Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses les interventions ont lieu parfois avec un retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est de $1/4$.

Au cours des années 2022 et 2023 le service de dépannage enregistre une succession d'appels. Le rang du premier appel pour lequel l'intervention s'effectue avec retard en 2022 (resp. 2023) est représenté par une variable aléatoire réelle Y (resp. Z).

1. Déterminer les lois de Y et Z.
2. Montrer que Y et Z admettent une espérance et une variance et la calculer.
3. Calculer $P(Y \leqslant n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. On pose $T = \max(Y, Z)$. Calculer $P(T \leqslant n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. En déduire la loi de T.

Concours BLSES 2023

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 4 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème. — On note $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles ayant 4 lignes et 4 colonnes. Dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté par la matrice A dans la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$.

On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (-1, 1, 0, 1), \quad u_2 = (0, -1, 1, 0), \quad u_3 = (0, 1, 1, 0) \quad u_4 = (1, 0, 0, 1)$$

On note $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ et on admettra que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

1. (a) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) En déduire une matrice P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et une matrice T de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ triangulaire telles que $A = PTP^{-1}$.
2. (a) En admettant que $A^3 = 4A^2 - 4A$, montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, il existe deux réels a_n et b_n tels que

$$A^n = a_n A^2 + b_n A$$

   vérifiant, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$.

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n.$$

   (c) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression de a_n en fonction de n.
   (d) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression de b_n en fonction de n.
   (e) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 4 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice. — On définit la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt$

1. Justifier que F est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$.
2. En déduire les variations de F et son signe.
3. Montrer que :
$$\forall t \geq 1, \frac{t}{\sqrt{t+1}} \geq \sqrt{\frac{t}{2}}.$$
4. Déduire la limite de F en $+\infty$, puis la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt$
5. Pour tout $x \in]-1;+\infty[$, on se propose de calculer $F(x)$ par deux méthodes différentes.
   (a) **Méthode 1 :** A l'aide d'une intégration par parties, calculer $F(x)$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$.
   (b) **Méthode 2 :** Montrer à l'aide du changement de variable $u = t+1$ que pour tout $x > -1, \;\; F(x) = \displaystyle\int_1^{x+1} \left(\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right) du.$
   Calculer alors la valeur de $F(x)$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 5 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème. — On pose, pour tout entier naturel n et pour tout réel x,

$$h_n(x) = x^n\, e^{-x} \quad \text{et} \quad L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\, h_n^{(n)}(x),$$

où $h_n^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de h_n.

1. Calculer explicitement L_0, L_1 et L_2.
2. Pour tout entier n, montrer que L_n est une fonction polynômiale.
3. Pour tout entier n, préciser le degré de L_n et montrer que son terme dominant est $(-1)^n X^n/n!$.
4. Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose

$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(x)\, Q(x)\, e^{-x} dx.$$

   Démontrer que φ est bien définie.
5. Calculer, pour tout entier n, $\varphi(L_0, X^n)$.
6. (a) Montrer que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, il existe $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h_n^{(k)}(x) = x^{n-k} e^{-x} Q_k(x).$$

   (b) Etablir que pour tout entier n, tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $p \in \{0, \ldots, n\}$:

$$\varphi(L_n, P) = \frac{(-1)^p}{n!} \int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x) P^{(p)}(x) dx\,.$$

7. En déduire que $\varphi(L_n, L_m) = 0$ si $n \neq m$ et $\varphi(L_n, L_n) = 1$.

Toulouse School of Economics

Concours BLSES 2023

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 5 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice. — Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'application de E dans lui-même par

$$u(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 6 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème. — On considère, pour n entier naturel non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f_n(x) = \frac{n \ln x}{n + 1 + nx^2}.$$

On définit également sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\ln x}{1 + x^2}$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x$ est convergente et la calculer.
2. Montrer que l'intégrale $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} h(x) \mathrm{d}x$ est convergente.
3. Montrer que $K = -\displaystyle\int_0^1 h(x) \mathrm{d}x$.
4. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |h(x)| \mathrm{d}x$ converge et que
$$\int_0^{+\infty} h(x) \mathrm{d}x = 0\,.$$
5. Montrer que pour tout réel x strictement positif, $|f_n(x)| \leq |h(x)|$. En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x$.
6. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $h(x) - f_n(x) = \dfrac{h(x)}{n + 1 + nx^2}$. En déduire successivement :
$$0 \leq \int_1^{+\infty} [h(x) - f_n(x)] \mathrm{d}x \leq \frac{K}{n+1} \quad \text{et} \quad -\frac{K}{n+1} \leq \int_0^1 [h(x) - f_n(x)] \mathrm{d}x \leq 0.$$
7. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = 0$.

Toulouse School of Economics

CONCOURS BLSES 2023

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 6 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice. — Soit $E = \mathbb{R}^4$. On pose :

$$v_1 = (1, 0, 1, 1), \quad v_2 = (-1, 1, 0, -3), \quad v_3 = (0, -1, -1, 2), \quad v_4 = (1, 2, 3, -3).$$

1. Déterminer le rang de la famille (v_1, v_2, v_3, v_4). Est-ce une base de E ?
2. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par :

$$f(e_1) = v_1, \quad f(e_2) = v_2, \quad f(e_3) = v_3, \quad f(e_4) = v_4.$$

   (a) Pour tout $(x, y, z, t) \in E$, déterminer $f(x, y, z, t)$.

   (b) Quel est le rang de f ? Est-elle surjective ? injective ? bijective ?

   (c) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 7 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème. — 1. Démontrer pour tout entier $n \geq 1$ l'existence d'une unique solution réelle positive ou nulle de l'équation

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0.$$

Cette solution est notée u_n.

2. Démontrer que l'on a $0 < u_n \leq 1$.
3. Démontrer que la suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante.
4. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$u_n^{n+1} - 2u_n + 1 = 0.$$

5. Démontrer que la suite $(u_n)_n$ tend vers $1/2$.
6. Pour $n \geq 1$, on pose $\varepsilon_n = u_n - 1/2$. Démontrer que $(n\varepsilon_n)_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
7. Déduire de la question précédente et de la question 3 le développement asymptotique suivant de u_n :

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4 \cdot 2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Toulouse School of Economics

Concours BLSES 2023

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 7 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice. — Une urne contient des boules blanches et noires. On suppose que la probabilité de piocher une blanche vaut $p \in]0,1[$. On effectue des tirages successifs avec remise et de manière indépendante.
Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

1. Reconnaître la loi de X_1 et donner la valeur de $E(X_1)$ et de $V(X_1)$.
2. Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième boule blanche. Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance.
3. Soit X_k la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la k-ième boule blanche. Justifier sans calcul que pour tout $n \geq k$, $P(X_k = n) = p^k(1-p)^{n-k}\binom{n-1}{k-1}$.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 8 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème. — On désigne par n un entier naturel non nul, et l'on se propose d'étudier les racines de l'équation

$$(E_n) : \ln x + x = n$$

A cet effet, on introduit la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \ln x + x$.

1. Etudier les variations de la fonction f.
2. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, (E_n) admet une racine et une seule x_n.
3. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln x < x$.

   (b) Prouver que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \dfrac{n}{2} \leqslant x_n \leqslant n$

   Indication : comparer les images par f.

   (c) Quelle est la limite de $(x_n)_n$ quand n tend vers $+\infty$?
4. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{n - x_n}{\ln n}.$$

   (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n - 1 = \frac{\ln\left(\dfrac{x_n}{n}\right)}{\ln n}.$$

   (b) Quelle est la limite de $(u_n)_n$ quand n tend vers $+\infty$?

   (c) Prouver alors que $\ln(x_n) \sim \ln(n)$ puis que

$$1 - u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Toulouse School of Economics

CONCOURS BLSES 2023

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 8 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une boîte B contenant n boules numérotées de 1 à n et de n boîtes B_1, ..., B_n. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la boîte B_k contient k boules numérotées de 1 à k.

On tire au hasard une boule de B, puis k désignant le numéro obtenu, on tire une boule au hasard dans B_k.

Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue à l'issue du 2^e tirage. Déterminer la loi de X.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 9 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème. — Un péage comporte 10 guichets, numérotés de 1 à 10.

Soit N la variable aléatoire donnant le nombre de voitures arrivant au péage en 1 heure. N suit une loi de Poisson de paramètre λ, avec $\lambda > 0$. Une voiture peut passer par n'importe quel guichet, de manière équiprobable et indépendamment des autres. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de voitures se présentant au guichet numéro 1 en 1 heure.

1. Que vaut l'espérance de N : $E(N)$?
2. Comment peut-on interpréter la valeur de λ ?
3. Soit $i \in \mathbb{N}$.
   (a) Pour $k < i$, déterminer sans calcul ce que vaut $P_{[N=k]}(X = i)$.
   (b) Pour $k \geqslant i$, déterminer $P_{[N=k]}(X = i)$.
   (c) En utilisant la formule des probabilités totales, déterminer $P(X = i)$.
4. En simplifiant l'expression ci-dessus, en déduire la loi de X.
5. X admet-elle une espérance ? Une variance ? Si oui que valent-elles ?

Toulouse School of Economics

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 9 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice. — On considère l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y+z, x+2y-z, x-y+2z) \end{array} \right. .$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f \circ f = \lambda f$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et une base de $\mathrm{Im} f$.
4. Montrer que $p = f/\lambda$ est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 10 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans l'urne. Si cette boule tirée porte le numéro k, on place alors dans une seconde urne toutes les boules suivantes : une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, et plus généralement pour tout $j \in [|1, k|]$, j boules numérotées j, jusqu'à k boules numérotées k. Les boules de cette deuxième urne sont aussi indiscernables au toucher. On effectue alors un tirage au hasard d'une boule dans cette seconde urne. On note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule tirée.

1. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
2. Déterminer $Y(\Omega)$.
3. Soit $k \in [|1, n|]$.
   (a) On suppose que l'événement $[X = k]$ est réalisé.
   Déterminer, en fonction de k, le nombre total de boules présentes dans la seconde urne.
   (b) Pour tout entier j de $[|1, n|]$, justifier que

$$P_{[X=k]}(Y = j) = \begin{cases} \dfrac{2j}{k(k+1)}, & \text{si } 1 \leq j \leq k \\ 0, & \text{si } k < j \end{cases}$$

4. En utilisant le fait que, pour tout entier naturel k non nul, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, en déduire que, pour tout élément j de $Y(\Omega)$,

$$P(Y = j) = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}.$$

5. Justifier que Y admet une espérance et montrer que $E(Y) = \dfrac{n+2}{3}$.
   Vous pourrez utiliser que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
6. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
7. En admettant que $E(XY) = \dfrac{(n+1)(4n+5)}{18}$, calculer $\text{Cov}(X, Y)$.
8. Quel résultat retrouve t-on ?

Toulouse School of Economics

CONCOURS BLSES 2023

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 10 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice. — On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) .$$

1. Montrer que :
$$\forall x \in]0, +\infty[, \; x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \,.$$
2. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^{n} k^2 \leq u_n \leq \frac{n+1}{2n} \,.$$
3. En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.
Vous pourrez utiliser que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 11 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème. — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. (a) Vérifier que f est une fonction paire.

   (b) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

   Dans la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant f comme densité. On note F_X la fonction de répartition de X.

2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

3. On pose $Y = \ln(|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note F_Y sa fonction de répartition.

   (a) Montrer que, pour tout réel x, on a : $F_Y(x) = F_X(\mathrm{e}^x) - F_X(-\mathrm{e}^x)$.

   (b) Montrer, sans expliciter la fonction F_Y, que Y est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité de Y et vérifier que Y suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

   (c) Montrer que, si x est positif, alors $1 - \mathrm{e}^{-x}$ appartient à $[0, 1[$ et montrer que, si x est strictement négatif, alors $1 - \mathrm{e}^{-x}$ est strictement négatif.

   (d) On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = -\ln(1 - U)$ et reconnaître la loi de Z.

Toulouse School of Economics

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 11 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice. — Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = a,\ u_1 = b, \quad \text{et} \quad : \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_n\, u_{n+1}}.$$

1. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_n$ est bien définie et strictement positive.
2. Quelles sont les limites possibles, finies ou infinies, de la suite $(u_n)_n$?
3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln(u_n)$.
   (a) Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(v_n)_n$.
   (b) En déduire le terme général de $(v_n)_n$.
   (c) Montrer que la suite $(v_n)_n$ est convergente.
4. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente.

Concours BLSES 2023

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 12 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Problème. — N personnes passent devant un magasin d'un centre commercial. Chaque personne a indépendamment une probabilité $p \in]0,1[$ de rentrer dans le magasin et une probabilité $q \in]0,1]$ d'effectuer un achat unique si elle rentre, sinon elle n'effectue aucun achat.

On pose X, respectivement Y, la variable aléatoire désignant le nombre d'achats effectués dans le magasin (resp. le nombre de clients ressortis sans achats).

1. On prend une personne au hasard qui passe devant le magasin. Déterminer les probabilités des évènements A "la personne rentre dans le magasin et effectue un achat" et B "la personne rentre dans le magasin et ressort sans achats".
2. Montrer que les variables X, Y et $X+Y$ suivent chacune une loi binomiale dont on précisera, à chaque fois, ses paramètres.
3. Montrer que les variables X et Y ne sont pas indépendantes.
4. Montrer que : $\text{Cov}(X,Y) = Np^2q(q-1)$.
5. On suppose maintenant que N le nombre de consommateurs est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Les autres hypothèses restent inchangées.
   (a) Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre λpq. On note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda pq)$
   On admettra que, de même, $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p(1-q))$, *et* $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$
   (b) Montrer que la covariance de X et Y est nulle.
   (c) X et Y sont-elles indépendantes ?

Toulouse School of Economics

Concours BLSES 2023

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 12 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés,
- Nombre de pages : 1.

Exercice. — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_n & a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}$, où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par :

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ \text{et} : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n.$$

2. Déterminer le terme général de (a_n), et en déduire les puissances de A.

Planche n° 1 – Correction du problème.

1. On va utiliser la formule de polarisation
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$
Si on applique cette formule à $x = u+v$ et $y = u-v$, x et y sont orthogonaux et on trouve $\|u\| = \|v\|$.
2. Bien sûr, le sens réciproque est trivial puisqu'il suffit de choisir $x = y$. Réciproquement, supposons que pour tout $x \in E$, on a $\|f(x)\| = \lambda x$. Alors, par la formule de polarisation rappelée ci-dessus que l'on utilise deux fois :
$$\begin{aligned}\langle f(x), f(y)\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x-y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\lambda^2\|x+y\|^2 - \lambda^2\|x-y\|^2\right)\\ &= \frac{\lambda^2}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\\ &= \lambda^2\langle x, y\rangle.\end{aligned}$$
3. (a) C'est trivial d'après la question précédente.
   (b) On sait que $e_i + e_j \perp e_i - e_j$. Puisque f préserve l'orthogonalité, $f(e_i) + f(e_j) \perp f(e_i) - f(e_j)$. Et d'après la première question, $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.
   (c) Soit $\lambda \geq 0$ tel que $\|f(e_i)\| = \lambda\|e_i\|$ (λ ne dépend pas de i d'après la question précédente, et est strictement positif sinon f serait nulle). On va démontrer que f est une similitude de rapport λ. Soit $x \in E$ qui s'écrit
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$
Alors
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i).$$
La famille $(f(e_i))_i$ étant orthogonale, on a
$$\begin{aligned}\|f(x)\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\|f(e_i)\|^2\\ &= \lambda^2\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\\ &= \lambda^2\|x\|^2.\end{aligned}$$
f est bien une similitude de rapport λ.

Planche n° 1 – Correction de l'exercice.

1. On va calculer I_0 et I_1 :
$$I_0 = \int_0^1 e^t dt = \left[e^t\right]_0^1 = e-1.$$
Pour I_1 on effectue une intégration par parties : Pour tout $t \in [0,1]$, on pose $v(t) = (1-t), v'(t) = -1, u'(t) = e^t, u(t) = e^t$ avec u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$. Alors :
$$I_1 = \int_0^1 (1-t)e^t dt = \left[(1-t)e^t\right]_0^1 + \int_0^1 e^t dt = I_0 - 1 = e-2.$$
2. Montrons d'abord que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
   - $\forall t \in [0,1], (1-t)^n e^t \geq 0$
   - $0 \leq 1$

   Donc d'après le théorème de positivité de l'intégrale, $I_n \geq 0$.

   Montrons maintenant que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n \leq \dfrac{e}{n!}$: Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$. On a :
$$\begin{array}{ll} & 0 \leq t \leq 1 \\ \Rightarrow & 0 \leq 1-t \leq 1 \\ \Rightarrow & 0 \leq (1-t)^n \leq 1 \\ \Rightarrow & 0 \leq (1-t)^n e^t \leq e^t \quad \text{car } e^t > 0 \\ \Rightarrow & 0 \leq (1-t)^n e^t \leq e^t \\ \Rightarrow & \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \int_0^1 e^t dt \quad \text{car } 0 \leq 1 \\ \Rightarrow & \displaystyle\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \frac{1}{n!}\left[e^t\right]_0^1 \qquad \text{car } \frac{1}{n!} > 0 \\ \Rightarrow & I_n \leq \dfrac{1}{n!}(e-1) \\ \Rightarrow & I_n \leq \dfrac{e}{n!} \end{array}$$
   Ainsi on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}.$$
3. Comme
$$\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{e}{n!} = 0$$
d'après le théorème d'encadrement/des gendarmes, on en déduit que (I_n) converge vers 0.
4. Effectuons une intégration par parties : pour tout $t \in [0,1]$, on pose $v(t) = (1-t)^{n+1}, v'(t) = -(n+1)(1-t)^n, u'(t) = e^t, u(t) = e^t$, avec u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$.

   Alors :
$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!}\left[(1-t)^{n+1}e^t\right]_0^1 + \frac{n+1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t dt - \frac{1}{(n+1)!} \\ &= I_n - \frac{1}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

5. Pour tout $n \geq 0$, on pose $P(n) : I_n = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

   • Initialisation : $I_0 = e - 1$ (cf. q.1) et $e - \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} e - 1$. Donc $P(0)$ est vraie.

   • Hérédité : on suppose que pour un certain entier naturel n fixé, $P(n)$ est vraie. Montrons alors que $P(n+1)$ est vraie. Par la relation de Chasles on a

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!} \underset{\text{car } P(n)\text{vraie}}{=} e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(n+1)!} = e - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}$$

   Donc $P(n+1)$ est vraie.

   • Conclusion : par le principe de récurrence, on en déduit que $\forall n \geq 0, \quad I_n = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

6. Comme (I_n) converge vers 0 (cf.q.2) et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e - I_n$ (cf.q.3) , on en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$.

7. On en conclut que la série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$ est convergente et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Planche nº 2 – Correction du problème.

1. Pour tout P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ et λ dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u(\lambda P+Q) &= (\lambda P+Q)(X+1)-(\lambda P+Q)(X)=\lambda[P(X+1)-P(X)]+Q(X+1)-Q(X) \\ &= \lambda u(P)+u(Q)\ . \end{aligned}$$

   De plus, pour tout $k \in \{1,\cdots,5\}$,

$$u(X^i)=(X+1)^i-X^i=\sum_{l=0}^{i}\binom{i}{l}X^l-X^i=\sum_{l=0}^{i-1}\binom{i}{l}X^l\ .$$

   Soit $P=\sum_{i=0}^{j}a_iX^i$. Par linéarité de u, on a

$$u(P)=\sum_{i=0}^{j}a_iu(X^i)=\sum_{i=0}^{j}a_i\sum_{l=0}^{i-1}\binom{i}{l}X^l\ . \qquad (1)$$

   Donc u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_5[X]$. Remarquons que l'on a même montré que si P est de degré j, alors $u(P)$ est de degré $j-1$.

2. La représentation matricielle de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_5[X]$ est la matrice de $\mathcal{M}_5$ de terme général $\binom{j-1}{i-1}$ si $i<j$ et 0 sinon.
3. Soit $P \in \mathrm{Ker}(u)$, d'après (1), $u(P)$ est un polynôme qui a une infinité de racines donc c'est le polynôme nul.
4. On calcule $u^2(P)=P(X+2)-2P(X+1)+P(X)$ et $u^3=P(X+3)-3P(X+2)-3P(X+1)+P(X)$.
5. On a vu en (1) que si P est de degré j, alors $u(P)$ est de degré $j-1$ donc u^j est de degré 0. Donc pour tout k dans $\{1,\cdots,5\}$ u^6 est nulle. Et u est nilpotente d'ordre 6.
6. Par le théorème du rang et la dimension de Ker ci-dessus, on sait que la dimension de Imu est 4. D'après la question précédente on sait que les éléments de la famille $\{1,X,X^2,\cdots,X^5\}$ forme une famille libre de 5 vecteurs de $\mathrm{Im}(u)$ donc c'est une base de $\mathrm{Im}(u)$.
7. On sait que $u^4\equiv 0$. On calcule

$$u^4(P)=\sum_{i=0}^{4}(-1)^{4-i}\binom{4}{i}P(X+i)=0\ .$$

On remarquera que toutes les questions ci-dessus sont vraies en dimension $n\geq 1$. L'égalité de la dernière question est alors

$$0=u^n(P)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}P(X+i)=0\ .$$

Planche n° 2 – Correction de l'exercice.

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$ car on peut tirer la boule noir au 1er tirage ou au 2ème ou au 3ème, etc, mais on peut aussi ne jamais tirer la boule noire (dans ce cas X prend la valeur 0).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a :

$$[X = n] = B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1} \cap \overline{B_n}$$

(jusqu'au $(n-1)^{\text{ième}}$ tirage, on n'obtient que des boules blanches, et au $n^{\text{ième}}$ tirage on tire la boule noire).

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise ensuite la formule des probabilités composées avec $P(B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1}) \neq 0$ pour le calcul de $P(X = n)$ et on obtient :

$$P(X = n) = P\left(B_1\right) P_{B_1}\left(B_2\right) \ldots P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{n-2}}\left(B_{n-1}\right) P_{B_1 \cap \ldots B_{n-1}}\left(\overline{B_n}\right)$$

Or on a :

—
$$P\left(B_1\right) = \frac{1}{2}, P_{B_1}\left(B_2\right) = \frac{2}{3}, P_{B_1 \cap B_2}\left(B_3\right) = \frac{3}{4}$$

—
$$P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{n-2}}\left(B_{n-1}\right) = \frac{n-1}{n}$$

—
$$P_{B_1 \cap \ldots B_{n-1}}\left(\overline{B_n}\right) = \frac{1}{n+1}$$

Ce qui donne, par télescopage :

$$P(X = n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

4. On va devoir justifier d'abord que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(X = n)$ converge. Il s'agit de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} P(X = n)$ (somme partielle d'indice n de la série). On a par l'indication par télescopage

$$S_n = \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}\ .$$

Donc $\lim_{n \to +\infty} S_n = 1$. On en déduit que la série converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$

5. On sait d'après le cours que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$ puisque la suite d'événements $([X = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un S.C.E. Or

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = P(X = 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)\ .$$

Mais on vient de voir que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1$. D'où on obtient $1 = P(X=0) + 1$ et donc $P(X=0) = 0$

Cela veut dire qu'on obtient à coup sûr la boule noire en un nombre fini de tirages.

Planche n° 3 – Correction du problème.

1. G est un sous-espace vectoriel par définition. $H = \mathrm{Ker}(f)$ où $f : (x,y,z,t) \mapsto x+y-z$ est une application linéaire donc H est un sous-espace vectoriel. Par le théorème du rang H est de dimension 3.
2. $\mathrm{Vect}\{(1,2,-3,1)\}$ est une base de G. G est donc une droite vectorielle. $H = \mathrm{Vect}\{(1,0,1,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}$ est un hyperplan vectoriel.
3. Utilisons le fait que le rang est inchangé si l'on ajoute un vecteur qui forme une famille liée avec la famille :
$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \\ -3 & z \\ 1 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y-2x \\ 0 & z+3x \\ 0 & t-x \end{pmatrix}$$
Donc un système d'équitions cartésiennes de G :
$$\{(x,y,z,t) \;:\; y-2x=0, z+3x=0, t-x=0\}\ .$$
4. On a
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in G\cap H \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} y-2x=0 \\ z+3x=0 \\ t-x=0 \\ x+y-z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \\ t=0 \end{array}\right.$$
Donc $G \cap H = \{0_E\}$. De plus $\dim(G)+\dim(H) = \dim(E)$, donc G et H sont supplémentaires dans E.
5. Les coordonnées de $(1,1,1,1)$ dans la base $\mathrm{Vect}\{(1,0,1,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1),(1,2,-3,1)\}$ est donnée par
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
6. En injectant les coordonnées dans l'équation de H on voit que $(1,1,2,0)$,$(1,-1,0,0)$ et $(0,0,0,1)$ apartiennent tous à H. De plus on voit que $\dim(H) = \dim(F) = 3$ donc $H = F$.
7. On calcule
$$\langle (1,1,2,0),(1,-1,0,0)\rangle = 0, \quad \langle (1,1,2,0),(0,0,0,1)\rangle = 0 \quad \text{et} \langle (1,-1,0,0),(0,0,0,1)\rangle = 0$$
Donc c'est un base orthogonale de H.
8. Dans la base $\{(1,1,2,0),(1,-1,0,0),(0,0,0,1),(1,2,-3,1)\}$ la représentation matricielle de la projection est
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
donc par la formule de changement de base on obtient
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. $(1, 0, 1, 0)$ appartient à H donc sa distance à H est nulle.
10. On calcule $p(1, 1, 1, 1) = (4, 4, 8, 1)/6$ donc sa distance à H est $\sqrt{41}/6$.

Planche nº 3 – Correction de l'exercice.

1. Il s'agit dans les deux cas de la même loi géométrique : rang d'apparition du premier «succès » (premier retard) lors de répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli.

   Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(1/4)$ et $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(1/4)$ et pour

$$n \in \mathbb{N}^*, P(Y = n) = P(Z = n) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

2. D'après le cours l'espérance est 4 et la variance 12.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$[Y \leqslant n] = \bigcup_{k=1}^{n}[Y = k].$$

   Donc par incompatibilité des évènements,

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant n) &= \sum_{k=1}^{n} P(Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n}}{1-\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

   d'après les résultats sur les sommes de termes d'une suite géométrique. Donc

$$P(Y \leqslant n) = \frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n}}{\frac{1}{4}} = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour que le maximum soit inférieur ou égal à n, il faut et il suffit que les deux variables soit inférieures ou égales à n. Donc

$$[T \leqslant n] = [Y \leqslant n] \cap [Z \leqslant n]$$

   Par indépendance des évènements, on en déduit que :

$$P(T \leqslant n) = P(Y \leqslant n) \times P(Z \leqslant n) = \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\right)^{2}$$

5. On en déduit alors, pour $n \geq 2$ (afin que $n-1 \geq 1$)

$$P(T = n) = P(T \leqslant n) - P(T \leqslant n-1)$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned}
P(T=n) &= \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)^2 - \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)^2 \\
&= \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)\right)\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)\right) \\
&= \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\left(2-\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(2-\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)
\end{aligned}.$$

Cette formule est en fait également valable pour $n = 1$.

Planche n° 4 – Correction du problème.

1. (a) On commence par exprimer les images par f des quatre vecteurs de $\mathcal{B}$ et on les exprime en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}$. Pour cela on utilise l'expression matricielle de f. On a : $A\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $f(u_1)=0$.

$A\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $f(u_2)=0$.

$A\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix}$ donc $f(u_3)=2u_3$.

$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix}$ donc $f(u_4)=2u_4+u_3$.

On en déduit alors que $\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B})=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

(b) Notons P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$. Par définition, P est inversible et $P=\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\1&-1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$.

Et, par la formule de changement de base, on a $A=PTP^{-1}$, avec $T=\mathrm{Mat}(f,\mathcal{B})=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ qui est donc bien une matrice triangulaire.

2. (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $P(n)$: $A^n=a_nA^2+b_nA$ avec $a_n=4a_{n-1}+b_{n-1}$ et $b_n=-4a_{n-1}$.

Initialisation : $A=0\times A^2+1\times A$. Donc $P(1)$ est vraie avec $a_1=0$ et $b_1=1$.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $P(n)$ vrai, c'est à dire que $A^n=a_nA^2+b_nA$ avec $a_n=4a_{n-1}+b_{n-1}$ et $b_n=-4a_{n-1}$. Montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie aussi, c'est à dire que $A^{n+1}=a_{n+1}A^2+b_{n+1}A$ avec $a_{n+1}=4a_n+b_n$ et $b_{n+1}=-4a_n$.

On a :

$$\begin{aligned}A^{n+1}&=A\cdot A^n\\&\underset{\text{H.R}}{=}A\left(a_nA^2+b_nA\right)\\&=a_nA^3+b_nA^2\\&=a_n(4A^2-4A)+b_nA^2\quad\text{d'après l'énoncé}\\&=(4a_n+b_n)A^2-4a_nA\\&=a_{n+1}A^2+b_{n+1}A\end{aligned}$$

en posant $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence, on en déduit que $A^n = a_n A^2 + b_n A$ avec $a_n = 4a_{n-1} + b_{n-1}$ et $b_n = -4a_{n-1}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les relations trouvées dans l'hérédité de la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 4a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= 4a_{n+1} - 4a_n. \end{aligned}$$

(La suite (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2.)

(c) Comme le jury l'indique, on voit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 2^n et $n2^n$ sont solutions. Le jury indique aussi que l'espace des solutions est un espace vectoriel de dimension 2. Donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = (\lambda + \mu n)2^n$.

Pour déterminer λ et μ, on considère la relation précédente avec $n = 1$ et $n = 2$. Sachant que $a_1 = 0$ et $a_2 = 4a_1 + b_1 = 1$, on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2(\lambda+\mu) &=& 0 \\ 4(\lambda+2\mu) &=& 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda &=& -1/4 \\ \mu &=& 1/4 \end{array} \right.$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{4}(-1+n)2^n = (n-1)2^{n-2}.$$

(d) Pour tout $n \geq 2$, on a $b_n = -4a_{n-1}$ et donc

$$b_n = -4(n-1-1)2^{n-1-2} = -(n-2)2^{n-1}.$$

Cette formule est encore valide pour $n = 1$.

(e) Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} A^n &= a_n A^2 + b_n A \\ &= (n-1)2^{n-2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - (n-2)2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2^{n-2} \left((n-1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - (n-2) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \\ &= 2^{n-2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ n+1 & 2 & 2 & n-1 \\ n+1 & 2 & 2 & n-1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Planche n° 4 – Correction de l'exercice.

1. On a :

- $f : x \mapsto t/\sqrt{t+1}$ est continue sur $]-1;+\infty[$, car f est le quotient de fonctions continues sur $]-1;+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-1;+\infty[$.
- $0 \in]-1;+\infty[$

Par le théorème fondamental de l'intégration, on en déduit que F est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$.

2. On a
$$\forall x \in]-1;+\infty[,\ F'(x) = f(x) = x/\sqrt{x+1}$$
est du signe de x sur $]-1;+\infty[$. Donc F est décroissante sur $]-1;0[$ et croissante sur $[0;+\infty[$. Comme $F(0) = 0$, on en déduit que F est positive sur $]-1;+\infty[$.

3. Soit $t \geq 0$. On a :
$$\begin{aligned} \frac{t}{\sqrt{t+1}} \geq \sqrt{\frac{t}{2}} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{t^2}{t+1} \geq \frac{t}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad 2t^2 \geq t(t+1) \\ &\Leftrightarrow \quad 2t^2 \geq t^2 + t \\ &\Leftrightarrow \quad t^2 \geq t \end{aligned}$$
ce qui est vrai pour $t \geq 1$.

4. Soit $x \geq 1$. On a
$$F(x) = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt + \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt\ .$$
Comme les bornes sont croissantes, en intégrant l'inégalité ci dessus on trouve :
$$\int_1^x \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt \geq \int_1^x \sqrt{t}dt = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{3}$$
qui diverge vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Donc $F(x)$ aussi (car $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt$ est une constante). Donc $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt$ diverge vers $+\infty$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt$ est donc, par définition, divergente.

5. Soit $x \in]-1;+\infty[$.
   (a) **Méthode 1 :** A l'aide d'une intégration par parties (en posant pour tout $t \in [0,x]$, $u'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t+1}}$ et $v(t) = t$ avec u et v qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$), on trouve
$$\begin{aligned} F(x) &= 2x\sqrt{x+1} - \int_0^x 2\sqrt{t+1}dt = F(x) = 2x\sqrt{x+1} - \left[\frac{4}{3}(t+1)^{3/2}\right]_0^x \\ &= 2x\sqrt{x+1} - \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} + \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

(b) **Méthode 2 :** On pose $u = t + 1$ alors

$$F(x) = \int_1^{x+1} \frac{u-1}{\sqrt{u}} du.$$

On se sert de $\dfrac{u-1}{\sqrt{u}} = \dfrac{u}{\sqrt{u}} - \dfrac{1}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} - \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ pour en déduire que

$$F(x) = \int_1^{x+1} \left(\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right) du.$$

D'où

$$F(x) = \left[\frac{2}{3}u^{3/2} - 2\sqrt{u}\right]_0^{x+1} = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2\sqrt{x+1} + \frac{4}{3}.$$

Remarque : pour retrouver le résultat de la q.3)a), il faut remplacer le x devant la racine par $(x+1) - 1$ dans la première expression, développer et arranger.

Planche nº 5 – Correction du problème.

1. On calcule
$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x, \quad L_2(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 1\ .$$
2. On applique la formule de Leibniz pour calculer la dérivée n-ième du produit $x^n e^{-x}$. On en déduit que $h_n^{(n)}(x)$ s'écrit sous la forme $P(x)e^{-x}$..
3. De plus dans la question précédente P est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$. Ainsi, L_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant $(-1)^n/n!$.
4. Pour prouver que φ est bien définie, on commence par remarquer que la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$. D'autre part, par comparaison des fonctions exponentielle et polynômes, on sait que $\lim_{x\mapsto+\infty} x^2 P(x)Q(x)e^{-x} = 0$. Or, la fonction $x \mapsto 1/x^2$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. Par comparaison, $x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et donc $\varphi(P, Q)$ est bien défini, pour tout couple de polynômes P, Q.
5. On a vu que $L_0 = 1$. Il s'agit de prouver par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\varphi(L_0, X^n) = n!$. C'est vrai si $n = 0$. Si la propriété est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, alors
$$\varphi(L_0, X^{n+1}) = \int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-x}dx = \left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^{+\infty} + (n+1)\varphi(L_0, X^n),$$
l'intégration par parties étant justifiée par la convergence des deux intégrales, et par l'existence de la limite en $+\infty$ de $x^{n+1}e^{-x}$ (c'est zéro). De
$$\left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 0,$$
on tire
$$\varphi(L_0, X^{n+1}) = (n+1)\varphi(L_0, X^n) = (n+1)!$$
La propriété est vraie au rang $n+1$. Par application de l'axiome de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
6. (a) Il s'agit de la formule de Leibniz qui donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$h_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (e^{-x})^{(j)}(x^n)^{(k-j)}.$$
Or,
$$(e^{-x})^{(j)} = (-1)^j e^{-x},$$
et
$$(x^n)^{(k-j)} = n(n-1)\dots(n-k+j+1)x^{n-k+j} = x^{n-k}R_{n,j,k}(x)$$
où $R_{n,j,k}$ est un polynôme. En sommant tout cela, on trouve
$$h_n^{(k)}(x) = e^{-x}x^{n-k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j R_{n,j,k}(x)$$
ce qui est le résultat voulu en posant
$$Q_k(x) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j R_{n,j,k}(x).$$

(b) On fixe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$, et on prouve par récurrence finie sur $p \in \{0, \dots, n\}$ la propriété suivante :

$$H_p : \varphi(L_n, P) = \frac{(-1)^p}{n!} \int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x) P^{(p)}(x) dx.$$

H_0 est vraie : il suffit de remplacer L_n par sa définition. Soit $p \leq n-1$ tel que H_p est vraie, et prouvons H_{p+1}. Il s'agit juste de faire une intégration par parties ; le fait que tout se passe bien avec la borne $+\infty$ est une conséquence du résultat de la question précédente. Précisèment, soit $a \geq 0$. Alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^a & h_n^{(n-p)}(x) P^{(p)}(x) dx \\ &= P^{(p)}(a) h^{(n-(p+1))}(a) - P^{(p)}(0) h^{(n-(p+1))}(0) - \int_0^a h_n^{(n-(p+1))}(x) P^{(p+1)}(x) dx.\end{aligned}$$

Or, d'après le résultat de la question précédente, puisque $n-(p+1) \leq n$, on a $h^{(n-(p+1))}(0) = 0$. D'autre part, toujours d'après la question précédente,

$$P^{(p)}(x) h^{(n-(p+1))}(x) = e^{-x} R(x),$$

où R est un polynôme. Ainsi,

$$\lim_{a \mapsto +\infty} P^{(p)}(a) h^{(n-(p+1))}(a) = 0.$$

Le même argument démontre que la fonction $x \mapsto h_n^{(n-(p+1))}(x) P^{(p+1)}(x)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On peut donc faire tendre a vers $+\infty$, et on trouve que

$$\int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x) P^{(p)}(x) dx = -\int_0^{+\infty} h_n^{(n-(p+1))}(x) P^{(p+1)}(x) dx,$$

ce qui, à son tour, entraîne que H_{p+1} est vraie.

7. Le résultat de la question précédente, appliqué avec $p = n$, prouve que $\varphi(L_n, L_m) = 0$ pour tout polynôme de degré inférieur strict à n. En particulier, puisque L_m est de degré m.

De plus, on a, toujours d'après la même formule,

$$\varphi(L_n, L_n) = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} h_n(x) L_n^{(n)}(x) dx.$$

On a déjà vu que L_n est de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n/n!$. Il vient $L_n^{(n)}(x) = (-1)^n$, et donc

$$\varphi(L_n, L_n) = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} h_n(x) dx = \frac{1}{n!} \varphi(L_0, X^n) = 1.$$

Planche n° 5 – Correction de l'exercice.

1. Remarquons d'abord que si $P \in E$, $u(P)$ est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, et donc u envoie bien E dans E. Pour montrer qu'il s'agit d'un endomorphisme, on doit prouver que u est linéaire. Mais, si $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} u(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q) + (1-X)(P+\lambda Q)' \\ &= P + \lambda Q + (1-X)(P' + \lambda Q') \\ &= P + (1-X)P' + \lambda(Q + (1-X)Q') \\ &= u(P) + \lambda u(Q). \end{aligned}$$

   u est donc bien linéaire.

2. Puisque $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de E, on sait que $u(1), u(X), u(X^2), u(X^3)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$. On va pouvoir en extraire une base. On a :

$$u(1) = 1,\ u(X) = 1,\ u(X^2) = -X^2 + 2X,\ u(X^3) = -2X^3 + 3X^2.$$

   On en déduit que $(u(1), u(X^2), u(X^3))$ est une famille libre (ce sont des polynômes de degrés différents) et que $u(X)$ s'écrit comme combinaison linéaire de ceux-ci (on a même $u(X) = u(1)$). Ainsi, ceci prouve que $(u(1), u(X^2), u(X^3))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.

3. Ecrivons $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, et calculons $u(P)$:

$$u(P) = -2aX^3 + (3a-b)X^2 + 2bX + c + d.$$

   Ainsi, on obtient

$$u(P) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2a &=& 0 \\ 3a-b &=& 0 \\ 2b &=& 0 \\ c+d &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ b &=& 0 \\ c &=& c \\ d &=& -c \end{array} \right.$$

   Ainsi, $P \in \mathrm{Ker}(u) \iff \exists c \in \mathbb{R},\ P = c(X-1)$. Une base de $\mathrm{Ker}(u)$ est donné par le polynôme $X - 1$.

4. La réunion des bases de $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ trouvées précédemment est $(1, -X^2+2X, -2X^3+3X^2, X-1)$. Ces polynômes sont tous de degrés différents. Ils forment une base de E. Ceci prouve que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont supplémentaires.

Planche nº 6 – Correction du problème.

1. Par intégration par partie en posant $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = -1/x$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x - \left[\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^{+\infty} = 1\ .$$

Donc cette intégrale est convergente et vaut 1.

2. Sur tout intervalle de $[1, +\infty[$, h est continue et donc intégrable. En $+\infty$ on a $h(x) \sim \ln(x)/x^2$ qui sont toutes les deux positives et $x \mapsto \ln(x)/x^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après la question précédente.

3. Par changement de variable $y \mapsto 1/x$ qui est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $]0, 1[$ vers $]1, +\infty[$ on a

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1 + x^2} \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1/y)}{1 + (1/y)^2} \frac{1}{y^2} \mathrm{d}y = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln y}{1 + y^2} \mathrm{d}y$$

cette intégrale est convergente d'après la question précédente. On obtient bien le résultat attendu.

4. On a

$$\int_0^{+\infty} |h(x)| \mathrm{d}x = -\int_0^1 h(x) \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} h(x) \mathrm{d}x \leq 2K\ ,$$

donc h est absolument intégrable sur $[0, +\infty[$.

De plus,

$$\int_0^{+\infty} h(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 h(x) \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} h(x) \mathrm{d}x = -K + K = 0\ .$$

5. On a pour tout x positif

$$\frac{n|\ln x|}{n + 1 + nx^2} - \frac{|\ln x|}{1 + x^2} = -|\ln(x)| \leq 0$$

ce qui est l'inégalité demandée. Or h est absolument intégrable sur $[0, +\infty[$ donc f_n l'est aussi. D'où f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

6. On calcule

$$h(x) - f_n(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2} - \frac{n \ln x}{n + 1 + nx^2} = \frac{h(x)}{n + 1 + nx^2}\ .$$

On a

$$\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n + 1 + nx^2} \geq 0$$

Sur $[1, +\infty[$, h est positive donc pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a

$$\frac{h(x)}{n+1} \geq \frac{h(x)}{n + 1 + nx^2} \geq 0\ .$$

En intégrant entre 1 et $+\infty$ on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{h(x)}{n+1} \mathrm{d}x \geq \int_1^{+\infty} \frac{h(x)}{n + 1 + nx^2} \mathrm{d}x \geq 0\ .$$

Et en utilisant la question 2 et $h(x) - f_n(x) = h(x)/(n+1+nx^2)$, on obtient le résultat la première inégalité.

De même sur $[0,1]$, h est négative donc pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\frac{h(x)}{n+1} \leq \frac{h(x)}{n+1+nx^2} \leq 0 \ .$$

En intégrant entre 0 et 1 on obtient

$$\int_0^1 \frac{h(x)}{n+1}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{h(x)}{n+1+nx^2}\mathrm{d}x \leq 0 \ .$$

Et en utilisant la question 2 et $h(x) - f_n(x) = h(x)/(n+1+nx^2)$, on obtient la deuxième inégalité.

On obtient le résultat en multipliant par $h(x)$, pour x sur $[0,1]$ d'une part et sur $[1,+\infty[$ de l'autre et en intégrant on obtient le résultat énoncé.

7. D'après les questions précédentes on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x + \frac{K}{n+1} + \int_1^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x + \frac{K}{n+1} = 2\frac{K}{n+1} \ . \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\mapsto\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0 \ .$$

Planche n° 6 – Correction de l'exercice.

1. On calcule $\mathrm{rg}(v_1, v_2, v_3, v_4) = 2$ donc $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ n'est pas une base de E.
2. (a) Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$f(x, y, z, t) = xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4 = (x - y + t, y - z + 2t, x - z + 3t, x - 3y + 2z - 3t)$$

   (b) On a $\mathrm{rg}(f) = 3$. Comme f est un endomorphisme est n'est ni surjective, ni injective ni bijective.

   (c) Une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est $\{(-1, 0, 2, 1)\}$.
   Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est donnée par $\{(1, 0, 1, 1), (-1, 0, 0, -3), (0, -1, -1, 2)\}$.

Planche n° 7 – Correction du problème.

1. Notons P_n la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée,
$$P_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 1,$$
est strictement positive sur cet intervalle. Ainsi P_n est strictement croissante. Puisque $P_n(0) = -1$ et que $\lim_{x\mapsto+\infty} P_n(x) = +\infty$, P_n réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$.
2. Puisque $0 \in]-1, +\infty[$, il existe un unique réel $u_n \in [0, +\infty[$ de sorte que $P_n(u_n) = 0$. Si on remarque de plus que $P_n(1) = n - 1 \geq 0$, on en déduit que $u_n \in [0, 1]$ et même $u_n \in]0, 1[$, ce qui sera utile dans la question suivante.
3. Soit $n \geq 1$. On a $P_{n+1}(u_n) = P_n(u_n) + u_n^{n+1} \geq 0 = P_{n+1}(u_{n+1})$. Puisque P_{n+1} est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $u_{n+1} \leq u_n$.
4. Si $n = 1$, alors $u_1 = 1$ et la relation demandée est trivialement vérifiée. Sinon, on sait que $u_n \leq 1$ (la suite est strictement décroissante) et donc on a
$$u_n + \cdots + u_n^n = \frac{u_n^{n+1} - u_n}{u_n - 1}.$$
On en déduit que
$$0 = -1 + u_n + \cdots + u_n^n = \frac{u_n^{n+1} - 2u_n + 1}{u_n - 1}$$
ce qui implique bien le résultat demandé.
5. Pour démontrer qu'une suite (u_n) tend vers ℓ, il n'existe pas tant de possibilités que cela :
   — Si la suite est donnée par une formule, c'est souvent un calcul de limites (par développements limités, etc...) ;
   — Si la suite est une suite récurrente, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f continue, on peut déterminer la limite en étudiant les solutions de l'équation aux limites possibles $\ell = f(\ell)$;
   — On peut encadrer u_n et appliquer le théorème des gendarmes ;
   — On peut revenir à la définition.

   Ici, il est d'abord assez facile de remarquer que $u_n \geq 1/2$ pour tout $n \geq 1$. En effet, on a, suivant le calcul effectué à la question précédente,
$$P_n(1/2) = -2 \times (2^{-(n+1)} - 1 + 1) \leq 0 = P_n(u_n).$$
Par croissance de P_n, on en déduit que $u_n \geq 1/2$. On fixe ensuite $\varepsilon \in]0, 1/2[$ et on va prouver qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \leq 1/2 + \varepsilon$. Pour cela, on remarque que
$$P_n\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) = \frac{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^{n+1} - 2\varepsilon}{-\frac{1}{2} + \varepsilon}.$$
Puisque $|1/2 + \varepsilon| \leq 1$, le numérateur tend vers -2ε et donc
$$\lim_{n\mapsto+\infty} P_n\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) = \frac{-2\varepsilon}{-\frac{1}{2} + \varepsilon} \geq 0.$$

Ainsi, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$P_n\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right) \geq 0 = P_n(u_n).$$

Par croissance de P_n, on en déduit que

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{1}{2}+\varepsilon.$$

Ceci prouve bien que (u_n) tend vers $1/2$.

6. Il suffit de déterminer le premier entier s tel que $P_s\left(1/2+10^{-p}\right) \geq 0$. L'introduction de la fonction g_n permet de simplifier les calculs. En effet, on a, suite au calcul effectué plus haut,

$$g_n(x) = x^{n+1} - 2x + 1$$

et, pour $x \in [0,1[$ (comme c'est le cas de $1/2+10^{-p}$), on a

$$P_n(x) \geq 0 \iff g_n(x) \leq 0.$$

Il suffit donc de déterminer le premier entier s tel que $g_n\left(1/2+10^{-p}\right) \leq 0$.

Fixons un réel $\delta \geq 0$. Il suffit de démontrer que, pour tout entier n assez grand, on a

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{1}{2}+\frac{\delta}{n}.$$

En effet, dans ce cas, on aura

$$0 \leq \varepsilon_n \leq \frac{\delta}{n}$$

et donc

$$0 \leq n\varepsilon_n \leq \delta.$$

La méthode est tout à fait similaire à celle de la question 4. En effet, on écrit que

$$P_n\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{n}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{n}\right)^{n+1} - 2\frac{\delta}{n}}{\frac{-1}{2}+\frac{\delta}{n}}$$

et donc que

$$P_n\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{n}\right)$$

est du signe opposé à

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{n}\right)^{n+1} - 2\frac{\delta}{n}.$$

Mais,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{n}\right)^{n+1} - 2\frac{\delta}{n} &= \frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{2\delta}{n}\right)^{n+1} - 2\frac{\delta}{n} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\exp\left((n+1)\log\left(1+\frac{2\delta}{n}\right)\right) - 2\frac{\delta}{n}
\end{aligned}$$

Mais, par un développement limité (ou simplement un équivalent du logarithme), on sait que
$$(n+1)\log\left(1+\frac{2\delta}{n}\right)$$
tend vers 2δ. Par composition avec la fonction exponentielle, on a donc
$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{n}\right)^{n+1}-2\frac{\delta}{n}=\frac{\exp(2\delta)}{2^{n+1}}-\frac{2\delta}{n}.$$
On en déduit alors, par croissance comparée de $1/2^{n+1}$ et de $1/n$, que
$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{n}\right)^{n+1}-2\frac{\delta}{n}\sim\frac{-2\delta}{n}.$$
Autrement dit, pour n assez grand, $P_n\left(1/2+\delta/n\right)$ est positif, et donc
$$u_n\leq\frac{1}{2}+\frac{\delta}{n}.$$

7. Ecrivons que $u_n^{n+1}-2u_n+1=0$. Ceci est équivalent à
$$\left(\frac{1}{2}+\varepsilon_n\right)^{n+1}-2\varepsilon_n=0.$$
On va faire un développement limité du terme de gauche. Pour cela, on écrit
$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}+\varepsilon_n\right)^{n+1} &= \frac{1}{2^{n+1}}(1+2\varepsilon_n)^{n+1}\\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\exp\big((n+1)\log(1+2\varepsilon_n)\big)\\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\exp\big(2(n+1)\varepsilon_n+o(n\varepsilon_n)\big)\\ &= \frac{1+2(n+1)\varepsilon_n+o(n\varepsilon_n)}{2^{n+1}}\end{aligned}$$
où ce dernier calcul est justifié par le fait que $n\varepsilon_n$ tend vers 0. On a donc
$$-2\varepsilon_n+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2(n+1)\varepsilon_n}{2^{n+1}}+\frac{o(n\varepsilon_n)}{2^{n+1}}=0.$$
Puisque $n/2^n$ tend vers 0, on en déduit que
$$-2\varepsilon_n+\frac{1}{2^{n+1}}+o(\varepsilon_n)=0.$$
Autrement dit,
$$\varepsilon_n\sim_{+\infty}\frac{1}{4\cdot 2^n}.$$
Ceci prouve exactement que
$$u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4\cdot 2^n}+o\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Planche n° 7 – Correction de l'exercice.

1. Dans cette expérience aléatoire qui consiste à tirer une boule dans l'urne, on appelle succès l'évènement «tirer une boule blanche» de probabilité p. Alors la variable aléatoire X_1 qui est égale au rang d'apparition du premier succès lorsqu'on répète cette expérience de manière identique et indépendante suit une loi géométrique de paramètre p ($X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$).

   On en déduit alors d'après le cours que $E(X_1) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X_1) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

2. Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième boule blanche. On a $X_2(\Omega) = [|2; +\infty|[$ car la deuxième boule blanche peut apparaître au plus tôt au 2ème tirage (mais pas au rang 1 car pour obtenir une deuxième boule blanche il faut a minima avoir fait au moins un tirage pour obtenir une première boule blanche) ou au 3ème etc.

   De par son support, on voit bien déjà que X_2 ne suit pas une loi géométrique.

   Soit $n \in [|2; +\infty|[$. Calculons $P(X_2 = n)$: On comprend bien que le rang d'apparition de la 2ème boule blanche dépend du rang d'apparition de la première boule blanche. On introduit donc le s.c.e $\{X_1 = k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$. D'après la formule des probas totales appliquées à ce s.c.e., on a :

$$\begin{aligned} P(X_2 = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P\left((X_1 = k) \cap (X_2 = n)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(X_1 = k\right) P_{(X_1=k)}\left(X_2 = n\right). \end{aligned}$$

   Or, $P_{(X_1=k)}\left(X_2 = n\right) = 0$ si $k \geq n$, car le rang d'apparition k de la première boule blanche ne peut être supérieur au rang d'apparition n de la deuxième boule blanche. D'où

$$P(X_2 = n) = \sum_{k=1}^{n-1} P\left(X_1 = k\right) P_{(X_1=k)}\left(X_2 = n\right)\ .$$

   Par ailleurs, notons pour $i \in \mathbb{N}^*$, B_i =«tirer une boule blanche au i-ème tirage» et N_i =« tirer une boule noire au i-ème tirage». Alors pour $k < n$, on a

$$P_{(X_1=k)}\left(X_2 = n\right) = P(N_{k+1} \cap ... \cap N_{n-1} \cap B_n)\ .$$

   En effet, sachant que l'on a obtenu une première boule blanche au rang k pour la deuxième blanche apparaisse au rang n il faut et il suffit qu'entre (c'est à dire des rangs $k+1$ à $n-1$) on ait obtenu que des boules noires et au rang n une boule blanche. Ensuite par indépendance des évènements (les tirages étant effectués de manière indépendante), on en déduit que

$$P_{(X_1=k)}\left(X_2 = n\right) = P(N_{k+1}) \times \cdots \times P(N_{n-1}) \times P(B_n) = (1-p)^{(n-1)-(k+1)+1}p\ .$$

   Autrement dit,

$$P_{(X_1=k)}\left(X_2 = n\right) = (1-p)^{n-k-1}p\ .$$

   Par ailleurs, $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ donc $P(X_1 = k) = (1-p)^{k-1}p$.

   D'où

$$P(X_2 = n) = \sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^{k-1}p(1-p)^{n-k-1}p = \sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^{n-2}p^2 = (1-p)^n p^2 \sum_{k=1}^{n-1} 1 = (1-p)^{n-2}p^2(n-1).$$

3. Cette dernière question généralise les précédentes. Il s'agit d'une loi de k-ième succès dans le cadre de répétitions indépendantes. Le jury n'attendait pas une justification aussi formelle qu'à la question précédente (justifier <u>sans calculs</u>) mais voulait voir si le candidat percevait le principe général de cette loi.

   La présence du coefficient binomial suggère un raisonnement proche de celui de la loi binomiale consistant à compter le nombre de possibilités de placer des «succès». L'évènement $\{X_k = n\}$ est réalisé ssi la k-ième boule blanche apparait au n-ième tirage ce qui est le cas ssi il y eu eu exactement le tirage de $k-1$ boules blanches sur les $n-1$ premiers tirages (on notera que $n \geq k$ est nécessaire et que cette hypothèse était donnée).

   Il y a, d'une part, $\binom{n-1}{k-1}$ façons de placer ces $k-1$ tirages où l'on tire une boule blanche parmi les $n-1$ premiers tirages.

   Puis, d'autre part, pour chacun de ces placements de $k-1$ tirages avec boule blanche, la probabilité d'obtenir la k-ième boule blanche au n-ième tirage est, par indépendance, le produit de p^k (réalisation des k tirages avec boules blanches) par $(1-p)^{n-k}$ (réalisation des $n-k$ tirages avec une boule noire), c-à-d $p^k(1-p)^{n-k}$.

   On obtient donc au final, par principe multiplicatif, que pour tout $k \geq n$:

$$\mathbb{P}(X_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

Planche n° 8 – Correction du problème.

1. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ car c'est une somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = 1/x+1 > 0$ car $x > 0$. Donc f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
2. De plus de façon évidente f est continue sur $]0,+\infty[$ (car somme de fonctions continues sur $]0,+\infty[$). D'où d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ dans
$$f(]0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R} \, .$$
Or $n \in \mathbb{R}$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. Donc (E_n) admet une unique solution, notée x_n, sur $]0,+\infty[$.
3. (a) On étudie les variations de la différence :
$$g : x \mapsto (x) = \ln(x) - x \, .$$
La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ (car c'est une somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$) et , pour tout $x \in]0,+\infty[$, $g'(x) = 1/x - 1 = 1 - x/x$ qui est du signe de $1-x$ sur $]0,+\infty[$.
On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	1	
$1-x$	$+$	0	$-$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
g	$\nearrow$	-1	$\searrow$

Ainsi g admet sur $]0,+\infty[$ un maximum atteint en 1 et qui vaut -1. D'où $\forall x \in]0,+\infty[$, $g(x) < 0$. Autrement dit, $\forall x \in]0,+\infty[$, $\ln x < x$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On compare les images :
$$\begin{aligned} f\left(\frac{n}{2}\right) &= \ln\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2} < \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n \\ f(n) &= \ln(n) + n \geq n \text{ car } n \geq 1 \end{aligned}$$
Donc
$$f\left(\frac{n}{2}\right) \leq f(x_n) \leq f(n) \, .$$
Et comme f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et que $n/2$, x_n et n en sont éléments, on en déduit que
$$\frac{n}{2} \leqslant x_n \leqslant n$$

(c) Ainsi, on a :
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{2} \leqslant x_n \leqslant n$
- $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{n}{2} = +\infty$

D'où l'on déduit, par le théorème de comparaison, que $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} x_n = +\infty$.

4. (a) Soit $n > 0$.

$$\begin{aligned}
u_n - 1 &= \frac{n - x_n}{\ln n} - 1 \\
&= \frac{n - x_n - \ln(n)}{\ln n} \quad \text{car } x_n = n - \ln(x_n) \text{ par définition de } x_n \\
&= \frac{n - n + \ln(x_n) - \ln(n)}{\ln n} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n}
\end{aligned}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n - 1 = \dfrac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De l'encadrement de x_n de (3.b) on peut en déduire que

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln n} \leqslant \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n} \leqslant 0$$

avec $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln n} = 0$ par quotient. Ainsi, par le théorème d'encadrement, on déduit que

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n} = 0 \ .$$

D'où, $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} (u_n - 1) = 0$ aussi d'après (4.a). Donc $(u_n)_n$ converge vers 1.

(c) D'après la définition de u_n, on a

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{n - x_n}{\ln n} = \lim_{n \mapsto +\infty} u_n = 1 \ .$$

Donc $n - x_n \sim \ln(n)$. Et donc $\ln(x_n) \sim \ln(n)$, car par définition de (x_n), on a $\ln(x_n) = n - x_n$. De plus ,

$$1 - u_n = -\frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n} \ .$$

On va maintenant donner un équivalent de $\ln(x_n/n)$: Pour cela montrons d'abord que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} x_n/n = 1$.

Par définition de x_n, on a $\ln(x_n) + x_n = n$ et donc $x_n = n - \ln(x_n)$. On en déduit

$$\frac{x_n}{n} = 1 - \frac{\ln(x_n)}{n}.$$

En utilisant l'encadrement de x_n de (3.b), on peut en déduire un encadrement de $1 - \dfrac{\ln(x_n)}{n}$ et montrer par le théorème d'encadrement que

$$\lim_{n \mapsto +\infty} 1 - \frac{\ln(x_n)}{n} = 1 \ .$$

D'où l'on peut en conclure que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{x_n}{n} = 1$.

Et comme $\ln(x) \sim x - 1$ quand $x \to 1$ on en déduit que

$$\ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \sim \frac{x_n}{n} - 1 = \frac{x_n - n}{n} = \frac{-\ln(x_n)}{n}$$

et donc

$$1 - u_n \sim -\frac{-\ln(x_n)}{n\ln(n)} \sim \frac{1}{n}$$

puisque $\ln(x_n) \sim \ln(n)$ d'après ce que l'on a montré ci-dessus. D'où $1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Planche n° 8 – Correction de l'exercice.

Le support de X est $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$. Calculons maintenant, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(X = k)$: Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note U_k l'évènement «tirer une boule dans la boîte B_k». En appliquant la formule des probabilités totales au s.c.e. $(U_1, ..., U_n)$, on obtient :

$$P(X = k) = \sum_{i=1}^{n} P((X = k) \cap U_i) = \sum_{i=1}^{n} P(U_i) P_{U_i}(X = k)$$

avec

- $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(U_i) = \dfrac{1}{n}$ (car équiprobabilité)
- $P_{U_i}(X = k) = 0$ si $i < k$ (car pas de boule numéro k dans l'urne U_i si $i < k$) et $P_{U_i}(X = k) = \dfrac{1}{i}$ si $i \geq k$ (car dans ce cas l'urne U_i contient i boules dont une seule numéro k).

D'où,

$$P(X = k) = \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}.$$

Planche nº 9 – Correction du problème.

1. N suit une loi de Poisson de paramètre λ, d'où d'après le cours $E(N) = \lambda$.
2. En moyenne λ voitures arrivent au péage en 1h.
3. Soit $i \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Soit $k < i$. $P_{(N=k)}(X = i)$ correspond à la probabilité que i voitures se présentent au guichet numéro 1 en 1 heure sachant que k voitures sont arrivées au péage dans l'heure. Comme il ne peut pas y avoir plus de voitures qui se présentent au guichet que de voitures se présentant au péage en 1h, on en déduit facilement que $P_{[N=k]}(X = i) = 0$.
   (b) Soit $k \geqslant i$. Notons Y la variable aléatoire qui compte le nombre de voitures se présentant au guichet numéro 1 lorsque k voitures arrivent au péage. On appelle succès l'évènement «la voiture choisit de passer par le guichet numéro 1» de probabilité $1/10$ (car les voitures choisissent un des guichets de manière équiprobable). Les voitures choisissant le guichet par lequel passer de manière indépendantes, on a que $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(k, 1/10)$. On en déduit alors que

$$P_{[N=k]}(X = i) = P(Y = i) = \binom{k}{i}\left(\frac{1}{10}\right)^i\left(\frac{9}{10}\right)^{k-i}.$$

   (c) En appliquant la formule des probabilités totales avec le s.c.e $\{(N = k),\ k \in \mathbb{N}\}$, on obtient

$$P(X = i) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((N = k) \cap (X = i)) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k)P_{(N=k)}(X = i).$$

En utilisant la question précédente, il vient

$$\begin{aligned}
P(X = i) &= \sum_{k=0}^{i-1} P(N = k) \times 0 + \sum_{k=i}^{+\infty} P(N = k)\binom{k}{i}\left(\frac{1}{10}\right)^i\left(\frac{9}{10}\right)^{k-i} \\
&= \sum_{k=i}^{+\infty} P(N = k)\binom{k}{i}\left(\frac{1}{10}\right)^i\left(\frac{9}{10}\right)^{k-i} \\
&= \sum_{k=i}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\binom{k}{i}\left(\frac{1}{10}\right)^i\left(\frac{9}{10}\right)^{k-i} \\
&= e^{-\lambda}\left(\frac{1}{10}\right)^i \sum_{k=i}^{+\infty}\binom{k}{i}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-i}\frac{\lambda^k}{k!}
\end{aligned}$$

en sortant les constantes indépendantes de l'indice de sommation k.

4. En développant le coefficient binomiale et en simplifiant

$$\binom{k}{i}\frac{1}{k!} = \frac{k!}{i!(k-i)!}\frac{1}{k!} = \frac{1}{i!(k-i)!}$$

il vient

$$\begin{aligned}
P(X = i) &= e^{-\lambda}\left(\frac{1}{10}\right)^i \sum_{k=i}^{+\infty} \lambda^k \left(\frac{9}{10}\right)^{k-i}\frac{1}{i!(k-i)!} \\
&= e^{-\lambda}\left(\frac{1}{10}\right)^i \frac{1}{i!}\sum_{k=i}^{+\infty} \lambda^k \frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{k-i}}{(k-i)!}
\end{aligned}$$

puis en effectuant le changement de variable $j = k - i$, il vient

$$\begin{aligned}
P(X=i) &= e^{-\lambda}\left(\frac{1}{10}\right)^i \frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^{j+i}\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^j}{j!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda^i\left(\frac{1}{10}\right)^i \frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{9}{10}\lambda\right)^j}{j!} \\
&= e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{10}\right)^i \frac{1}{i!}e^{\frac{9}{10}\lambda} \\
&= \frac{\left(\frac{\lambda}{10}\right)^i}{i!}e^{-\lambda/10}
\end{aligned}$$

On a donc que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall i \in \mathbb{N},\ P(X=i) = \frac{\left(\frac{\lambda}{10}\right)^i}{i!}e^{-\lambda/10}\ .$$

D'où, $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda/10)$.

5. D'après le cours, X admet une espérance et une variance toutes deux égales au paramètre de la loi de Poisson, c'est à dire $\lambda/10$.

Planche n° 9 – Correction de l'exercice.

1. f est isomorphe à $X \mapsto AX$ où
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
qui est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. On calcule
$$A^2 := 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3A\ .$$
Donc $f \circ f = 3f$.
3. Une base de Ker$f$ est donnée par Vect$\{(-1,1,1)\}$. Par le théorème du rang la dimension de l'image de f est 2. Or la première colonne est la somme des colonnes 2 et 3 donc Im(f) a pour base Vect$\{(1,2,-1),(1,-1,2)\}$.
4. D'après les questions précédentes $p := f/3$ est telle que $p \circ p = p$ donc c'est un projecteur. De plus $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(p)$ donc p est un projecteur sur Vect$\{(1,2,-1),(1,-1,2)\}$ de direction Vect$\{(-1,1,1)\}$.

Planche n° 10 – Correction du problème.

1. Le premier tirage se fait dans une urne qui contient n boules indiscernables au toucher. D'où $X(\Omega) = [|1, n|]$ et les tirages étant équiprobables, on a $\forall k \in [|1, n|],\ P(X = k) = 1/n$. D'où $X \hookrightarrow \mathcal{U}([|1, n|])$. En particulier, d'après le cours, il vient directement que
$$E(X) = \frac{n+1}{2}, \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}\ .$$
2. Dans le pire des cas, on pioche lors du premier tirage la boule numérotée 1 et il n'y a dans la deuxième urne qu'une boule numérotée 1. L'autre cas extrême est celui pour lequel on pioche au premier coup la boule numérotée n, auquel cas la deuxième urne contient n boules numérotées de 1 à n. Ainsi, au lors du deuxième tirage on peut tirer une boule ayant un numéro compris entre 1 et n. Donc $Y(\Omega) = [|1, n|]$.
3. Soit $k \in [|1, n|]$.
   (a) Sachant que l'évènement $[X = k]$ est réalisé, c'est à dire que l'on a tiré la boule numéro k au premier tirage, alors d'après l'énoncé, on place dans la deuxième urne 1 boule numéroté 1, 2 boules numérotées 2,...., k boules numérotées k. D'où au total la deuxième urne contiendra $1 + 2 + ... + k = \sum_{j=1}^{k} j = k(k+1)/2$ boules.
   (b) Soit $j \in [|1, k|]$, alors sachant $(X = k)$ il y a dans la deuxième urne j boules numérotées j d'après l'énoncé et donc comme chacune des boules à même probabilité d'être tirée (on est en situation d'équiprobabilité), il vient :
$$P_{[X=k]}(Y = j) = \frac{\text{nb d'issues favorables}}{\text{nb d'issues totales}} = \frac{j}{\dfrac{k(k+1)}{2}} = \frac{2j}{k(k+1)}.$$
   Soit $j \in [|k+1, n|]$ alors sachant $(X = k)$ il n'y a pas de boules numérotées j dans la deuxième urne et donc
$$P_{[X=k]}(Y = j) = 0.$$
4. Soit $j \in [|1, n|]$.

D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{[X=k]\}_{k\in[|1,n|]}$, on a

$$\begin{aligned}
P(Y=j) &= \sum_{k=1}^{n} P_{[X=k]}(Y=j)P(X=k)\\
&= \sum_{k=j}^{n} P_{[X=k]}(Y=j)P(X=k) \quad cf.q.3)b)\\
&= \sum_{k=j}^{n} \frac{2j}{k(k+1)}\times\frac{1}{n} \quad cf.q.3)b)\\
&= \frac{2j}{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\\
&= \frac{2j}{n}\sum_{k=j}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \quad \text{cf.indication}\\
&= \frac{2j}{n}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{n+1}\right) \quad \text{par télescopage}\\
&= \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)} \quad \text{en simplifiant.}
\end{aligned}$$

5. Y a un support fini, elle admet donc une espérance. De plus,

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{j=1}^{n} jP(Y=j)\\
&= \sum_{j=1}^{n} j\frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}\\
&= \frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n} j(n+1-j)\\
&= \frac{2}{n(n+1)}\left((n+1)\sum_{j=1}^{n} j-\sum_{j=1}^{n} j^2\right)\\
&= \frac{2}{n(n+1)}\left((n+1)\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= (n+1)-\frac{2n+1}{3}\\
&= \frac{n+2}{3}.
\end{aligned}$$

6. Soit $n\geq 2$. Si X et Y étaient indépendantes alors, pour tout couple $(k,j)\in[|1,n|]^2$, on devrait avoir $P_{[X=k]}(Y=j)=P(Y=j)$. Or, par exemple $P_{[X=1]}(Y=2)=0$ et d'après (4) $P(Y=2)=\frac{2(n-1)}{n(n+1)}\neq 0$. Les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes.

   Pour $n=1$, les deux variables aléatoires X et Y sont certaines égales à 1. Donc, pour tout couple $(k,j)\in[|1,n|]^2$, on a $P_{[X=k]}(Y=j)=1=P(Y=j)$.
   Les variables X et Y sont donc indépendantes dans ce cas.

7. — Par le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} kjP([X=k]\cap[Y=j]) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} kjP([X=k])P_{[X=k]}([Y=j]) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} kj \times \frac{1}{n} \times \frac{2j}{k(k+1)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+1}\sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+1} \times \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\
&= \frac{1}{3n}\sum_{k=1}^{n} k(2k+1) = \frac{1}{3n}\left(2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right) \\
&= \frac{1}{3n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \frac{n+1}{18}\left(2(2n+1)+3\right) \\
&= \frac{(n+1)(4n+5)}{18},
\end{aligned}$$

— Par la formule de König-Huygens,

$$\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= \frac{(n+1)(4n+5)}{18} - \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \\
&= \frac{n+1}{18}\left(4n+5-3(n+2)\right) \\
&= \frac{(n+1)(n-1)}{18} = \frac{n^2-1}{18}
\end{aligned}$$

(On remarque que, pour $n = 1$, la covariance est nulle, ce qui est cohérent avec ce qu'on a mentionné ci-avant quant à l'indépendance de X et Y.)

8. On déduit de 7. que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; n^2-1 &\neq 0 \\
\Leftrightarrow\; n &\neq 1 \quad (\text{ puisque } n > 0)
\end{aligned}$$

Donc les variables ne sont pas indépendantes pour tout $n \geq 2$.

Pour $n = 1$ on ne peut pas répondre sur la question de l'indépendance à partir de la seule covariance, sa nullité étant nécessaire mais pas suffisante.

On peut donc dire que l'on retrouve le résultat de la question 6. quand $n \geq 2$.

Planche nº 10 – Correction de l'exercice.

1. Soit $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$. On a $f' : x \mapsto -x/(1+x) < 0$. Donc f est décroissante. De plus $f(0) = 0$ donc f est négative ce qui assure l'inégalité de droite. Pour l'inégalité de gauche on procède de même avec $g : x \mapsto x - x^2/2 - \ln(1+x)$ qui a pour dérivée $x \mapsto -x^2/(1+x) < 0$. Donc g est décroissante. De plus $g(0) = 0$ donc g est négative et l'inégalité de gauche est vérifiée.
2. On applique la série d'inégalité ci-dessus avec $x = k/n^2 \in]0, +\infty[$. On obtient
$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}\ .$$
En sommant on obtient
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2n^4} \leq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\ .$$
On obtient le résultat demandé en se rappelant que
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
3. On rappelle que
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ .$$
En conséquence on a
$$\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\ .$$
4. La théorème d'encadrement assure que $(u_n)_n$ converge vers $1/2$.

Planche n° 11 – Correction du problème.

1. (a) Si $x \in]-1,1[$ alors $-x \in]-,1,1[$ et $f(-x) = 0 = f(x)$. Si $x \leq -1$ ou $x \geq 1$ alors $-x \leq -1$ ou $-x \geq 1$ et

$$f(-x) = \frac{1}{2(-x)^2} = f(x) \ .$$

En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = f(x)$. Donc f est paire.

(b)
- f est positive sur $\mathbb{R}$ de manière évidente.
- f continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ de manière évidente.
- Soit $A > 0$.

$$\int_1^A f(x)\,dx = \int_1^A \frac{1}{2x^2}dx = \left[\frac{-1}{2x}\right]_1^A = \frac{-1}{2A} + \frac{1}{2} \to_{A\mapsto+\infty} \frac{1}{2}$$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut $1/2$.

Donc par parité $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx$ converge aussi et vaut $1/2$

De plus, $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 0dx = 0$. Donc par la relation de Chasles $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx = 1/2+0+1/2 = 1 \ .$$

D'où f peut être considérée comme une densité de probabilité.

2. Pour $x \leq -1$ ou $x \geq 1$, $xf(x) = \frac{1}{2x} \geq 0$. Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}$ divergent (intégrales de Riemann avec $\alpha = 1$). D'où, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ diverge. D'où X n'a pas d'espérance.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathrm{P}(\ln(|X|) \leq x) \\ &= \mathrm{P}(|X| \leq e^x) \\ &= \mathrm{P}(-e^x \leq X \leq e^x) \\ &= F_X(\mathrm{e}^x) - F_X(-\mathrm{e}^x) \end{aligned} .$$

(b) Comme X est à densité, F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ (cela correspond à l'intervalle de continuité de f). Donc par composition, F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\{x \in \mathbb{R},\ e^x \neq \pm1 \text{ et } -e^x \neq \pm1\} = \mathbb{R}^*$ par composition. Donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^*$. D'où Y est à densité. Et une densité de Y est alors donnée par la fonction g qui vérifie $g(x) = F_Y'(x)$ là où Y est C^1 et par $g(0) = 0$ (on choisit la valeur arbitraire 0 en 0). Autrement dit,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = F_X'(\mathrm{e}^x)\,e^x + F_X'(-\mathrm{e}^x)\,e^x = e^x\left[f(\mathrm{e}^x) + f(-\mathrm{e}^x)\right] \ .$$

Pour $x < 0$, $e^x \in]-1,1[$ et $-e^x \in]-1,1[$, d'où $f(\mathrm{e}^x) = 0$ et $f(-\mathrm{e}^x) = 0$ et donc $g(x) = 0$.

Et pour $x > 0$ alors $e^x > 1$ et $-e^x < -1$ donc

$$\begin{aligned} g(x) &= e^x \left[\frac{1}{2(e^x)^2} + \frac{1}{2(-e^x)^2} \right] \\ &= e^{-x} \end{aligned}$$

Ainsi, une densité de Y est donnée par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

D'où $Y \hookrightarrow \varepsilon(1)$.

(c) Si $x \geq 0$ alors $-x \leq 0$ et $0 < e^{-x} \leq 1$ donc $0 \leq 1 - e^{-x} < 1$ et $1 - e^{-x} \in [0; 1[$.
Si $x < 0$ alors $-x > 0$ et $e^{-x} > 1$ donc $1 - e^{-x} < 0$

(d) Soit F_Z sa fonction de répartition de Z. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(Z \leq x) \\ &= P(-\ln(1-U) \leq x) \\ &= P\left(1 - U \geq e^{-x}\right) \\ &= P\left(U \leq 1 - e^{-x}\right) \\ &= F_U\left(1 - e^{-x}\right). \end{aligned}$$

Par composition, comme F_U est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sauf en 0 et 1, on en déduit que F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\{x \in \mathbb{R},\ 1 - e^{-x} \neq 0 \ \text{ et } \ 1 - e^{-x} \neq 1\} = \mathbb{R}^*$.

Donc Z est bien à densité et une densité de Z est donnée par la fonction g définie par $g(0) = 0$ (en 0 on choisit la valeur arbitraire 0) et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = F_Z'(x) = e^{-x} F_u'\left(1 - e^{-x}\right) = e^{-x} h\left(1 - e^{-x}\right),$$

où h désigne une densité de U.

Pour la suite nous considérerons h définie par $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Si $x \geq 0$ alors $1 - e^{-x} \in [0; 1[$ et $h(1 - e^{-x}) = 1$ donc $g(x) = e^{-x}$

Si $x < 0$ alors $1 - e^{-x} < 0$ donc $h(1 - e^{-x}) = 0$ et donc $g(x) = 0$.

Ainsi, on a

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En conclusion, $Z \hookrightarrow \varepsilon(1)$.

Planche nº 11 – Correction de l'exercice.

1. Soit pour n entier non-nul, la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$u_n > 0$".
   — $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraie car $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.
   — Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à tout rang inférieur à un n donné. Alors

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n\, u_{n+1}}$$

   existe et est positif donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Comme $(u_n)_n$ est une suite de réels positifs si elle a une limite cette limite appartient à $\mathbb{R}^+ \cup +\infty$. De plus si cette limite est finie, notons l cette limite. On aurait

$$l = \sqrt{l^2} = |l| \ .$$

   Or comme $(u_n)_n$ est une suite de réels positifs la limite peut *a priori* tout réel positif ou nul.

3. (a) Comme les termes de la suite $(u_n)_n$ sont positifs, on a

$$v_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\ln(u_n) + \ln(u_{n+1})\right) = \frac{1}{2}\left(v_n + v_{n+1}\right) \ .$$

   (b) Le jury indique que 1 et $(-1/2)^n$ sont solutions et que la base de solutions est de dimension 2. On trouve alors qu'il existe des réels A et B tels que

$$v_n = A\left(-\frac{1}{2}\right)^n + B \ .$$

   (c) D'après la question précédente $(v_n)_n$ converge vers un réel B.

4. En conséquence $(u_n)_n$ converge vers un réel positif ou nul.

Planche n° 12 – Correction du problème.

1. Chaque personne a une probabilité $p \in]0,1[$ de rentrer dans le magasin et une probabilité $q \in]0,1]$ d'effectuer un achat unique si elle rentre. Si on note R=« la personne rentre dans le magasin » et E=« la personne effectue un achat » alors l'énoncé donne $\mathbb{P}(R) = p$ et $\mathbb{P}_R(E) = q$. Comme $A = R \cap E$ on a
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(E) = pq\ .$$
De même on trouve $\mathbb{P}(B) = p(1-q)$.
2. On reconnaît un schéma de Bernoulli : chaque personne rentre dans le magasin et effectue un achat avec probabilité pq et ceci indépendamment des autres personnes. Il y a N personnes au total et X est le nombre d'achats donc de « succès » lors de ces N « répétitions ». Donc $X \sim \mathcal{B}(N, pq)$.
   De même $Y \sim \mathcal{B}(N, p(1-q))$.
   $X+Y$ est le nombre de personnes qui rentrent dans le magasin donc $X+Y \sim \mathcal{B}(N, p)$.
3. Comme X et Y sont à valeurs dans $[\![0, N]\!]$ on a $[X+Y=0] = [X=0] \cap [Y=0]$.
Donc
$$\mathbb{P}([X=0] \cap [Y=0]) = \mathbb{P}(X+Y=0) = (1-p)^N\ .$$
Or $\mathbb{P}(X=0) = (1-pq)^N$ et $\mathbb{P}(Y=0) = (1-p(1-q))^N$. On a donc :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=0] \cap [Y=0]) = \mathbb{P}(X=0) \times \mathbb{P}(Y=0) &\iff 1-p = (1-pq)(1-p(1-q))\\ &\iff 1-p = 1-pq-p+p^2q+pq-p^2q^2\\ &\iff p^2q = p^2q^2\\ &\iff 1 = q\end{aligned}$$
car $p \neq 0$ et $q \neq 0$. Ainsi si $q \neq 1$ alors X et Y ne sont pas indépendantes.
   Si $q = 1$ alors $Y = 0$ (variable constante) et donc X et Y sont indépendantes.
4. On a $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X,Y)$ donc :
$$\text{Cov}(X,Y) = \frac{1}{2}\Big(V(X+Y) - V(X) - V(Y)\Big) = \frac{1}{2}\Big(Np(1-p) - Npq(1-pq) - Np(1-q)(1-p(1-q))\Big)$$
avec la question 2. Donc :
$$\text{Cov}(X,Y) = \frac{Np}{2}(2pq^2 - 2pq) = Np^2q(q-1)$$
5. (a) Cette fois si $n \in \mathbb{N}$ alors sachant $[N=n]$ la loi conditionnelle de X est $\mathcal{B}(n, pq)$.
   On a donc $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$:
$$\mathbb{P}_{[N=n]}(X=k) = \begin{cases} \binom{n}{k}(pq)^k(1-pq)^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$
   De plus les évènements $[N=n]$ pour $n \in \mathbb{N}$ forment un sce donc d'après la formule des probabilités totales on a pour $k \in \mathbb{N}$:
$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n) \times \mathbb{P}_{[N=n]}(X=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n) \times \mathbb{P}_{[N=n]}(X=k)$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}(X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\times\binom{n}{k}(pq)^k(1-pq)^{n-k}=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda pq)^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\Big(\lambda(1-pq)\Big)^{n-k}}{(n-k)!}$$

On utilise le changement d'indice $n'=n-k$:

$$\mathbb{P}(X=k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda pq)^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Big(\lambda(1-pq)\Big)^{n}}{n!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda pq)^k}{k!}\mathrm{e}^{\lambda(1-pq)}=\mathrm{e}^{-\lambda pq}\frac{(\lambda epq)^k}{k!}$$

Donc $X\sim\mathcal{P}(\lambda pq)$.

(b) On a :

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{2}\Big(V(X+Y)-V(X)-V(Y)\Big)=\frac{1}{2}\Big(\lambda p-\lambda pq-\lambda p(1-q)\big)\Big)=0$$

(c) Pour $(k,j)\in\mathbb{N}^2$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=k]\cap[Y=j]) &= \mathbb{P}([X=k]\cap[X+Y=k+j])\\ &= \mathbb{P}(X+Y=k+j)\times\mathbb{P}_{[X+Y=k+j]}(X=k)\\ &= \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^{k+j}}{(k+j)!}\times\binom{k+j}{k}(q)^k(1-q)^j\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=k]\cap[Y=j]) &= \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^{k+j}}{k!j!}(q)^k(1-q)^j\\ &= \mathrm{e}^{-\lambda pq}\mathrm{e}^{-\lambda p(1-q)}\frac{(\lambda pq)^k}{k!}\frac{(\lambda p(1-q))^j}{j!}\\ &= \mathbb{P}(X=k)\times\mathbb{P}(Y=j)\end{aligned}$$

Ainsi X et Y sont indépendantes.

Planche nº 12 – Correction de l'exercice.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}(n)$:

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_n & a_{n+1} & a_n \end{pmatrix}$$

où $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$.
— $\mathcal{P}(1)$ est vraie pour $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$.
— Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un rang n donné. Alors

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_n & a_{n+1} & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_{n+3} & a_{n+2} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+1} \end{pmatrix}$$

où $a_{n+3} = a_{n+2} + 2a_{n+1}$. Donc $\mathcal{P}(n)$ est vaie pour tout entier positif n.

2. Le jury indique que 2^n et $(-1)^n$ sont des solutions et que l'espace des solutions est un espace vectoriel de dimension 2. Donc il existe des réels α et β tels que la suite a_n soit égale à $\alpha 2^n + \beta(-1)^n$. Comme par ailleurs $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$. On en déduit que $a_n = 2^n/6 + (-1)^n/3$.

   On en déduit que pour tout $n > 0$,

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{n-1} + (-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} & 2^{n-1} + (-1)^n \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^{n+1} + (-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^{n-1} + (-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} & 2^{n-1} + (-1)^n \end{pmatrix}$$