Optimisation

Adrien Blanchet

2 mai 2025

Table des matières

Première partie

Outils

Chapitre 1

Formule de Taylor et développements limités

L'idée générale de de chapitre est de déterminer une technique qui permette d'exprimer une fonction sous la forme d'une somme infinie, ou d'une série, de fonctions plus simples. La série ainsi obtenue peut souvent être limitée à un nombre fini de termes, ce qui permet d'obtenir une approximation de la fonction. Mais moins on utilise de termes de la séquence, plus l'approximation est simple. Souvent, l'imprécision qui en résulte (c'est-à-dire la somme partielle des termes omis) peut être décrite par une équation impliquant la notation Big O (voir également le développement asymptotique).

1.1 Histoire

Le philosophe grec de l'Antiquité, Zénon d'Élée, s'est penché sur le problème de l'addition d'une série infinie pour obtenir un résultat fini, mais l'a rejeté comme une impossibilité, ce qui a donné lieu au paradoxe de Zénon. Plus tard, Aristote a proposé une résolution philosophique du paradoxe, mais le contenu mathématique est resté apparemment sans solution jusqu'à ce qu'il soit repris par Archimède, comme il l'avait été avant Aristote par l'atomiste présocratique Démocrite. C'est grâce à la méthode d'épuisement d'Archimède qu'un nombre infini de subdivisions progressives peuvent être effectuées pour obtenir un résultat fini. Liu Hui a utilisé indépendamment une méthode similaire quelques siècles plus tard.

Au XIVe siècle, les premiers exemples de séries de Taylor spécifiques (mais pas la méthode générale) ont été donnés par Madhava de Sangamagrama. Bien qu'aucune trace de son travail n'ait survécu, les écrits de ses disciples de l'école d'astronomie et de mathématiques du Kerala suggèrent qu'il a trouvé les séries de Taylor pour les fonctions trigonométriques du sinus, du cosinus et de l'arctangente. Au cours des deux siècles suivants, ses disciples ont développé d'autres expansions de séries et des approximations rationnelles.

À la fin de l'année 1670, une lettre de John Collins montrait à James Gregory plusieurs séries de Maclaurin (sin , cos, arcsin) dérivées d'Isaac Newton, et lui disait que Newton avait développé une méthode générale pour développer les fonctions en série. Newton avait en fait utilisé une méthode lourde impliquant une division longue des séries et une intégration terme à terme, mais Gregory ne le savait pas et entreprit de découvrir une méthode générale par lui-même. Au début de l'année 1671, Gregory découvrit quelque chose comme la série générale de Maclaurin et envoya une lettre à Collins comprenant les séries pour arctan, tan, etc. Cependant, pensant avoir simplement redéveloppé une méthode de Newton, Gregory n'a jamais décrit comment il avait obtenu ces séries, et on ne peut qu'en déduire qu'il avait compris la méthode générale en examinant le travail de grattage qu'il avait griffonné au dos d'une autre lettre datant de 1671.

En 1691-1692, Isaac Newton a écrit une déclaration explicite de la série de Taylor et Maclaurin dans une version non publiée de son ouvrage *De Quadratura Curvarum*. Cependant, ce travail n'a jamais été achevé et les sections correspondantes ont été omises dans les parties publiées en 1704 sous le titre *Tractatus de Quadratura Curvarum*.

Ce n'est qu'en 1715 qu'une méthode générale de construction de ces séries pour toutes les fonctions pour lesquelles elles existent a finalement été publiée par Brook Taylor, qui a donné son nom à ces séries.

La série de Maclaurin a été nommée en l'honneur de Colin Maclaurin, professeur à Édimbourg, qui a publié le cas particulier du résultat de Taylor au milieu du 18e siècle.

1.2 Rappels : Topologie dans un espace métrique

La comparaison asymptotique est une méthode consistant à étudier la vitesse de croissance d'une fonction. Par exemple, la fonction exponentielle croit plus vite qu'une fonction linéaire. La comparaison asymptotique permet aussi d'étudier la vitesse d'une fonction quelconque par rapport à une fonction considérée comme plus « simple ». Celle-ci est souvent choisie sur une échelle de référence, contenant en général au moins certaines fonctions dites élémentaires, en particulier les sommes et produits de polynômes, d'exponentielles et de logarithmes. La comparaison s'effectue en l'infini ou alors au voisinage d'un point. Il nous faut donc précisément définir la notion de voisinage, ou de topologie. Comme nous allons principalement travailler dans $\mathbb{R}^N$ nous allons restreindre notre définition de topologie à des espaces dits “métriques”.

1.2.1 Espaces métriques

Un espace métrique est un ensemble assorti d'une notion de distance entre ses éléments, généralement appelés points. La distance est mesurée par une fonction appelée fonction métrique ou fonction de distance. Les espaces métriques constituent le cadre le plus général pour l'étude de nombreux concepts de l'analyse mathématique et de la géométrie.

L'exemple le plus familier d'un espace métrique est l'espace euclidien tridimensionnel avec sa notion habituelle de distance. D'autres exemples bien connus sont la sphère équipée de la distance angulaire et le plan hyperbolique. Une métrique peut correspondre à une notion métaphorique, plutôt que physique, de distance : par exemple, l'ensemble des chaînes de 100 caractères Unicode peut être doté de la distance de Hamming, qui mesure le nombre de caractères qui doivent être modifiés pour passer d'une chaîne à une autre.

Parce qu'ils sont très généraux, les espaces métriques sont un outil utilisé dans de nombreuses branches des mathématiques. De nombreux types d'objets mathématiques ont une notion naturelle de distance et admettent donc la structure d'un espace métrique, notamment les surfaces riemanniennes, les espaces vectoriels normés et les graphes. En algèbre abstraite, les nombres p-adiques apparaissent comme des éléments de la complétion d'une structure métrique sur les nombres rationnels. Les espaces métriques sont également étudiés en tant que tels dans la géométrie métrique et l'analyse sur les espaces métriques.

De nombreuses notions fondamentales de l'analyse mathématique, notamment les boules, la complétude, ainsi que la continuité uniforme, de Lipschitz et de Hölder, peuvent être définies dans le cadre des espaces métriques. D'autres notions, telles que la continuité, la compacité et les ensembles ouverts et fermés, peuvent être définies pour les espaces métriques, mais aussi dans le cadre encore plus général des espaces topologiques dont nous parlerons en remarque.

Définition 1.1. *Un espace métrique est une paire (M, d) où M est un ensemble est d est une distance sur M au sens que $d : M \times M \to \mathbb{R}^+$ satisfait les axiomes suivants : pour tout point $(x, y, z) \in M^3$*

- *$x = y$ si et seulement si $d(x, y) = 0$ (propriété de séparation),*
- *$d(x, y) = d(y, x)$ (propriété de symétrie),*
- *$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).*

L'inégalité triangulaire est une une propriété naturelle du point de vue physique comme métaphoriques : vous pouvez arriver à z à partir de x en faisant un détour par y.

Pour comprendre l'utilité des différentes notions de distance, considérons la surface de la Terre comme un ensemble de points. Nous pouvons mesurer la distance entre deux de ces points par la longueur du chemin le plus court le long de la surface, «à vol d'oiseau» ; cette notion est particulièrement utile pour le transport maritime et l'aviation. On peut également mesurer la distance en ligne droite entre deux points à travers l'intérieur de la Terre ; cette notion est par exemple naturelle en sismologie, puisqu'elle correspond approximativement au temps que mettent les ondes sismiques à se propager entre ces deux points.

La notion de distance encodée par les axiomes des espaces métriques a relativement peu d'exigences. Cette généralité confère aux espaces métriques une grande flexibilité. En même temps, la notion est suffisamment forte pour encoder de nombreux faits intuitifs sur la signification de la distance. Cela signifie que les résultats généraux concernant les espaces métriques peuvent être appliqués dans de nombreux contextes différents.

Comme de nombreux concepts mathématiques fondamentaux, la métrique d'un espace métrique peut être interprétée de différentes manières. Une métrique particulière peut ne pas être considérée comme mesurant une distance physique, mais plutôt comme le coût du passage d'un état à un autre (comme pour les métriques de Wasserstein sur les espaces de mesures) ou le degré de différence entre deux objets (par exemple, la distance de Hamming entre deux chaînes de caractères, ou la distance de Gromov-Hausdorff entre les espaces métriques eux-mêmes).

À savoir (fait en cours) 1.1. *Dans $\mathbb{R}$, montrer que $(x, y) \mapsto |x-y|$ définit une métrique.*

- Dans $\mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto |x-y|$ définit une métrique.
  Dans $\mathbb{R}^2$ distance Euclidienne, distance L^1 (distance de Manhattan) et L^∞, distance SNCF.

Pour aller plus loin. *(*) On peut définir sur $\mathbb{R}^N$ de nombreuses autres métriques. En particulier une norme permet de définir une métrique. Rappelons que Soit E un ensemble. Une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie : pour tout point $(x, y) \in E^2$*

- *la distance d'un point à lui-même est nulle : $x = 0$ si et seulement si $N(x) = 0$,*
- *la distance entre deux points est toujours positive ou nulle : $N(x) \geq 0$,*
- *la distance entre x et y est égale à la distance entre y et x : $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$,*
- *l'inégalité triangulaire est satisfaite : $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$*

Si E un espace vectoriel et N une norme sur E.

$$d : \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & N(x-y) \end{array}$$

définie une métrique sur E.

Dans $\mathbb{R}^N$,

$$|(x_1, \cdots, x_N), (y_1, \cdots, y_N)\|_2 \mapsto \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_N - y_N|^2}$$

définie une métrique sur $\mathbb{R}^N$ associée à la norme Euclidienne.

On peut donc définir des métriques associées à la norme 1

$$|(x_1, \cdots, x_N)\|_1 := |x_1 + \cdots + x_N|$$

ou la norme

$$|(x_1, \cdots, x_N)\|_\infty := \sup_{i \in \{1, \cdots, N\}} |x_1|$$

ou, pour $p \in [1, \infty)$

$$|(x_1, \cdots, x_N)\|_p := (|x_1|^p + \cdots + |x_N|^p)^{1/p}$$

1.2.2 Topologie sur une espace métrique

Commençons par définir

Définition 1.2 (Boule ouverte)**.** *Soit (E, d) une espace métrique. Soient $x \in E$ et $r > 0$. On appelle* boule ouverte centrée en x de rayon r *l'ensemble*

$$B_r(x) := \{y \in E \,:\, d(x, y) < r\} .$$

À savoir (fait en cours) 1.2. *Dessiner les boules unités pour les normes $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathbb{R}^2$.*

- Dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}^2$ pour les différentes métriques.

Définition 1.3 (Voisinage d'un point)**.** *Soit (E, d) un espace métrique. Soit x dans E. A ensemble V est un* voisinage *de x s'il existe $r > 0$ tel que $B_r(x)$ soit inclus dans V.*

- Dans $\mathbb{R}$, le voisinage de $a \in \mathbb{R}$ est un ensemble V tel qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}$ tel que $(a-\eta, a+\eta) \subset V$.

Dans $\mathbb{R}$, le voisinage de $+\infty$ est un ensemble V tel qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $(M, +\infty) \subset V$.

$[0, 1]$ est un voisinage de $1/2$ dans $\mathbb{R}$. $(0, 1)$ aussi. Par contre dans $[0, 1)$: 0 n'a pas de voisinage alors que 1 en a.

Pour aller plus loin. *(*) Un espace métrique est un couple (ensemble,distance). On peut noter que dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes. Donc la notion de voisinage est la même pour toute les métriques associées à ces normes.*

Définition 1.4 (Ouvert et fermé)**.** *Soit (E, d) un espace métrique. Un* ouvert *est un ensemble qui est le voisinage de chacun de ses points. Un* fermé *est le complémentaire d'un ouvert.*

- $(0, 1)$ est ouvert, $[0, 1]$ est fermé. $(0, 1]$ n'est ni ouvert, ni fermé.

Pour aller plus loin. *(***) On peut aussi définir une topologie dans un espace non-métrique de la façon suivante : Soit E un ensemble. On appelle topologie sur E un ensemble de parties T de E, que l'on appelle les ouverts, qui vérifient*

- *l'ensemble vide appartient à T,*
- *l'ensemble E appartient à T,*
- *Toute réunion quelconque d'ouverts est un ouvert,*
- *Toute intersection finie d'ouvert est un ouvert.*

Il est même possible de définir une topologie à partir de ses voisinages mais ces axiomes sont plus complexes.

Une topologie permet de définir proprement les notions de limite, continuité. Ces notions dépendent en général de la topologie choisie, mais en dimension finie la propriété d'équivalence des normes assure qu'elles coïncident. La topologie permet aussi dé définir des concepts importants tels que la compacité, les géodésiques, la longueur, les variétés Riemanniennes, etc.

Définition 1.5 (Adhérence)**.** *Soit (E, d) un espace métrique.* L'adhérence *d'un ensemble $A \neq \varnothing$ est l'intersection des voisinages des points de A, on le note $\overline{A}$. Un* point adhérent *à une partie A est un élément de l'adhérence de A.*

Pour aller plus loin. *(**) Dans un espace métrique, l'adhérence de toute boule ouverte est incluse dans la boule fermée de même centre et de même rayon. Dans un espace vectoriel normé muni de la distance $(x, y) \mapsto \|x - y\|$, on a égalité. Mais dans un espace métrique quelconque, l'inclusion peut être stricte. Par exemple pour la topologie discrète sur un ensemble E, toute partie est égale à son adhérence. Or cette topologie est induite par la distance discrète (définie par : $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$, et $d(x, x) = 0$), pour laquelle les boules ouvertes de rayon 1 sont les singletons, tandis que toute boule fermée de rayon 1 est égale à E.*

- Autre façon de le voir : Pour toute partie non vide A de E, l'application qui à tout point x de E associe la distance de x à A (c'est-à-dire l'inf des distances de x à tous les points de A) est continue car 1-lipschitzienne. Les x en lesquels elle s'annule sont les points adhérents à A.

Ou encore : Un point x de E est un point adhérent à A si et seulement si x est limite d'une suite d'éléments de A.

À savoir (fait en cours) 1.3. *Quelle est l'adhérence de*

1. $(0, 1)$,
2. $[0, 1)$,

3. $\mathbb{R}$

• L'adhérence de $(0, 1)$ est $[0, 1]$.
L'adhérence de $[0, 1)$ est $[0, 1]$.
L'adhérence de $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1.2.3 Comparaisons de fonctions

Commençons par définir la négligeabilité (ou prépondérance) qui relie deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, formalisant la notion que l'une devient insignifiante devant l'autre au voisinage d'un point ou de l'infini :

Définition 1.6 (Négligeabilité)**.** *Soit $I \subset \mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère $a \in \overline{I}$.*

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a, *et on note $f \underset{a}{=} o(g)$, s'il existe un voisinage V de a et une fonction ε définie sur V qui tende vers 0 en a tels que :*

$$\forall x \in V \cap I, \quad f(x) = \varepsilon(x)\, g(x)\ .$$

On écrit alors $f \underset{a}{=} o(g)$.

La notation $f \underset{a}{=} o(g)$ est la notation de Landau qui se lit «f est un petit o de g au voisinage de a». Remarquons que a peut être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

À savoir (fait en cours) 1.4. *Soient $f : x \mapsto x^m$ et $g : x \mapsto x^p$, avec $m > p$. Montrer que :*

1. *f qui est négligeable devant g au voisinage de 0,*
2. *g est négligeable devant f au voisinage de l'infini*

• Ce qui est équivalent à dans le cas où g ne s'annule pas au voisinage de a, à

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Par exemple, avec $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto 3x$, quand $x \to \pm\infty$, $3x$ devient arbitrairement petit devant x^2. On dit alors que g est négligeable devant f au voisinage de l'infini,

Au voisinage de 0 c'est f qui est négligeable devant g.

Définition 1.7 (Equivalence)**.** *Soit $I \subset \mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère $a \in \overline{I}$.*

On dit que f est équivalente à g en a, *et on note $f \underset{a}{\sim} g$, s'il existe un voisinage V de a et une fonction ε définie sur V qui tende vers 0 en a tels que :*

$$\forall x \in V \cap I, \quad f(x) = (1 + \varepsilon(x))\, g(x)\ .$$

• Si g est non nulle au voisinage de a, alors :

$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

À savoir (fait en cours) 1.5. *Montrer que*

1. $\sin \sim_0 x$,
2. $\sqrt{1+x} - 1 \sim_0 x/2$.

• Rappel : règle de l'Hôpital : Si f et g sont deux fonctions définies sur $[a, b[$, dérivables en a, et telles que $f(a) = g(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$, alors

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

ex : $\sin \sim_0 x$,
ex : $\sqrt{1+x} - 1 \sim_0 x/2$

1.3 Développements limités

Définition 1.8 ($DL_n(x_0)$)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I, et $x_0 \in I$. On dit que f admet un* développement limité d'ordre n en x_0*, abrégé par $DL_n(x_0)$, s'il existe $n+1$ réels $a_0, a_1, \cdots, a_n$ tels que*

$$f(x) =_{x_0} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i (x-x_0)^i}_{\textit{partie régulière}} + o((x-x_0)^n)\ .$$

- Il est fréquent d'écrire un développement limité en posant $x = x_0 + h$:

$$f(x_0+h) =_{x_0} \sum_{i=0}^{n} a_i h^i + o(h^n).$$

- Le développement d'ordre 0 en x_0 revient à écrire que f est continue en x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + o((x-x_0)^0) = f(x_0) + o(1)$$

Le développement limité d'ordre 1 en x_0 revient à approcher une courbe par sa tangente en x_0 ; on parle aussi d'approximation affine :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + o(x-x_0)$$

Son existence équivaut à la dérivabilité de la fonction en x_0.

À savoir (fait en cours) 1.6. *Montrer que*

1.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

2.

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

- On a

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

donc

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

or

$$\frac{x^{n+1}}{1-x}\frac{1}{x^n} = \frac{x}{1-x} \to_{x\to 0} 0$$

donc

$$\frac{x^{n+1}}{1-x} = o(x^n)$$

et

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

De même en remplaçant x par $-x$ on a

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

Pour trouver les développements limités de fonctions dérivables on peut compter sur les formules de Taylor énoncées dans la section suivante.

1.4 Formules de Taylor

Une façon d'obtenir une série pour intepréter une fonction est d'utiliser les séries de Taylor ou le développement de Taylor : c'est une somme infinie de termes exprimés en termes de dérivées de la fonction en un seul point. Les séries de Taylor portent le nom de Brook Taylor, qui les a introduites en 1715. Une série de Taylor est également appelée série de Maclaurin lorsque 0 est le point où les dérivées sont considérées, d'après Colin Maclaurin, qui a fait un usage intensif de ce cas spécial de série de Taylor au milieu du 18e siècle.

La somme partielle formée par les $n+1$ premiers termes d'une série de Taylor est un polynôme de degré n appelé n-ième polynôme de Taylor de la fonction. Les polynômes de Taylor sont des approximations d'une fonction, qui deviennent généralement plus précises lorsque n augmente. Le théorème de Taylor donne des estimations quantitatives de l'erreur introduite par l'utilisation de telles approximations. Soient I un intervalle réel et $a \in I$. On considère $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a pour tout $n \geq 1$. Les formules de Taylor sont de la forme suivante :

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) .$$

• écrire la forme développée • ou de façon équivalente :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\, h^k + R_n(a+h)$$

où le reste $R_n(a+h)$ est une fonction négligeable par rapport à h^n au voisinage de 0 (c'est-à-dire pour h petit). En présentant cette formule en 1715, Taylor propose ainsi une méthode de développement en série, mais sans se préoccuper du reste $R_n(x)$. En effet, pendant tout le XVIIIe siècle, les mathématiciens n'établissent pas encore de différence entre développement limité et développement en série entière. C'est Joseph-Louis Lagrange qui, en 1799, soulignera le premier la nécessité de définir rigoureusement ce reste.

Théorème 1.9 (Formule de Taylor-Young)**.** *Soient I un intervalle réel et $a \in I$. On considère $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^{n+1}(I)$. Alors*

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n) .$$

À savoir (fait en cours) 1.7. *Démontrer la formule de Taylor-Young.*

- Soit

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

On va d'abord montrer la formule de Taylor avec reste intégral :

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

•

Démonstration. The fundamental theorem of calculus states that

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Now we can integrate by parts and use the fundamental theorem of calculus again to see that

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \Big(xf'(x) - af'(a)\Big) - \int_a^x tf''(t)\,dt \\ &= f(a) + x\left(f'(a) + \int_a^x f''(t)\,dt\right) - af'(a) - \int_a^x tf''(t)\,dt \\ &= f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt, \end{aligned}$$

which is exactly Taylor's theorem with remainder in the integral form in the case $k = 1$. The general statement is proved using induction. Suppose that

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \, dt.$$

Integrating the remainder term by parts we arrive at

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \, dt &= -\left[\frac{f^{(k+1)}(t)}{(k+1)k!}(x-t)^{k+1}\right]_a^x + \int_a^x \frac{f^{(k+2)}(t)}{(k+1)k!}(x-t)^{k+1} \, dt \\ &= \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + \int_a^x \frac{f^{(k+2)}(t)}{(k+1)!}(x-t)^{k+1} \, dt.\end{aligned}$$

Substituting this into the formula shows that if it holds for the value k, it must also hold for the value $k+1$. Therefore, since it holds for $k = 1$, it must hold for every positive integer k. □

On va maintenant montrer la Formule de Taylor-Lagrange : s'il existe $M \geq 0$, tel que

$$\forall x \in I, \quad |f^{(n+1)}(x)| \leq M \, .$$

Alors

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

•

Démonstration. On a

$$\left| \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \, (x-t)^n \, \mathrm{d}t \right| \leq \int_a^x \frac{\left|f^{(n+1)}(t)\right|}{n!} \, (x-t)^n \, \mathrm{d}t \leq \frac{M}{n!} \int_a^x \, (x-t)^n \, \mathrm{d}t = M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \, .$$

□

•

Démonstration. f est $n+1$ fois dérivable et de dérivée continue sur I donc par le théorème de Weirstrass il existe $M \geq 0$, tel que

$$\forall x \in I, \quad |f^{(n+1)}(x)| \leq M \, .$$

Donc par la formule de Taylor-Lagrange

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

D'où

$$-\frac{M|x-a|}{(n+1)!} \leq \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} \leq \frac{M|x-a|}{(n+1)!}$$

D'où

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

□

Si une fonction $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en un point $a \in E$, alors on a

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(a) h, h \rangle + o(\|h\|^2).$$

où ∇f est le gradient de f et $\nabla^2 f(a)$ est sa matrice hessienne évaluée en a.

Pour aller plus loin. *(**) Dans un espace vectoriel normé on a même : Soient O un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : O \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}(O)$ fois différentiable et de différentielles continues. Alors pour tout $[a, x] \subset O$:*

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{n} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\partial x^\alpha} (x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=n+1} R_\alpha(x)\,(x-a)^\alpha$$

où les sommes portent sur les multi-indices α, et où le reste vérifie l'inégalité

$$|R_\alpha(x)| \le \sup_{y\in[a,x]} \left| \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f(y)}{\partial x^\alpha} \right|$$

pour tous les α tels que $|\alpha| = n + 1$.

- Un multi-indice de taille n est un vecteur

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

à coefficients α_i entiers positifs. Au multi-indice α est associé sa longueur (parfois appelée module) $|\alpha|$, définie par :

$$|\alpha| \;=\; \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \;=\; \alpha_1 \;+\; \ldots \;+\; \alpha_n$$

où

$$\alpha\,! \;=\; \alpha_1\,! \;\times\; \ldots \;\times\; \alpha_n\,!$$

On utilise pour un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$, une notation sous forme d'exponentiation pour représenter le calcul polynomial

$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

Et on peut introduire l'opérateur différentiel

$$\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \ldots \partial_n^{\alpha_n} \qquad \text{avec} \qquad \partial_i^j := \frac{\partial^j}{\partial x_i^j}.$$

- Parametrize the line segment between $\boldsymbol{a}$ and x by $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$. We apply the one-variable version of Taylor's theorem to the function $g(t) = f(\boldsymbol{u}(t))$:

$$f(\boldsymbol{x}) = g(1) = g(0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} g^{(j)}(0) \;+\; \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} g^{(k+1)}(t)\,dt.$$

Applying the chain rule for several variables gives

$$\begin{aligned} g^{(j)}(t) &= \frac{d^j}{dt^j} f(u(t)) \\ &= \frac{d^j}{dt^j} f(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})) \\ &= \sum_{|\alpha|=j} \binom{j}{\alpha} (D^\alpha f)(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}))(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^\alpha \end{aligned}$$

where $\binom{j}{\alpha}$ is the multinomial coefficient. Since $\frac{1}{j!}\binom{j}{\alpha} = \frac{1}{\alpha!}$, we get :

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{1\le|\alpha|\le k} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha f)(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{k+1}{\alpha!} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^\alpha \int_0^1 (1-t)^k (D^\alpha f)(\boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}))\,dt.$$

On obtient ainsi aiément de nombreux développements limités. Par exemple

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + o(x^n)$$

ou, comme tous les termes d'exposant impair sont nuls :

$$\cos x = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} + o(x^{2n+1})$$

et de même

$$\sin x = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + o(x^{2n+2})$$

Et pour finir

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \left(\prod_{j=0}^{i-1} (a-j) \right) x^i + o(x^n).$$

- $$(1+x)^\alpha = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n)$$

1.5 Opérations élémentaires sur les développements limités

Multiplication par un scalaire Si f admet un $DL_n(x_0)$, alors λf admet un $DL_n(x_0)$, dont la partie régulière s'obtient en multipliant la partie régulière du $DL_n(x_0)$ de f par λ.

À savoir (fait en cours) 1.8. *Déterminer le* $DL_3(0)$ *de* $\cos(2x)/2$.

- $DL_3(0)$ de $\cos(2x)/2$

Somme Si f et g admettent deux $DL_n(x_0)$, alors $f+g$ admet un $DL_n(x_0)$, dont la partie régulière s'obtient en sommant les deux parties régulières des $DL_n(x_0)$ de f et g.

À savoir (fait en cours) 1.9. *Déterminer le* $DL_3(0)$ *de* $\sin + \exp$.

- $DL_3(0)$ de $\sin + \exp$

Produit Si f et g admettent deux $DL_n(x_0)$, de parties régulières respectives P et Q, alors fg et PQ admettent $DL_n(x_0)$, de même partie régulière.

À savoir (fait en cours) 1.10. *Déterminer le* $DL_3(0)$ *de* $2\sin\cos$.

- $DL_3(0)$ de $2\sin\cos$ $(=\sin(2a))$

Inverse Si $u(x_0) = 0$ et si u admet un $DL_n(x_0)$, alors $1/(1-u)$ admet un $DL_n(x_0)$. La partie régulière de ce développement limité est celle du $DL_n(x_0)$

$$\sum_{k=0}^{n} u^k$$

À savoir (fait en cours) 1.11. *Déterminer le* $DL_3(0)$ *de* $\tan$.

- $DL_3(0)$ de $\tan = \sin / \cos$. DL_3 de sin et de cos et aussi de $1/(1-u)$.

$$1/\cos = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

donc

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Composition Si u admet un $DL_n(x_0)$ de partie régulière P et si v admet un $DL_n(u(x_0))$ de partie régulière Q, alors $v \circ u$ et $Q \circ P$ possèdent un $DL_n(x_0)$, de même partie régulière.

À savoir (fait en cours) 1.12. *Déterminer le $DL_2(0)$ de $f : x \mapsto \exp(1/(1-x))$.*

- ex : $DL_2(0)$ de $f : x \mapsto \exp(1/(1-x))$. ordre 2 pour

$$1/(1-x) = 1 + \underbrace{x + x^2 + o(x^2)}_{=h}$$

et en $f(0) = 1$ d'ordre 2. On obtient

$$e(1 + x + 3x^2/2) + o(x^2)$$

Primitive Si f admet un $DL_n(x_0)$,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x - x_0)^i + o((x - x_0)^n)$$

alors toute primitive F de f admet un $DL_{n+1}(x_0)$ qui est

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1}(x - x_0)^{i+1} + o((x - x_0)^{n+1}).$$

À savoir (fait en cours) 1.13. *Montrer que*

1.
$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

2.
$$\ln(1+x) = -\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

- En particulier ce résultat permet de déterminer d'autres développements limités : Comme

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=O}^{n-1} x^k + o(x^{n-1})$$

en intégrant on a

$$\ln(1-x) = \ln(1) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^n) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

De même

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

donne

$$\ln(1+x) = \ln(1) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^n) = -\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

Dérivation Si F' admet un $DL_n(x_0)$, alors la partie régulière de ce DL est la dérivée de la partie régulière du $DL_{n+1}(x_0)$ de F.

- Il n'existe pas de théorème général sur l'existence d'un $DL_n(x_0)$ pour la dérivée d'une fonction admettant un $DL_{n+1}(x_0)$. Par exemple, en 0, la fonction $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ – prolongée par $0 \mapsto 0$ – admet un $DL_2(0)$ (il s'agit de $0 + o(x^2)$) mais sa dérivée n'admet pas de $DL_2(0)$.

1.5.1 Développements limités en $x_0 \neq 0$

On peut faire le changement de variable $h = x - x_0$ pour se ramener en 0.

À savoir (fait en cours) 1.14. *Déterminer le $DL_3(\pi/2)$ de* sin.

- $DL_3(\pi/2)$ de sin. On pose $h = x - \pi/2$ et on utilise

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

1.5.2 Développements limités en l'infini

On peut faire le changement de variable $h = 1/x$ pour se ramener en 0.

À savoir (fait en cours) 1.15. *Déterminer le $DL_3(+\infty)$ de*

$$\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$$

- Déterminer

$$\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} \text{ à l'ordre 3 en } +\infty$$

On pose $u = \frac{1}{x}$, de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} &= \sqrt{1+2u} \\ &= 1 + u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{2} + o(u^3) \\ &= 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right). \end{aligned}$$

1.6 Application des développements limités

1.6.1 Détermination de limite et des équivalents

Le premier terme du développement limité en x_0 est la limite de la fonction en x_0.

Quel que soit l'ordre auquel on arrête le développement limité en x_0 on obtient un équivalent polynomial de la fonction en x_0.

1.6.2 Approximations affines

La formule de Taylor d'ordre 1 en au point a, est donnée par :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + o(x-a)$$

On retrouve l'équation de la tangente au graphe de f.

À savoir (fait en cours) 1.16. *Déterminer la meilleure approximation affine de $x \mapsto (1+x)^a$.*

- En particulier, on a, au point 0 :

$$(1+x)^a = 1 + ax + o(x)$$

et donc

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$$

et

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} + o(x) \; ; \\ \ln(1+x) &= x + o(x) \; ; \\ e^x &= 1 + x + o(x). \end{aligned}$$

1.6.3 Détermination de la dérivée

Si on connaît un développement limité, la formule de Taylor permet de déterminer les dérivées successives d'une fonction.

À savoir (fait en cours) 1.17. *Déterminer* $[x \mapsto \ln(1-x)]^{(10)}(0)$.

- Déterminer $[x \mapsto \ln(1-x)]^{(10)}(0)$

$$\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

et

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

donc

$$\frac{f^{(10)}(0)}{10!} = -\frac{1}{10}$$

d'où

$$f^{(10)}(0) = -9!$$

1.6.4 Position de la tangente par rapport à la courbe en un point

On a dans un voisinage de a

$$f(x) - \left[f(a) + (x-a)f'(a)\right] = \sum_{k=2}^{n} \alpha_k \,(x-a)^k + o((x-a)^n)\ .$$

donc le premier terme non-nul de

$$\sum_{k=2}^{n} \alpha_k \,(x-a)^k$$

donne la position de la tangente par rapport à la course représentative de f. Soit k_0 le plus petit entier tel que $\alpha_k \neq 0$. On a alors

$$f(x) - \left[f(a) + (x-a)f'(a)\right] = \alpha_{k_0}(x-a)^{k_0} + o((x-a)^{k_0})\ .$$

On a plusieurs cas possible :

1er cas : k_0 est pair et $\alpha_{k_0} > 0$ Alors la courbe représentative de f est au dessus de la tangente à droite et à gauche de a.

2ème cas : k_0 est pair et $\alpha_{k_0} < 0$ Alors la courbe représentative de f est en dessous de la tangente à droite et à gauche de a.

3ème cas : k_0 est impair et $\alpha_{k_0} > 0$ Alors la courbe représentative de f est en dessous de la tangente à gauche de a et au dessus de la tangente à droite de a. On dit que a est un point d'inflexion.

4ème cas : k_0 est impair et $\alpha_{k_0} < 0$ Alors la courbe représentative de f est au dessus de la tangente à gauche de a et en dessous de la tangente à droite de a. On dit que a est un point d'inflexion.

À savoir (fait en cours) 1.18. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$. Déterminer l'allure locale de f dans un voisinage de* 0.

• Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$. Les techniques classiques de calcul montrent que :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{48}x^3 + x^3\varepsilon(x).$$

Au point d'abscisse 0, on a $f(0) = 1/2$, f est dérivable et vérifie $f'(0) = -1/4$. Le graphe est donc tangent à la droite d'équation $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$.
Au voisinage de 0, on a :

$$\frac{1}{1+e^x} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x\right) = \frac{1}{48}x^3 + x^3\varepsilon(x).$$

Si x est assez petit, cette quantité est positive pour $x \geq 0$, et négative pour $x \leq 0$: la courbe traverse sa tangente.

1.6.5 Branche asymptotique

On procède comme précédemment, après un développement asymptotique on obtient un développement au voisinage de $\pm\infty$ de la forme,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + \sum_{k=0}^{m} b_k\, \frac{1}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

On a donc

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$$

est la courbe asymptote. Si on appelle k_0 le plus petit entier tel que $b_k \neq 0$ on a

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k = b_{k_0}\, \frac{1}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^{k_0}}\right)$$

1er cas : k_0 est pair et $b_{k_0} > 0$ Alors la courbe représentative de f est au dessus de la branche asymptotique en $+\infty$ et en $-\infty$.

2ème cas : k_0 est pair et $b_{k_0} < 0$ Alors la courbe représentative de f est en dessous de la branche asymptotique en $+\infty$ et en $-\infty$.

3ème cas : k_0 est impair et $b_{k_0} > 0$ Alors la courbe représentative de f est en dessous de la branche asymptotique en $-\infty$ et au dessus de la branche asymptotique en $+\infty$.

4ème cas : k_0 est impair et $b_{k_0} < 0$ Alors la courbe représentative de f est au dessus de la branche asymptotique en $-\infty$ et en dessous de la branche asymptotique en $+\infty$.

À savoir (fait en cours) 1.19. *Déterminer les asymptotes éventuelles et la position relative par rapport aux asymptotes de la courbe représentative de la fonction :*

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}.$$

- On commence par l'étude au voisinage de $+\infty$. On met x^2 en facteur sous les racines pour se ramener à effectuer un développement limité en 0 :

$$\sqrt{x^2+1} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = x\left(1+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon(1/x)\right).$$

De même,

$$\sqrt{x^2-1} = x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = x\left(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon(1/x)\right).$$

On en déduit :

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x}\varepsilon(1/x).$$

La courbe d'équation $y = 2x$ est donc asymptote à la courbe au voisinage de $x = +\infty$. Pour obtenir la position relative de la courbe par rapport à l'asymptote, il faut pousser le développement limité un peu plus loin...jusqu'à obtenir le premier terme non nul !

$$\sqrt{x^2+1} = x\left(1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+\frac{1}{x^4}\varepsilon(1/x)\right),$$

$$\sqrt{x^2-1} = x\left(1-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+\frac{1}{x^4}\varepsilon(1/x)\right),$$

ce qui donne :

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon(1/x).$$

Au voisinage de $+\infty$,

$$-\frac{1}{4x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon(1/x)$$

est négatif : la courbe est sous l'asymptote. L'étude au voisinage de $-\infty$ peut se faire en remarquant que la fonction étudiée est paire. On en déduit alors que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$, et que la courbe est située au-dessous de son asymptote.

Chapitre 2

Optimisation libre

2.1 Convexité

2.1.1 Définitions

Définition 2.1 (Ensemble convexe)**.** *Un ensemble $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$ est dit convexe si*

$$\forall (x,y) \in \mathcal{U}^2, \quad \forall t \in [0,1], \quad (1-t)x + ty \in \mathcal{U}$$

- $\forall t \in [0,1], \quad (1-t)x + ty \in \mathcal{U}$ signifie que l'intervalle $[x,y]$ est inclus dans $\mathcal{U}$.

ex : les hyperplans $\{x : \langle x, a\rangle = \alpha\}$
ex : demi-espace $\{x : \langle x, a\rangle \leq \alpha\}$
ex : intersection d'hperplan ou de demi-espaces Une fonction est convexe si son épigraphe $(\{(x,\alpha) \in U \times \mathbb{R}\,,\, f(x) \leq \alpha\})$ est convexe. Autrement dit

Définition 2.2 (Fonction convexe)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ensemble convexe de $\mathbb{R}^N$. On considère une fonction $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. La fonction f est dite*

- convexe *si*

$$\forall (x,y) \in \mathcal{U}^2, \quad \forall t \in [0,1], \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)\ .$$

- strictement convexe *si*

$$\forall (x,y) \in \mathcal{U}^2, x \neq y, \quad \forall t \in [0,1], \quad f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y)\ .$$

- fortement convexe *s'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall (x,y) \in \mathcal{U}^2 \quad \forall t \in [0,1], \quad f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y) - \frac{\alpha}{2}t(1-t)\|x-y\|^2\ .$$

f est concave si $-f$ est convexe.

À savoir (fait en cours) 2.1. *Montrer que $x \mapsto x^2$ est convexe.*

À savoir (fait en cours) 2.2. *Montrer que toutes les normes sur $\mathbb{R}^N$ sont convexes.*

- Dessin quand convexe, concave, strictement, pas du tout
- Ex : $x \mapsto x^2$ est convexe :

$$\begin{aligned}[(1-t)x + ty]^2 &= (1-t)^2x^2 + t^2y^2 + 2t(1-t)xy \leq (1-t)^2x^2 + t^2y^2 + t(1-t)(x^2+y^2)\\ &\leq [(1-t)^2 + t(1-t)]x^2 + [t^2 + t(1-t)]xy = (1-t)x^2 + ty^2\end{aligned}$$

Plus compliqué de le prouver pour $x \mapsto x^4$ (qui n'est d'ailleurs pas fortement convexe comme on le verra) !

- Fortement convexe implique strictement convexe implique convexe.

Toutes les normes sont convexes (par inégalité triangulaire) : pour tout $t \in [0,1]$

$$f((1-t)x + ty) \leq f((1-t)x) + f(ty) = (1-t)f(x) + tf(y)$$

Pour aller plus loin. *(*) La fonction f est fortement convexe si et seulement si $f - \alpha\|\cdot\|^2/2$ est convexe.*

- En fait fortement convexe est équivalent à dire que $f - \alpha\|\cdot\|^2/2$ est convexe car

$$\begin{aligned}
(1-t)\|x\|^2 + t\|y\|^2 - \|(1-t)x + ty\|^2 &= (1-t)\|x\|^2 + t\|y\|^2 - \|t(y-x) + x\|^2 \\
&= (1-t)\|x\|^2 + t\|y\|^2 - t^2\|y-x\|^2 - \|x\|^2 - 2t(y-x)\cdot x \\
&= -t\|x\|^2 + t\|y\|^2 - t^2\|y-x\|^2 - 2ty\cdot x + 2t\|x\|^2 \\
&= t\|x\|^2 + t\|y\|^2 - t^2\|y-x\|^2 - 2ty\cdot x \\
&= t\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2x\cdot y\right) - t^2\|y-x\|^2 \\
&= t\|x-y\|^2 - t^2\|y-x\|^2 \\
&= t(1-t)\|y-x\|^2
\end{aligned}$$

Donc

$$\|(1-t)x + ty\|^2 = (1-t)\|x\|^2 + t\|y\|^2 - t(1-t)\|x-y\|^2$$

Pour aller plus loin. *(***) En fait si f est continue, un argument de densité parmet de voir qu'il est suffisant de prouver que le résultat est vrai pour $t = 1/2$.*

2.1.2 Caractérisations

Proposition 2.3 (Caractérisation de la convexité). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $\mathcal{U}$ un convexe inclus dans Ω. On considère $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *f est convexe sur $\mathcal{U}$.*
- $$\forall (x,y) \in \mathcal{U}^2\,,\ f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle$$
  - *f est au dessus de sa tangente, on peut écrire en 1d*
- $$\forall (x,y) \in \mathcal{U}^2\,,\ \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \geq 0$$
  - *∇f est monotone croissante, écrire en 1d*

Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$, ces propriétés sont équivalentes à

$$\forall (x,h) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^N\,,\ \langle \nabla^2 f(x)h, h\rangle \geq 0$$

Proposition 2.4 (Caractérisation de la stricte convexité). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $\mathcal{U}$ un convexe inclus dans Ω. On considère $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *f est strictement convexe sur $\mathcal{U}$.*
- $$\forall (x,y) \in \mathcal{U}^2, x \neq y\,,\ f(y) > f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle$$
- $$\forall (x,y) \in \mathcal{U}^2, x \neq y\,,\ \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle > 0$$

Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, ces propriétés sont équivalentes à

$$\forall (x,h) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^N\,,\ \langle \nabla^2 f(x)h, h\rangle > 0$$

À savoir (fait en cours) 2.3. *Montrer que $x \mapsto x^2$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.*

À savoir (fait en cours) 2.4. *Montrer que $x \mapsto \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c$ où A est une matrice symétrique, $b \in \mathbb{R}^N$ et $c \in \mathbb{R}$ est*

1. *convexe si A est semi-définie positive,*

2. *stricement convexe si A est définie positive,*
3. *fortemement convexe si A est définie positive.*

À savoir (fait en cours) 2.5. *Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas strictement convexe.*

• La condition d'ordre 2 est celle de $\nabla^2 f$ est semidéfinie positie pour tout x dans $\mathcal{U}$.
Dans le cas $d = 1$ on retrouve bien $f''(x) \geq 0$.
Montrer que $x \mapsto x^2$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$: $f''(x) = 2 > 0$
Attention $-1/x$ n'est pas convexe même si $f''(x) = 1/x^2$ car le domaine n'est pas convexe !
La fonction $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ avec A matrice symétrique semidéfinie positive est convexe. Elle est même strictement convexe si A est définie positive (et même fortement convexe)
$\|x\|_2$ est strictement convexe (car sa hessienne est I) mais pas $\|x\|_\infty$ (prendre $x = (-1, 1)$ et $y = (1, 1)$ on a

$$1 = \|(x + y)/2\|_\infty < (\|x\|_\infty + \|y\|_\infty)/2 = 1$$

• La fonction $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ avec A matrice symétrique définie positive. On a

$$\forall u \in \mathbb{R}^N, \quad \langle Au, u\rangle \geq \alpha\|u\|^2$$

donc f est fortement convexe.
x^4 est strictement convexe sur $(0, \infty)$ mais pas fortement convexe car

$$f''(x) = 12x^2 \geq 0$$

mais queluqe soit α on peut toujours trouver x suffisamment petit pour que ça soit sous α.

Proposition 2.5 (Caractérisation de la forte convexité)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $\mathcal{U}$ un convexe inclus dans Ω. On considère $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *f est fortement convexe sur $\mathcal{U}$.*
- *Il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}^2\,,\ f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{\alpha}{2}\|x - y\|^2$$

- *Il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall (x, y) \in \mathcal{U}^2\,,\ \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \geq \alpha\|x - y\|^2\ .$$

Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, ces propriétés sont équivalentes à

$$\forall (x, h) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^N\,,\ \langle \nabla^2 f(x)h, h\rangle \geq \alpha\|h\|^2$$

2.1.3 Inégalité de Jensen

Proposition 2.6 (Inégalité de Jensen)**.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble convexe non-vide. On considère une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ convexe. Si*

$$\begin{cases} \lambda_i \geq 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{cases}$$

alors

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)\ .$$

À savoir (fait en cours) 2.6. *Démonter Proposition 2.6.*

- Soit $\mathcal{P}(n)$:

$$\begin{cases} \lambda_i \geq 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{cases}$$

alors

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) .$$

$\mathcal{P}(1)$ est vraie par la définition de convexité avec $t = \lambda_1$ et $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$, $x = x_1$ et $y = x_2$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ est vraie. S'il existe i tel que $\lambda_i = 1$ alors il n'y a rien prouvé. Sinon il existe i_0 tel que $\lambda_{i_0} < 1$. Quitte à renuméroter on peut supposer que c'est $\lambda_{n+1} < 1$. On a

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &= f\left((1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$$

on a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = 1$$

Donc par définition de la convexité

$$f\left((1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \leq (1-\lambda_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i\right) + \lambda_{n+1} f\left(x_{n+1}\right)$$

Par l'hypothèse de récurrence

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} f\left(x_i\right)$$

On a donc

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f\left(x_{n+1}\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i) .$$

2.2 Optimisation

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ non-vide. On considère une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On s'intéresse au problème

$$\min_{x \in \mathcal{K}} f(x) \tag{2.1}$$

où $\mathcal{K}$ est un ensemble donné de Ω.

Nous verrons tout d'abord des conditions suffisantes garantissant l'existence d'un minimum. L'expression de ces conditions varie en fonction de la structure de l'ensemble $\mathcal{K}$ et la régularité de la fonction f. On distinguera si $\mathcal{K}$ est ouvert, fermé, borné ou convexe et si f est continu, de classe $\mathcal{C}^1$, etc.

2.2.1 Terminologie

Définition 2.7 (Borne inférieure)**.** *Soit $E \subset \mathbb{R}$ non-vide.* La borne inférieure *d'une partie F de E est le plus grand des minorants de F dans E. Elle est classiquement notée* $\inf(F)$.

- $m = \inf(F)$ est caractérisé par
— m est un minorant de F : pour tout x de F, $x \geq m$,
— c'est le plus grand : pour tout y de E, si y est un minorant de F (c'est-à-dire si pour tout x de F, $x \geq y$), alors $m \geq y$.
- Ci-dessus valable même pour ordre partiel. Mais dans le cas d'un ordre total on a :
— pour tout x de F, $x \geq m$,
— pour tout $y > m$ dans E, il existe dans F au moins un $x < y$.
- Dans le cas des rééls :
— pour tout x de F, $x \geq m$,
— pour tout $\varepsilon > 0$, il existe dans F au moins un $x < m + \varepsilon$.

Définition 2.8 (Minimum d'un ensemble)**.** *Soit $E \subset \mathbb{R}$ non-vide. Un élément d'une partie A est le plus petit élément, ou minimum de A, s'il appartient à A et est inférieur à tout autre élément de A.*

Définition 2.9 (Infimum et minimum d'une fonction)**.** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$.*

On appelle infimum de f sur $\mathcal{K}$ *la borne inférieure de $f(\mathcal{K})$, cette valeur est notée* $\inf_{x\in\mathcal{K}} f(x)$.

On appelle, s'il existe, minimum de f sur $\mathcal{K}$ *le minimum de $f(\mathcal{K})$, cette valeur est alors notée* $\min_{x\in\mathcal{K}} f(x)$. *Le point en lequel le minimum est atteint est appelé l'argument de minimum et noté* $\mathrm{Argmin}_{x\in\mathcal{K}} f(x)$.

- Autre caractérisation : On appelle *infimum* de f sur $\mathcal{K}$, la valeur $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ telle que :
— $\forall x \in \mathcal{K},\ f(x) \geq l$,
— il existe une suite $(x_n)_n$, appelée suite minorante, d'éléments de $\mathbb{R}^N$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n \in \mathcal{K} \text{ et } \lim_n f(x_n) = l\ .$$

• L'infimum existe toujours. Il est fini si et seulement si f est minorée sur K. • On appelle aussi minimum de f sur $\mathcal{U}$ la valeur $l \in]-\infty, +\infty]$, si elle existe, pour laquelle il existe un élément $x^* \in \mathcal{K}$ tel que
— $\forall x \in \mathcal{K}, \quad f(x) \geq l$,
— $f(x^*) = l$.

Définition 2.10 (Minimum local et global)**.** *Soient $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{K} \subset \Omega$.*

- x^* *est un* point de minimum local *de f sur $\mathcal{K}$, s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x^* tel que*

$$f(x^*) = \min_{\mathcal{V}\cap\mathcal{K}} f(x)$$

- x^* *est un* point de minimum local strict *de f sur $\mathcal{K}$, s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x^* tel que*

$$f(x^*) = \min_{\mathcal{V}\cap\mathcal{K}} f(x) \quad \textit{et} \quad \forall y \in \mathcal{V},\ f(y) > f(x^*)$$

- x^* *est un* point de minimum global *de f sur $\mathcal{K}$, si*

$$f(x^*) = \min_{\mathcal{K}} f(x)$$

- x^* *est un* point de maximum local *de f sur $\mathcal{K}$ si x^* est un point de minimum local de $-f$ sur $\mathcal{K}$.*
- x^* *est un* point de maximum global *de f sur $\mathcal{K}$ si x^* est un point de minimum global de $-f$ sur $\mathcal{K}$.*

Un point extremum *est ou bien un point de maximum ou bien un point de minimum.*

2.2.2 Résultats généraux sur la recherche de minimum

Définition 2.11 (Fonction coercitive)**.** *Soit $\mathcal{K}$ un ouvert non-borné de $\mathbb{R}^N$. On considère $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$. La fonction f est dite* coercitive sur $\mathcal{K}$ *si*

$$\lim_{x\in\mathcal{K}, \|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty \, .$$

• Sur $\mathbb{R}^N$ toutes les normes sont équivalentes donc il suffit de le prouver pour n'importe quelle norme.
Ex : $f(x) = 2x^2 + y^2$. On a $f(x) \geq \|(x, y\|_2$ donc f est coerctitive.
Moi j'aime bien considérer la norme $\|\cdot\|_\infty$ parce qu'elle tend vers $+\infty$ si et seulement si
— $|x| \to +\infty$ et $y \in \mathbb{R}$,
— $|y| \to +\infty$ et $x \in \mathbb{R}$,
— $|x| \to +\infty$ et $|y| \to +\infty$,
• Minorer par fonction croissante de la norme. Parce que sinon on peut se faire avoir par ex $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ et $x^2 - 2xy^2 + y^4$

À savoir (fait en cours) 2.7. *Soit $\mathcal{K}$ un ouvert non-borné de $\mathbb{R}^N$. On considère $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$. Démontrer que si f est fortement convexe sur $\mathcal{K}$ alors f est coercitive sur $\mathcal{K}$.*

- Par définition de la forte convexité en $x = 0$ on a

$$f(y) \geq f(0) + \langle \nabla f(0), y\rangle + \frac{\alpha}{2}\|y\|^2$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|\langle \nabla f(0), y\rangle| \leq \|\nabla f(0)\|\|y\|$$

d'où

$$\langle \nabla f(0), y\rangle \geq -\|\nabla f(0)\|\|y\|$$

On a donc

$$f(y) \geq f(0) - \|\nabla f(0)\|\|y\| + \frac{\alpha}{2}\|y\|^2$$

Théorème 2.12 (Condition suffisante, $\mathcal{K}$ fermé)**.** *On considère $\mathcal{K}$ un ensemble non-vide et fermé de $\mathbb{R}^N$ et f une fonction continue sur $\mathcal{K}$. Le problème* (2.1) *admet une solution s'il l'une des deux conditions est satisfaite :*
- *la contrainte $\mathcal{K}$ est bornée,*
- *la contrainte $\mathcal{K}$ est non-bornée et f est coercitive.*

À savoir (fait en cours) 2.8. *Démontrer Théorème 2.12.*

• Dans le premier cas $\mathcal{K}$ est fermé et borné donc il est compact. Comme f est continue ; le théorème de Weierstrass assure que f atteint ses bornes sur $\mathcal{K}$. Donc il existe un minimum.
Dans le deuxième cas : soit $x_0 \in \mathcal{K}$. la coercitivité de f entraîne qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\|x\| > r \Rightarrow f(x) > f(x_0) \, .$$

Donc

$$\inf_{x\in\mathcal{K}} f(x) = \inf_{x\in\mathcal{K}\cap\overline{B_r(0)}} f(x)$$

Comme $\mathcal{K}\cap\overline{B_r(0)}$ est fermé et borné et que f est continue, le theorème de Weierstrass assure que f atteint un minimum x^* sur $\mathcal{K}\cap\overline{B_r(0)}$. Reste à montrer que ce minimum est aussi un minimum sur $\mathcal{K}$: pour tout $x \in \mathcal{K}$
— ou bien $x \in \mathcal{K}\cap\overline{B_r(0)}$ et alors $f(x) \geq f(x^*)$ car x^* est un minimum de f sur $\mathcal{K}\cap\overline{B_r(0)}$,
— ou bien $x \notin \mathcal{K}\cap\overline{B_r(0)}$ auquel cas $f(x) \geq f(x_0) \geq f(x^*)$ (car en dehors de la boule $f(x)$ est plus grand que $f(x_0$ qui est lui même plus grand que le min...).

Donc x^* est un minimum de f sur $\mathcal{K}$.

Pour aller plus loin. *(*) Dans la cas $\mathcal{K}$ ouvert, on peut prouver facilement que s'il existe $x_0 \in \mathcal{K}$ tel que*

$$\forall x \in \partial\mathcal{K}, \quad f(x) > f(x_0)$$

où $\partial\mathcal{K} = \overline{\mathcal{K}} \setminus \mathcal{K}$, alors le problème (2.1) admet une solution.

- $(x, y) \mapsto -x^2y^2exp(-x^2 - y^2)$ tend vers 0 lorsque $|x| \to \infty$ et $|y| \to \infty$ et est strictement négative en $(1, 1)$ donc elle admet un minimum. Pourtant elle n'est pas coercitive.

Théorème 2.13 (Unicité dans le cas strictement convexe)**.** *Soit $\mathcal{K}$ un ensemble convexe. On considère $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe sur $\mathcal{K}$. Si f admet un mimimum sur $\mathcal{K}$ alors ce minimum est unique.*

À savoir (fait en cours) 2.9. *Démontrer Théorème 2.13.*

- Supposons que x et y sont deux minima de f sur $\mathcal{K}$. On a donc

$$\forall z \in \mathcal{K}, \quad f(x) = f(y) \leq f(z)$$

On considère $z = (x + y)/2$. Par stricte convexité on a

$$f(z) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) = f(x) \ .$$

Ce qui est une contradiction si $x \neq y$.

cex : $x \mapsto 0$ est convexe mais il n'y a pas unicité du min.

Théorème 2.14 (Existence et unicité)**.** *Soit $\mathcal{K}$ un fermé convexe non-borné de $\mathbb{R}^N$. On considère $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui est fortement convexe sur $\mathcal{K}$. Alors f admet un unique minimum global sur $\mathcal{K}$.*

À savoir (fait en cours) 2.10. *Démontrer Théorème 2.14.*

- On a vu que si f est fortement convexe alors f est coercitive et on peut appliquer le théorème d'existence Théorème 2.12.

Pour l'unicité on utilise fortement convexe implique strictement convexe et on peut appliquer le Théorème 2.13.

2.2.3 Condition d'existence d'un minimum

Théorème 2.15 (Equation d'Euler)**.** *Soit $\mathcal{K}$ un ensemble non-vide de $\mathbb{R}^N$. On considère $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{K}$. Soit x^* un point de minimum local de f sur $\mathcal{K}$. Si x^* est à l'intérieur de $\mathcal{K}$ alors*

$$\forall x \in \mathcal{K}, \quad \nabla f(x^*) = 0 \ .$$

Repose sur

Lemma 2.16 (Inéquation d'Euler)**.** *Soit $\mathcal{K}$ un convexe de $\mathbb{R}^N$. On considère $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{K}$. Si x^* un point de minimum local de f sur $\mathcal{K}$ alors*

$$\forall x \in \mathcal{K}, \quad \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$$

Pour aller plus loin. *L'hypothèse de convexité de $\mathcal{K}$ n'est pas nécessaire. Il suffit alors de remplacer l'inégalité par*

$$\langle \nabla f(x^*), d \rangle \geq 0 \qquad \textit{pour toute direction } d \textit{ admissible.}$$

où une direction $d \in \mathbb{R}^N$ est dite direction admissible *s'il existe $\eta < 0$ tel que $x^* + \alpha d$ soit dans $\mathcal{K}$ pour tout $\alpha \in [0, \eta[$.*

À savoir (fait en cours) 2.11. *Démontrer Lemme 2.16.*

À savoir (fait en cours) 2.12. *Démontrer Théorème 2.15.*

• On appelle intérieur de A le plus grand ouvert de X inclus dans A. Il existe : c'est la réunion de tous les ouverts inclus dans A. Un point x de X appartient à l'intérieur de A si et seulement si A est un voisinage de x.

Faire un dessin.

Preuve du lemme inéquation d'Euler : Prenons une direction $d \in \mathbb{S}_1^N$, la sphère unité, telle que $x^* + \alpha\, d$ soit dans $\mathcal{K}$, pour des α suffisamment petits. Le choix de d ve être déterminant dans toutes les preuves que nous allons voir jusqu'à la fin du cours. Ici $d = x - x^*$, pour $x \in \mathcal{K}$ dans le cas d'un convexe, mais on peut imaginer qu'il suffit de prendre un ensemble qui vérifie la propriété de la boule. En effet, $x^* + \alpha\, d = x^* + \alpha\,(x - x^*) = (1-\alpha)x^* + \alpha\, x$ est dans $\mathcal{K}$ car $\mathcal{K}$ est convexe.

On considère la fonction g définie dans un intervalle $[0, \varepsilon)$ tel que $x^* + \alpha\, d$ est dans $\mathcal{K}$:

$$g: \begin{array}{rcl} [0,\varepsilon) & \to & \mathbb{R} \\ \alpha & \mapsto & f(x^* + \alpha\, d) \end{array}$$

On écrit le $DL_1(0)$ de g :

$$g(\alpha) = g(0) + \alpha g'(0) + o(\alpha)$$

ou

$$\underbrace{g(\alpha) - g(0)}_{\geq 0} = \alpha g'(0) + o(\alpha)$$

Supposons par l'absurde que $g'(0) < 0$: on peut alors toujours choisir α suffisamment petit pour que

$$o(\alpha) \leq -\alpha \frac{g'(0)}{2}$$

Pour ce choix de α on a

$$g(\alpha) - g(0) \leq \alpha g'(0) + o(\alpha) \leq \alpha \frac{g'(0)}{2}$$

d'où

$$0 \leq \frac{2}{\alpha}[g(\alpha) - g(0)] \leq g'(0) < 0$$

ce qui induit une contradiction. Donc $g'(0) \geq 0$.

On peut aussi écrire

$$\underbrace{\frac{g(\alpha) - g(0)}{\alpha}}_{\geq 0} = g'(0) + o(1)$$

Donc $g'(0) \geq 0$.

Traduisons cela en terme de f. Comme on a

$$g(\alpha) = f(x^* + \alpha d)$$

d'où

$$g'(\alpha) = \langle \nabla f(x^* + \alpha d), d \rangle$$

la propriété $g'(0) \geq 0$ se traduit par

$$0 \leq g'(0) = \langle \nabla f(x^*), d \rangle$$

Comme on avait pris $d = x - x^*$ on obtient le résultat annoncé.

• Preuve du Théorème (équation d'Euler) : Rappelons que

$$0 = \langle \nabla f(x^*), d \rangle$$

pour une direction d admissible. Comme x^* est à l'intérieur de $\mathcal{K}$, toutes les directions sont admissibles. D'où le résultat. • ∇f est la ligne de plus grande pente. Elle est orthogonale aux lignes de niveau. Elle pointe vers l'intérieur du domaine et est normale en le point du bord considéré. Donc quelque soit le vecteur à l'intérieur du domaine considéré l'angle est aigu.

Exercice 2.1. *Minimiser* $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ *sur* $[1, 9] \times [1, \infty)$.

- ex : minimiser $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ sur $[1, 9] \times [1, \infty)$.

$\triangleright$ f a un minimum en $(1, 1)$ En ce point les directions possibles sont de la forme (d_1, d_2) avec $d_1 \geq 0$ et $d_2 \geq 0$. On a bien $\nabla f(1, 1) = (2, 2)$. On a effectivement $2d_1 + 2d_2 \geq 0$. Remarquons que s'il y avait des direction admissibles, par ex parce que le domaine est $[0, 9] \times [1, \infty)$ alors on peut prendre d_1 dans $\mathbb{R}$ donc $(-1, 0)$ est une direction admissible et on a pas $\langle \nabla f(1, 1), (-1, 0)\rangle < 0$. Effectivement $(1, 1)$ n'est plus un point de minimum.

Exercice 2.2. *Minimiser* $f(x, y) = x + y$ *sur le cercle* $x^2 + y^2 \leq 1$.

- ex : Minimiser $f(x, y) = x + y$ sur le cercle $x^2 + y^2 \leq 1$.

$\triangleright$ Il y a une solution parce c'est un compact et que f est continue. On a $\nabla f(x, y) = (1, 1)$ donc il ne peut pas y avir de minimum à l'intérieur. Sur le bord, par l'inéquation d'Euler, en le minimum (x, y) on doit avoir pour toute direction admissible (d_1, d_2), $\langle \nabla f(x, y), (d_1, d_2)^T\rangle \geq 0$. Or $\nabla f(x, y) = (1, 1)$ donc $\langle (1, 1)^T, (d_1, d_2)^T\rangle \geq 0$ ou $d_1 + d_2 \geq 0$ ou $d_2 \geq -d_1$ pour toute direction admissible (d_1, d_2). Donc on cherche un point en lequel toute direction admissible fait un angle aigu avec $(1, 1)$. Le seul candidat c'est le point sur $(x = y)$ c'est à dire $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Dans le cas convexe, l'équation d'Euler est aussi suffisante :

Théorème 2.17 (Condition nécessaire et suffisante : cas convexe)**.** *Soit* $\mathcal{K}$ *un convexe de* $\mathbb{R}^N$. *On considère* $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathcal{K}$. *Supposons que* x^* *est un point intérieur à* $\mathcal{K}$. *Le point* x^* *est un point de minimum global de* f *sur* $\mathcal{K}$ *si et seulement si*

$$\nabla f(x^*) = 0$$

À savoir (fait en cours) 2.13. *Démontrer Théorème 2.17.*

Pour aller plus loin. *En fait sans supposer que* x^* *est un point intérieur on a : Le point* x^* *est un point de minimum global de* f *sur* $\mathcal{K}$ *si et seulement si*

$$\forall x \in \mathcal{K}, \quad \langle \nabla f(x^*), x - x^*\rangle \geq 0$$

- L'implication est l'équation d'Euler. La réciproque repose sur l'inégalité de convexité de f qui stipule

$$\forall (x, y) \in \mathcal{K}^2, \quad f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle$$

On l'applique pour $x = x^*$:

$$\forall y \in \mathcal{K}, \quad f(y) \geq f(x^*) + \underbrace{\langle \nabla f(x^*), y - x^*\rangle}_{\geq 0}$$

D'où

$$\forall y \in \mathcal{K}, \quad f(y) \geq f(x^*)$$

et x^* est un point de minimum global.

Dans le cas général, la condition nécessaire d'ordre 2 est donné par le résultat suivant :

Théorème 2.18 (Condition nécessaire d'ordre 2 en un point intérieur)**.** *Soit* $\mathcal{K}$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$. *On considère* $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathcal{K}$. *Si* x^* *un point de minimum local de* f *sur* $\mathcal{K}$ *qui est à l'intérieur de* $\mathcal{K}$ *alors*

$$\nabla^2 f(x^*) \geq 0$$

À savoir (fait en cours) 2.14. *Démontrer Théorème 2.18.*

- On reprend les mêmes notations que précédemment avec d une direction admissible. Supposons que x^* est un point de minimum intérieur.

Le $DL_2(0)$ de g donne

$$g(\alpha) = g(0) + \alpha g'(0) + \frac{\alpha^2}{2} g''(0) + o(\alpha^2)$$

D'après la théorème ci-dessus $g'(0) = 0 (= \langle \nabla f(x^*), d \rangle)$. Donc

$$g(\alpha) - g(0) = \frac{\alpha^2}{2} g''(0) + o(\alpha^2)$$

Comme précédemment on trouve que $g''(0) \geq 0$. Car sinon on aurait $g''(0) < 0$ et on peut choisir α suffisamment petit pour que

$$|o(\alpha^2)| < -\frac{\alpha^2}{4} g''(0)$$

D'où pour ces α

$$\underbrace{\frac{4}{\alpha^2}[g(\alpha) - g(0)]}_{\geq 0} = g''(0) < 0$$

Ce qui serait une contradiction donc $g''(0) \geq 0$.

En revenant à f on obtient :

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= \langle \nabla f(x^* + \alpha d), d \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x^* + \alpha d), \begin{pmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^* + \alpha d) d_i \end{aligned}$$

D'où (au pire faire la calcul dans $\mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned} g''(\alpha) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^* + \alpha d) d_i\, d_j \\ &= \langle \nabla^2 f(x^* + \alpha d) d, d \rangle \end{aligned}$$

- Comme précédemment si

$$\langle \nabla^2 f(x^*) d, d \rangle \geq 0, \quad \forall d$$

alors $\nabla^2 f(x^*)$ doit être semi-définie positive.

Pour aller plus loin. *Il est facile de déterminer une condition nécessaire d'ordre 2 : Si x^* un point de minimum local de f sur $\mathcal{K}$ alors*

$$\langle \nabla^2 f(x^*) d, d \rangle \geq 0$$

pour toutes directions admissibles telles que

$$\langle \nabla f(x^*), d \rangle = 0$$

Dans le cas général les conditions énoncées ci-dessus ne sont que des conditions nécessaires. Ces résultats conduisent à la procédure suivante de recherche de minimum :

- Analyser théoriquement si on peut espérer déterminer un minimum,
- Déterminer les points stationnaires de f en résolvant $\nabla f(x) = 0$.
- Pour chacun de ces points stationnaires x, déterminer ceux tels que $\nabla^2 f(x) \geq 0$.
- Comparer les valeurs de chacun des candidats restants.

Si on cherche à déterminer un maximum, la procédure est la même exceptée le 3ème point où l'on ne conserve que les points critiques tels que $\nabla^2 f(x) \leq 0$.

Terminons ce chapitre en énonçant des conditions suffisantes :

Théorème 2.19 (Condition suffisante)**.** *Soit $\mathcal{K}$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^N$. On considère $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{K}$. Soit x^* un point intérieur de $\mathcal{K}$. Si*

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla^2 f(x^*) > 0$$

alors x^* un point de minimum local strict de f sur $\mathcal{K}$.

À savoir (fait en cours) 2.15. *Démontrer Théorème 2.19.*

- Soit d une direction quelconque de $\mathbb{S}_1^N$. Le $DL_2(0)$ de f est

$$f(x^* + \alpha d) = f(x^*) + \nabla f(x^*) + \frac{\alpha^2}{2}\langle \nabla^2 f(x^*) d, d\rangle + o(\alpha^2)$$

Par hypothèse $\nabla f(x^*) = 0$ donc

$$f(x^* + \alpha d) = f(x^*) + \frac{\alpha^2}{2}\langle \nabla^2 f(x^*) d, d\rangle + o(\alpha^2)$$

La direction d étant donnée, on peut prendre α_d suffisamment petit pour que

$$|o(\alpha_d^2)| < \frac{\alpha_d^2}{2}\langle \nabla^2 f(x^*) d, d\rangle$$

Pour ces valeurs de α_d on a donc

$$f(x^* + \alpha_d d) > f(x^*) \tag{2.2}$$

Comme cela est vrai pour toute direction $d \in \mathbb{S}_1^N$ et que la sphère unité est fermée et bornée on peut prendre le minimum α^* de tous les α tels que (2.2) soit vérifiée. Pour cette valeur de α on a

$$\forall d \in \mathbb{S}_1^N, \quad f(x^* + \alpha^* d) > f(x^*)\ .$$

Ce qui prouve le résultat annoncé.

Proposition 2.20. *Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Soit x^* un point critique de f alors :*

- *Si $\nabla^2 f(x^*)$ est définie positive alors x^* est un point de minimum local strict,*
- *Si $\nabla^2 f(x^*)$ est définie négative alors x^* est un point de maximum local strict,*
- *Si $\nabla^2 f(x^*)$ est semi-définie positive alors x^* n'est pas un point de maximum local mais il peut éventuellement être un point de minimum local,*
- *Si $\nabla^2 f(x^*)$ est semi-définie négative alors x^* n'est pas un point de minimum local mais il peut éventuellement être un point de maximum local,*
- *Si $\nabla^2 f(x^*)$ est indéfinie alors x^* n'est pas un point de minimum local ni un point de maximum local.*

- Faire la classification dans $\mathbb{R}^2$ et des dessins pour montrer que $\nabla^2 f(x) \geq 0$ n'est pas suffisant.

Proposition 2.21. *Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction de la forme $x \mapsto \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c$ où A est une matrice symétrique, $b \in \mathbb{R}^N$ et $c \in \mathbb{R}$. On a :*

- *Si A est définie positive alors f admet un unique minimum global strict sur $\mathbb{R}^N$,*
- *Si A est définie négative alors f admet un unique maximum global strict sur $\mathbb{R}^N$,*
- *Si A est semi-définie positive alors f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^N$,*
- *Si A est semi-définie négative alors f admet un maximum global sur $\mathbb{R}^N$,*
- *Si A est indéfinie alors alors f n'admet ni minimum ni maximum sur $\mathbb{R}^N$.*

Exercice 2.3. *Est-ce que les fonctions suivantes ont un maximum global ? Un minimum global ?*

1. $f : (x, y) \mapsto x^2 + 2y^2 - 2xy + 6x - 8y + 10$,
2. $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2 - 2xy + 6x - 8y + 10$,
3. $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 4yz + 6x - 8y + 10$

• ex : minimiser $f : (x, y) \mapsto x^2 + 2y^2 - 2xy + 6x - 8y + 10$
La forme quadratique est $(x+y)^2+y^2$ est définie positive donc fortement convexe donc elle admet un unique minimiseur.

• ex : minimiser $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2 - 2xy + 6x - 8y + 10$
La forme quadratique est $(x+y)^2-2y^2$ est indéfinie. f n'a pas de minimum car $\lim_{y\to\infty} f(-y, y) = -\infty$. f n'a pas de maximum car $\lim_{x\to\infty} f(x, 0) = -\infty$.

• ex : minimiser $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 4yz + 6x - 8y + 10$
La forme quadratique est $(x - y - z)^2 + 2yz = (x - y - z)^2 + (y + z)^2/4 - (y - z)^2/4$ est indéfinie. f n'a pas de minimum car $\lim_{z\to\infty} f(0, -z, z) = -\infty$. f n'a pas de maximum car $\lim_{z\to\infty} f(0, z, z) = -\infty$.

Exercice 2.4. *Minimiser* $f(x, y) = -x - 2y - 2xy + x^2/2 + y^2/2$ *sur l'ensemble tel que* $x \geq 0$, $y \geq 0$ *et* $x + y \leq 1$.

• ex : Minimiser $f(x, y) = -x - 2y - 2xy + x^2/2 + y^2/2$ sur l'ensemble tel que $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $x + y \leq 1$.
▷ ce problème a un minimum car le domaine est fermé et borné et que f est continue. Le minimum ne peut pas être atteint à l'intérieur puisque $\nabla f(x, y) = (-1 - 2y + x, -2 - 2x + y)$ ne s'annule pas dans le domaine.
* En $(0, 0)$: les directions admissibles sont (α, β) avec $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$. On a $\nabla f(x, 0) = (-1, -2)$. Faire un dessin. Aucune direction admissible ne fait un angle aigu avec $(-1, -2)$. Donc ça n'est pas un minimum.
* Sur $y = 0$ privé de $(0, 0)$: les directions admissibles sont (α, β) avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \geq 0$. On a $\nabla f(x, 0) = (-1 + x, -2 - 2x) \in [-2, -1] \times [-4, -2]$. Faire un dessin. Par ex, $(-1, 0)$ est une direction admissible et le produit scalaire de $\nabla f(x, y)$ avec $(-1, 0)$ est toujours négatif puisqu'il vaut $x - 1 \in (0, -1)$. Donc il ne peut pas y avoir de minimum sur ce côté.
* Sur $x = 0$ privé de $(0, 0)$: les directions admissibles sont (α, β) avec $\alpha \geq 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. On a$\nabla f(0, y) = (-1 - 2y, -2 + y) \in [-3, -1] \times [-2, -1]$. Faire un dessin. Par ex, $(0, -1)$ est une direction admissible et le produit scalaire de $\nabla f(x, y)$ avec $(0, -1)$ est toujours négatif puisqu'il vaut $y - 2 \in (-2, -1)$. Donc il ne peut pas y avoir de minimum sur ce côté.
* Sur le côté $x + y = 1$ ou $y = 1 - x$: Les directions admissibles sont (α, β) avec $\beta \leq -\alpha$. On a $\nabla f(x, y) = (-1 - 2y + x, -2 - 2x + y) = (3(x - 1), -1 - 3x)$ (le premier est croisant en x en partant de -3 et en allant vers 0, le deuxième décroissant en partant de -1 et en allant vers -4). Peut-on trouver un $x \in (0, 1)$ tel que $(3(x - 1), -1 - 3x)$ forme un angle aigu avec toutes ces directions admissibles ? Oui il y en a un c'est quand $(3(x-1), -1-3x)$ est colinéaire à $(-1, -1)$! C'est à dire pour $x = 1/3$! Donc le minimum est atteint en $(1/3, 2/3)$.

Deuxième partie

Optimisation

Chapitre 3

Optimisation sous contraintes

3.1 Optimisation sous contraintes d'égalité

Soit une fonction $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On considère le problème

$$\inf_{x \in \mathcal{K}} f(x) \tag{3.1}$$

où $\mathcal{K}$ est un ensemble défini par des contraintes d'égalité :

$$\mathcal{K} := \{x \in \mathbb{R}^N \; : \; h_i(x) = 0, \quad \forall i \in \{1, \cdots, m\}\}$$

où, pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$, les fonctions $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On peut aussi le noter

$$\mathcal{K} := \{x \in \mathbb{R}^N \; : \; h(x) = 0\} \tag{3.2}$$

où $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$.

On va avoir besoin d'une condition technique :

Définition 3.1 (Points réguliers). *Le point $x_0 \in \mathcal{K}$ est un* point régulier *si la famille $\{\nabla h_i(x_0)\}_{i \in \{1, \cdots, m\}}$ est une famille libre. Un ensemble est un* ensemble régulier *si l'ensemble des points de cet ensemble est régulier.*

Pour aller plus loin. *(**) Considérons des contraintes linéaires : $Ax = b$ avec $A \in \mathcal{M}_{n,N}$ où $n < N$. Si le rag de A est déficient (c-à-d $\mathrm{rg}(A) = r < n$) alors il existe une matrice $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{r,n}$ de rang plein (c-à-d $\mathrm{rg}(A) = r$) composée des lignes $\{l_{i_1}, \cdots, l_{i_r}\}$ de A telle que*

$$Ax = b \Leftrightarrow \tilde{A}x = \tilde{b}$$

où $\tilde{b}$ est composée des éléments $\{l_{i_1}, \cdots, l_{i_r}\}$ de b. Il est donc toujours possible d'éliminer les lignes redondantes pour se ramener à une matrice de rang plein. On peut donc toujours se ramener au cas où les contraintes linéaires sont linéairement indépendantes.

- Considèrons la famille $\{h_1, h_2\}$ où $h_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ et $h_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y - 1$. La point $(1, 0)$ est-il régulier ? Oui car $\{(1, 0), (1, 1)\}$ est une famille libre.

L'ensemble

$$\mathcal{K} := \{x \in \mathbb{R}^N \; : \; h_i(x) = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall i \in \{1, \cdots, 2\}\}$$

est-il régulier ?

On a $\nabla h_1 = (2x, 2y)$ et $\nabla h_2 = (1, 1)$. Donc tous les points sont réguliers à part ceux sur la droite $y - x = 0$. Mais le système

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ &x + y + 1 = 0 \\ &y - x = 0 \end{aligned}$$

est vide donc tous les points de $\mathcal{K}$ sont réguliers (l'équation (2) et la (3) donnent $x = y = -1/2$ qui n'est pas solution de (1)).

Théorème 3.2 (Conditions nécessaires d'optimalité d'ordre 1, conditions de Lagrange)**.** *Soit x^* un point régulier de $\mathcal{K}$. Si x^* est un extremum local de f sur $\mathcal{K}$ alors il existe $\{\lambda_i^*\}_{i\in\{1,\cdots,m\}} \in \mathbb{R}^m$ (appelés multiplicateurs de Lagrange) tel que*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) = 0$$

À savoir (fait en cours) 3.1. *Avoir une intuition des ingrédients de la démonstration de Théorème 3.2.*

• Quand on veut perturber au point de minimum de (3.1) sous la contrainte (3.2), on ne peut plus se déplacer dans n'importe quelle direction, il faut rester dans l'ensemble $\mathcal{K}$. Pour s'en assurer considérons la fonction

$$\begin{array}{rccc} x: & \mathbb{R} & \to & \mathcal{K} \\ & \alpha & \mapsto & x(\alpha) \end{array}$$

avec $x(0) = x^*$ qui paramétrise localement $\mathcal{K}$ dans un voisinage de x^* et qui passe par x^*, c-à-d telle que au moins dans un voisinage de 0 $x(\alpha)$ reste dans $\mathcal{K}$. On va voir ci-dessous comment s'en assurer mais remarquons déjà que pour cette fonction x, la démonstration faite dans le chapitre précédent reste valable s'il l'on remplace $x^* + \alpha\, d$ par $x(\alpha)$. Remarquons que $\alpha \mapsto x^* + \alpha\, d$ était une pramétrisation de $\mathcal{K}$ qui passait par x^* dans le chapitre précédent.

On considère la fonction définie dans un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 :

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathcal{V} & \to & \mathbb{R} \\ & \alpha & \mapsto & f(x(\alpha)) \end{array}$$

Comme dans le calcul précédent on a

$$g(\alpha) = g(0) + \alpha\, g'(\alpha) + o(\alpha)$$

ce qui conduit à $g'(0) = 0$ car l'on peut prendre α positif ou négatif. Or

$$g'(\alpha) = \langle \nabla f(x(\alpha)), x'(\alpha)\rangle$$

donc

$$0 = g'(0) = \langle \nabla f(x^*), x'(0)\rangle$$

Le vecteur $x'(0)$ est un objet très important ici puisqu'il donne la pente dans laquelle décroit f (il faut que le gradient de f soit orthogonal à $x'(0)$). En fait par le $DL_1(0)$ de x on a

$$x(\alpha) = \underbrace{x(0)}_{x^*} + \alpha x'(0) + o(\alpha) = \underbrace{x^* + \alpha x'(0)}_{\text{meilleure approximation linéaire de } x} + o(\alpha)$$

En fait $x'(0)$ est appelé *vecteur tangent* à $\mathcal{K}$ en x^*. On appelle plan tangent, et l'on note $T_{x^*}\mathcal{K}$, l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathcal{K}$ en x^*.

Comme $\mathcal{K}$ est défini par

$$\mathcal{K} := \{x \in \mathbb{R}^N \,:\, h_i(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall i \in \{1,\cdots,m\}\}$$

on doit avoir

$$\forall \alpha \in \mathcal{V},\ \forall i \in \{1,\cdots,m\}, \qquad h_i(x(\alpha)) = 0$$

Si on dérive cette égalité on trouve :

$$\forall \alpha \in \mathcal{V},\ \forall i \in \{1,\cdots,m\}, \qquad \langle \nabla h_i(x(\alpha)), x'(\alpha)\rangle = 0$$

En prenant $\alpha = 0$ on obtient

$$\forall \alpha \in \mathcal{V},\ \forall i \in \{1,\cdots,m\}, \qquad \langle \nabla h_i(x^*), x'(0)\rangle = 0$$

Donc un vecteur tangent à $\mathcal{K}$ doit être orthogonal à tous les $\nabla h_i(x^*)$. En fait, l'inverse est aussi vrai (mis c'est plus compliqué à voir) on peut donc définir le plan tangent $T_{x^*}\mathcal{K}$ comme l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les $\nabla h_i(x^*)$:

$$T_{x^*}\mathcal{K} = \{d \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle \nabla h_i(x^*), d\rangle = 0\}$$

Le plan tangent $T_{x^*}\mathcal{K}$ est un espace vectoriel.

Comme on peut prendre toutes les paramétrisations possibles de $\mathcal{K}$ passant par x^* on peut réécrire

$$0 = \langle \nabla f(x^*), x'(0)\rangle$$

où x est une paramétrisationn possible de $\mathcal{K}$ passant par x^* par

$$0 = \langle \nabla f(x^*), d\rangle, \quad \forall d \in T_{x^*}\mathcal{K}$$

ou même

$$0 = \langle \nabla f(x^*), d\rangle, \quad \forall d \in \{d \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle \nabla h_i(x^*), d\rangle = 0,\ \forall i \in \{1, \cdots, m\}\}$$

On a plus à décrire la paramétrisation mais peut-on se passer de l'utilisation indirecte de d ? En fait on va prouver que cette caractérisation est équivalent à

$$\nabla f(x^*) \in \mathrm{Vect}\{\nabla h_i\}_{i\in\{1,\cdots,m\}}$$

En effet, supposons par l'absurde que ça ne soit pas le cas. Alors, comme $\mathbb{R}^n = F \oplus \mathcal{F}^\perp$ où $F = \mathrm{Vect}\{\nabla h_i\}_{i\in\{1,\cdots,m\}}$, $\nabla f(x^*)$ aurait une composante dans l'orthogonal de F, c-à-d il existe $d \neq 0$ tel que

$$\nabla f(x^*) = \underbrace{d}_{\in F^\perp} - \underbrace{\sum \lambda_i^* \nabla h_i(x^*)}_{\in F}$$

où

$$\forall i \in \{1, \cdots, m\}, \qquad \langle \nabla h_i(x^*), d\rangle = 0$$

On prend le produit scalaire avec d des deux côtés on obtient :

$$\underbrace{\langle \nabla f(x^*), d\rangle}_{=0} = \langle d, d\rangle - \underbrace{\langle d, \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*)\rangle}_{=0} = 0$$

ce qui implique $d = 0$.

La condition ci-dessus peut donc se ré-ércrire : il existe $\{\lambda_i^*\}_{i\in\{1,\cdots,m\}}$ tel que

$$0 = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*)$$

Exercice 3.1. *Déterminer* $\min f$ *sur* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x + y = 1\}$ *où* $f(x, y) = x^2 + y^2$.

- On a $\nabla f(x, y) = (2s, 2y)$ et $\nabla h(x, y) = (1, 1)$. Le système est donc

$$\begin{aligned} 2x + \lambda &= 0 \\ 2y + \lambda &= 0 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

On obtient pour argmin $(1/2, 1/2)$ et $\lambda = -1$.

Exercice 3.2. *Déterminer* $\min f$ *sur* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x - 1)^2 + y^2 = 1$ *et* $(x + 1)^2 + y^2 = 1\}$ *où* $f(x, y, z) = x^2 - y + z^2$.

• Attention à l'hypothèse de régularité ! On considère $f(x,y,z) = x^2 - y + z^2$ sous les contraintes $h_1 : (x-1)^2 + y^2 - 1$ et $h_2 : (x+1)^2 + y^2 - 1$ (deux cylindres adjacents). En fait l'ensemble des contraintes est $x = y = 0$ car $(x-1)^2 = 1 - y = (x+1)^2$ donc $|x-1| = |x+1|$ ce qui donne $x - 1 = x = 1$ impossible, $1 - x = x + 1$ ou $x = 0$ et $1 - x = -1 - x$ qui est impossible. Donc la fonction à minimiser est $f(x,y,z) = z^3$ qui est minimum en $(0,0,0)$. Pourtant $\nabla h_1(0,0,0) = (-2,0,0)$ et $\nabla h_2(0,0,0) = (2,0,0)$ qui ne forme pas une famille libre. D'ailleurs $\nabla f(0,0,0) = (0,-1,0)$ ne vérifie pas

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) = 0$$

On peut introduite le lagrangien du problème de minimisation sous contraintes :

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{L} : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R} \\ & (x,\lambda) & \mapsto & f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) \end{array}$$

On peut alors calculer

$$\nabla \mathcal{L}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \nabla_x \mathcal{L}(x,\lambda) \\ \nabla_\lambda \mathcal{L}(x,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x) \\ h_i(x) \end{pmatrix}$$

Donc x^* est un extremum de f sous la contrainte $\mathcal{K}$ si et seulement si (x^*, λ^*) est point critique de $\mathcal{L}$.

En continuant à suivre la démonstration faite dans le chapitre précédent on peut montrer de même une condition nécessaire d'ordre 2 :

Proposition 3.3 (Condition nécessaire d'ordre 2)**.** *Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Considérons la matrice Hessienne de $\mathcal{L}$ par rapport à la variable x :*

$$\nabla_x^2 \mathcal{L}(x,\lambda) = \nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, \nabla^2 h_i(x) \; .$$

Soit x^* un point régulier de $\mathcal{K}$. Si x^* est un minimum local de f sur $\mathcal{K}$ alors $\nabla_x^2 \mathcal{L}$ doit être semi-définie positive sur le plan tangent à $\mathcal{K}$ en x^* c-à-d

$$\langle \nabla_x^2 \mathcal{L}(x,\lambda) d, d \rangle \geq 0 \qquad \forall d \in \{d \, : \, \langle \nabla h_i(x^*), d \rangle = 0, \; \forall i \in \{1, \cdots, m\}\} \; .$$

Exercice 3.3. *Considérons le problème*

$$\max_{(x,y) \in \mathcal{K}} 2xy$$

où

$$\mathcal{K} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x + y = 1\}$$

1. *Déterminer les candidats à être solutions de ce problème.*
2. *Pour chacun de ces candidats vérifier s'ils sont candidats à être maximum ou minimum en utilisant la condition d'ordre 2 ci-dessus.*

- On a vu que le point critique du Lagrangien est $(1/2, 1/2; -1)$. On calcule

$$\nabla_x^2 \mathcal{L}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est indéfinie. Par contre les directions admissibles sont engendrées par $\mathrm{Vect}\{(1,-1)\}$ et on a

$$\nabla_x^2 \mathcal{L}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -4 < 0$$

donc un point candidat est candidat à être un maximum.

Exercice 3.4. *Considérons le problème*

$$\max_{(x,y,z)\in\mathcal{K}} 2xy + 2xz + 2yz$$

où

$$\mathcal{K} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+y+z = 1\}$$

1. *Déterminer les candidats à être solutions de ce problème.*
2. *Pour chacun de ces candidats vérifier s'ils sont candidats à être maximum ou minimum en utilisant la condition d'ordre 2 ci-dessus.*

-
  1. On a
  $$\nabla f(x,y,z) = 2\begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix}$$
  Donc les points critiques sont $(0,0,0)$. On a
  $$\nabla^2 f(x,y,z) = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
  qui est indéfinie.
  2. L'ensemble des directions admissibles est $\mathrm{Vect}\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$. On a
  $$2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -4 < 0$$
  et
  $$2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -4 < 0$$
  Donc $(0,0,0)$ est un maximum local.

Terminons cette section avec une interprétation des mutliplicateurs : un multiplicateur de Lagrange mesure la sensibilité de la contrainte

Proposition 3.4 (Interprétation des multiplicateurs)**.** *Considérons le problème de minimisation de f sous la contrainte perturbée :*

$$\{x \in \mathbb{R}^N \,:\, h_i(x) = 0 \quad \forall i \in \{1,\cdots,m\}\setminus\{j\} \quad \textit{et} \quad h_j(x) + \varepsilon = 0\}$$

Supposons que l'on a pas de problème de régularité. Si $x^*(\varepsilon)$ est solution de ce problème, on a

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(x^*(\varepsilon))_{|\varepsilon=0} = \lambda_j^*$$

où λ_j^* est le j-ème multiplicateur de Lagrange de (3.1) *sous la contrainte* (3.2)*.*

À savoir (fait en cours) 3.2. *Démontrer Proposition 3.4 dans le cas où il n'y a pas de problème de régularité.*

-

Démonstration. On considère le problème de minimisation sous contraintes perturbée. En utilisant les notations ci-dessus on pose

$$\mathcal{L}_\varepsilon(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1\setminus i=j}^{n} \lambda_i h_i(x) + \lambda_j(h_j(x)+\varepsilon)$$

Si $(x(\varepsilon,)\lambda(\varepsilon))$ est solution de ce problème, d'après Theorème 3.2 on a

$$\nabla_x \mathcal{L}_\varepsilon(x(\varepsilon),\lambda(\varepsilon)) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_\lambda \mathcal{L}_\varepsilon(x(\varepsilon),\lambda(\varepsilon)) = 0$$

d'où en utilisant $f(x(\varepsilon)) = \mathcal{L}_\varepsilon(x(\varepsilon),\lambda(\varepsilon))$

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(x(\varepsilon)) = \langle \underbrace{\nabla_x \mathcal{L}_\varepsilon(x(\varepsilon),\lambda(\varepsilon))}_{=0}, x'(\varepsilon)\rangle + \langle \underbrace{\nabla_\lambda \mathcal{L}_\varepsilon(x(\varepsilon),\lambda(\varepsilon))}_{=0}, \lambda'(\varepsilon)\rangle + \underbrace{\partial_\varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon(x(\varepsilon),\lambda(\varepsilon))}_{=\lambda_j(\varepsilon)}$$

Compte tenu de la nullité des dérivées du Lagrangien à l'optimum rappelé ci-dessus et que $\lambda_j(0) = \lambda_j$ on obtient

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(x(\varepsilon))_{|\varepsilon=0} = \lambda_j$$

□

Par définition de la dérivée on a

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(x^*(\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x^*(\varepsilon)) - f(x^*(0))}{\varepsilon}$$

que l'on peut écrire en utilisant la notation de Landau et $x^*(0) = x^*$

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(x^*(\varepsilon)) = \frac{f(x^*(\varepsilon)) - f(x^*)}{\varepsilon} + o(1)$$

Donc la conclusion de Proposition 3.4

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(x^*(\varepsilon)) = \lambda_j^*$$

peut s'écrire

$$\lambda_j^* = \frac{f(x^*(\varepsilon)) - f(x^*)}{\varepsilon} + o(1)$$

ou de façon équivalente en multipliant par ε :

$$\varepsilon\lambda_j^* = f(x^*(\varepsilon)) - f(x^*) + o(\varepsilon)$$

ou encore

$$f(x^*(\varepsilon)) = f(x^*) + \varepsilon\lambda_j^* + o(\varepsilon)$$

Exercice 3.5. *Résoudre*

1.
$$\min_{\{x\in\mathbb{R}\,:\,x=0\}} -x$$

2.
$$\min_{\{x\in\mathbb{R}\,:\,x+\varepsilon=0\}} -x$$

3.
$$\min_{\{x\in\mathbb{R}\,:\,x=0\}} -10x$$

4.
$$\min_{\{x\in\mathbb{R}\,:\,x+\varepsilon=0\}} -10x$$

-
  1. Les solutions sont
  $$\begin{cases} \lambda^* = 1 \\ x^* = 0 \end{cases}$$
  On a donc $f(x^*) = 0$.
  2. Les solutions sont
  $$\begin{cases} \lambda^\varepsilon = 1 \\ x^\varepsilon = -\varepsilon \end{cases}$$
  On a donc $f(x^\varepsilon) = \varepsilon$. D'ailleurs en utilisant
  $$f(x^*(\varepsilon)) = f(x^*) + \varepsilon\lambda_j^* + o(\varepsilon)$$
  on a
  $$f(x^*(\varepsilon)) = 0 + \varepsilon + o(\varepsilon)$$
  3. Les solutions sont
  $$\begin{cases} \lambda^* = 10 \\ x^* = 0 \end{cases}$$
  On a donc $f(x^*) = 0$.
  4. Les solutions sont
  $$\begin{cases} \lambda^\varepsilon = 10 \\ x^\varepsilon = -\varepsilon \end{cases}$$
  On a donc $f(x^\varepsilon) = 10\varepsilon$. D'ailleurs en utilisant
  $$f(x^*(\varepsilon)) = f(x^*) + \varepsilon\lambda_j^* + o(\varepsilon)$$
  on a
  $$f(x^*(\varepsilon)) = 0 + 10\varepsilon + o(\varepsilon)$$

Pour aller plus loin. *Ce résultat donne une interprétation économique aux multiplicateurs de Lagrange : considérons un consommateur qui maximise son utilité $f : x \in \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sous les contraintes $\{h_i = 0\}_{i\in\{1,\cdots,m\}}$. Notons $f(x^*)$ son utilité au niveau de consommation optimale. Si le consommateur aloue un euro de plus de budget à la contrainte h_j alors il augmente, au niveau de consommation optimale, son utilité d'un montant égal à λ_j^*. Autrement dit, le mutliplicateur λ_j^* est égal à son gain de productivité marginal. On appelle ainsi parfois λ_j^* le* profit marginal de l'argent, *la* valeur interne, *le* prix fantôme *ou le* profit d'opportunité. *λ_j^* mesure la sensibilité de la valeur optimale $f(x^*)$ à la relaxation de la j-ème contrainte.*

Exercice 3.6. *Considérons le problème*

$$\min x + y \; . \tag{3.3}$$

1. *Résoudre le problème* (3.3) *sous les contraintes* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 = 1 \; , \; y = 0\}$ *et déterminer les multiplicateurs de Lagrange associés à ces contraintes.*
2. *Résoudre approximativement le problème* (3.3) *sous les contraintes* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 + \varepsilon = 1 \; , \; y = 0\}$.
3. *Résoudre exactement le problème* (3.3) *sous les contraintes* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 + \varepsilon = 1 \; , \; y = 0\}$.
4. *Résoudre approximativement le problème* (3.3) *sous les contraintes* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 = 1 \; , \; y + \varepsilon = 0\}$.
5. *Résoudre exactement le problème* (3.3) *sous les contraintes* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 = 1 \; , \; y + \varepsilon = 0\}$.
6. *En déduire dans laquelle des deux contraintes il vaut mieux récupérer un budget de 0.1 euro.*

• Attention cela ne signifie pas que les multiplicateurs sont forcément tous négatifs en un minimum !

Pour chacun des problèmes proposés : Il y a un maximum et un minimum. L'ensemble des contraintes est régulier.

1. Le système de Lagrange a pour solution $(x^*, y^*; \lambda_1^*, \lambda_2^*) = (-1, 0; 1/2, -1)$ (qui est le minimum) et $(1, 0; -1/2, -1)$ (qui est un maximum). Donc le minimum vaut -1 en $(-1, 0; 1/2, -1)$.
2. On a au minimum :
$$f(x^*(\varepsilon), y^*(\varepsilon)) = \underbrace{f(x^*, y^*)}_{=-1} + \varepsilon\lambda_1^* + o(\varepsilon)$$
donc
$$f(x^*(\varepsilon), y^*(\varepsilon)) = -1 + \frac{1}{2}\varepsilon + o(\varepsilon)$$
3. Le système de Lagrange a pour solution $(\pm\sqrt{1-\varepsilon}, 0; \mp 1/2\sqrt{1-\varepsilon}, -1)$. On a donc en $(x^*(\varepsilon), y^*(\varepsilon); \lambda_1^*(\varepsilon), \lambda_1^*(\varepsilon)) = (-\sqrt{1-\varepsilon}, 0; 1/2\sqrt{1-\varepsilon}, -1)$
$$f(x^*(\varepsilon), y^*(\varepsilon)) = -\sqrt{1-\varepsilon}$$
Remarquons que par développement limité on a
$$f(x^*(\varepsilon), y^*(\varepsilon)) = -\sqrt{1-\varepsilon} = -1 + \frac{1}{2}\varepsilon + o(\varepsilon)$$
4. On a
$$f(x^*(\varepsilon), y^*(\varepsilon)) = \underbrace{f(x^*, y^*)}_{=-1} + \varepsilon\lambda_2^* + o(\varepsilon)$$
donc
$$f(x^*(\varepsilon), y^*(\varepsilon)) = -1 - \varepsilon + o(\varepsilon)$$
5. Le système de Lagrange a pour solution $(\pm\sqrt{1-\varepsilon^2}, -\varepsilon; \mp 1/2\sqrt{1-\varepsilon^2}, -1 \mp \varepsilon/\sqrt{1-\varepsilon^2})$. On a donc en $(x^*(\varepsilon), y^*(\varepsilon); \lambda_1^*(\varepsilon), \lambda_1^*(\varepsilon)) = (-\sqrt{1-\varepsilon^2}, -\varepsilon; 1/2\sqrt{1-\varepsilon^2}, -1 + \varepsilon/\sqrt{1-\varepsilon^2})$
$$f(x^*(\varepsilon), y^*(\varepsilon)) = -\sqrt{1-\varepsilon^2} - \varepsilon$$
Remarquons que par développement limité on a
$$f(x^*(\varepsilon), y^*(\varepsilon)) = -\sqrt{1-\varepsilon^2} - \varepsilon = -1 - \varepsilon + o(\varepsilon)$$

3.2 Optimisation sous contraintes d'égalité et d'inégalité

Soit une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On considère le problème
$$\inf_{x \in \mathcal{K}} f(x) \tag{3.4}$$
où $\mathcal{K}$ est un ensemble défini par des contraintes d'égalité :
$$\mathcal{K} := \left\{ x \in \mathbb{R}^N \ : \ \left\{ \begin{array}{ll} h_i(x) = 0, & \forall i \in \{1, \cdots, m\} \\ g_j(x) \leq 0, & \forall j \in \{1, \cdots, p\} \end{array} \right. \right\}$$
où, pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$, les fonctions $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $j \in \{1, \cdots, p\}$, les fonctions $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On peut aussi le noter
$$\mathcal{K} := \left\{ x \in \mathbb{R}^N \ : \ \left\{ \begin{array}{l} h(x) = 0, \\ g(x) \leq 0, \end{array} \right. \right\} \tag{3.5}$$
où $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$.

3.2.1 Contraintes actives

Définition 3.5 (Contraintes d'inégalité actives). *Considérons le problème* (3.4) *sous les contraintes* (3.6).

L'indice $j \in \{1, \cdots, p\}$ étant donné, une contrainte d'inégalité $g_j(x) \leq 0$ est dite active en x_0 *si $g_j(x_0) = 0$. Sinon lorsque $g_j(x_0) < 0$ elle est dite* inactive en x_0.

L'ensemble des indices des contraintes qui sont actives en x_0 est noté $\mathcal{I}(x_0)$:

$$\mathcal{I}(x_0) := \{j \in \{1, \cdots, p\} \, : \, g_j(x_0) = 0\} \, .$$

• On considère $\min x^2$ sur $\mathcal{K}$ où $\mathcal{K} := x \leq 4, x \geq -10$. Ce problème a pour solution évidente $x = 0$. Or $g_1(0) < 0$ et $g_2(0) = -10 < 0$ donc aucune contrainte n'est active. On note $\mathcal{I}(0) =$.

Par contre si $\mathcal{K} := x \leq 4, x \geq 1$ alors la solution est $x^* = 1$ On a $g_1(1) < 0$ donc g_1 n'est pas active en le min mais $g_2(1) = 0$ donc g_2 est active en 1. On a $\mathcal{I}(1) = \{2\}$.

Pour aller plus loin. *(**) On peut voir que x^* est un minimum local de problème* (3.4) *sous les contraintes* (3.6) *si et seulement si x^* est un minimum local de problème* (3.4) *sous les contraintes*

$$\mathcal{K} := \left\{ x \in \mathbb{R}^N \, : \, \left\{ \begin{array}{ll} h(x) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}^n \\ g_j(x) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall j \in \mathcal{I}(x^*) \end{array} \right. \right\} \tag{3.6}$$

On peut donc ignorer les contraintes inactives à la solution et considérer les contraintes actives à la solution comme des contraintes d'égalité. Ainsi le théorème 3.2 s'applique : si la concaténation des familles $\nabla h_i(x^*)_{i \in \{1, \cdots, n\}}$ et $\{\nabla g_j(x^*)\}_{j \in \mathcal{I}(x)}$ forme une famille libre alors il existe $\{\lambda_i^*\}_{i \in \{1, \cdots, m\}} \in \mathbb{R}^m$, $\{\mu_j\}_{j \in \mathcal{I}(x)}$ tels que

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{j \in \mathcal{I}(x)} \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0$$

• Malheureusement cette hypothèse de régularité est trop forte (penser à remplacer uen cintraintes d'égalité par deux contraintes d'inégalité et ça ne marche plus). Heuresement on peut faire mieux puisque les contraintes d'inégalité permettent non-seulement de se déplacer sur $g_j(x) = 0$ mais aussi dans $g_j(x) < 0$ c'est l'objet de la section qui va suivre.

3.2.2 Conditions de qualification

• On a compris que l'idée est centrale est de se déplacer dans une direction admissible. Dans le cas de contraintes d'inégalités deux choses peuvent se passer : soit $g_j(x) < 0$, cette contrainte n'est pas active, (elle ne limite pas les directions dans lesquelles il est possible de se déplacer) ou bien $g_j(x) = 0$ et c'est une contrainte d'égalité.

Définition 3.6 (Point admissible). *Soit $\mathcal{K}$ un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^N$. Un élement de $\mathcal{K}$ est dit* point admissible.

Définition 3.7 (Direction admissible). *Soit $\mathcal{K}$ un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^N$. Soit x un point admissible. Une direction $d \in \mathbb{R}^N$ est dite* direction admissible *(pour x) s'il existe $\eta < 0$ tel que $x + \alpha d$ soit dans $\mathcal{K}$ pour tout $\alpha \in [0, \eta[$.*

• Bien sûr on peut se restreindre aux directions $d \in \mathbb{S}_1^N$.

• Dans un convexe, il suffit de prendre $d = y - x_0$ où $y \in \mathcal{K}$ car $x_0 + \alpha d = x_0 + \alpha(y - x_0) = (1 - \alpha)x_0 + y$ est dans $\mathcal{K}$

• Si x_0 est à l'intérieur d'un ensemble alors toute direction est admissible puisqu'il existe r tel que $B_r(x_0) \subset \mathcal{K}$. Donc on peut prendre n'importe quelle direction et $\eta = r$.

•

- Cas linéaire : Considèrons le problème $\min f$ sur l'ensemble

$$\mathcal{K} := \{x \, : \, h_i(x) + a = 0, \; g_j(x) \leq 0\}$$

où pour tout i et tout j, h_i et g_j sont linéaires. Soit x un point admissible.

Pour que d soit une direction admissible il faut que

1. pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$,
$$0 = h_i(x + \alpha d) + a = h_i(x) + \alpha h_i(d) + a = \underbrace{h_i(x) + a}_{=0} + \alpha h_i(d)$$
Ceci implique $h_i(d) = 0$ pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$. Que l'on peut écrire artificellement (le faire sur un exemple)
$$\langle \nabla h_i, d \rangle = 0, \qquad \forall i \in \{1, \cdots, m\}$$
2. pour tout $j \in \{1, \cdots, p\}$
$$0 \geq g_j(x + \alpha d) = \underbrace{g_j(x)}_{\leq 0} + \alpha g_j(d)$$
   (a) Pour les indices j en lesquels $g_j(x) < 0$ (les contraintes non-actives) on peut prendre n'importe quel d quitte à prendre α suffisamment petit.
   (b) Pour les indices j en lesquels $g_j(x) = 0$ (les contraintes actives) on peut juste prendre des d telles que $g_j(d) \leq 0$.

   pour tout $j \in \mathcal{I}(x)$ il faut que $g_j(d) \leq 0$. Que l'on peut écrire artificellement
$$\langle \nabla g_j, d \rangle \leq 0, \qquad \forall j \in \mathcal{I}(x)$$

- Cas local non-linéaire : Considèrons $\min f$ sur l'ensemble $\mathcal{K} := \{x \, : \, h(x) = 0, \, g(x) \leq 0\}$. Soit x_0 un point admissible.

1. Une direction d est admissible s'il existe α suffisamment petit tel que
$$h(x + \alpha d) = 0$$
ou pour tout i dans $\{1, \cdots, m\}$
$$h_i(x + \alpha d) = 0$$
Par développement limité de $h_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ on a
$$h_i(x + \alpha d) = \underbrace{h_i(x)}_{=0} + \alpha \langle \nabla h_i(x), d \rangle + o(\alpha)$$
il faut donc
$$\forall i \in \{1, \cdots, m\}, \qquad \langle \nabla h_i(x), d \rangle = 0$$
2. Une direction d est admissible s'il existe α suffisamment petit tel que
$$g(x + \alpha d) \leq 0$$
ou pour tout $j \in \{1, \cdots, p\}$
$$g_j(x + \alpha d) \leq 0$$
Par développement limité de $g_j : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ on a pour tout $j \in \{1, \cdots, p\}$
$$g_j(x + \alpha d) = g_j(x) + \langle \nabla g_j(x), \alpha \, d \rangle + o(\alpha \|d\|)$$
ou,
$$g_j(x + \alpha d) = g_j(x) + \alpha \, \langle \nabla g_j(x), d \rangle + o(\alpha \|d\|)$$
En tous les j tels que $g_j(x) < 0$ (ceux en lesquels la contrainte n'est pas active ou tous les $j \notin \mathcal{I}(x)$) on a
$$g_j(x + \alpha d) = \underbrace{g_j(x)}_{<0} + o(1)$$
on peut toujours trouver α suffisamment petit tel que $g_j(x + \alpha d) \leq 0$ donc tel que d soit une direction admissible. Par contre pour les j tels que $g_j(x) = 0$ (ceux en lesquels la contrainte est active ou tous les $j \in \mathcal{I}(x)$), on a
$$g_j(x + \alpha d) = g_j(x) + \alpha \, \langle \nabla g_j(x), d \rangle + o(\alpha \|d\|)$$

ou, comme $g_j(x) = 0$
$$g_j(x + \alpha d) = \alpha \langle \nabla g_j(x), d\rangle + o(\alpha\|d\|)$$
Donc si on veut avoir
$$g_j(x + \alpha d) = \alpha \langle \nabla g_j(x), d\rangle + o(\alpha\|d\|) \leq 0$$
pour α suffisament petit on peut imposer
$$\langle \nabla g_j(x), d\rangle < 0$$
Remarquons que si l'inégalité n'était pas stricte il est possible que $o(\alpha)$ soit négatif et donc que la contrainte ne soit pas satisfaite.

Proposition 3.8 (Cône tangent linéarisé ou cône linéarisant)**.** *Considérons le problème* (3.4) *sous les contraintes* (3.6)*. Soit x un point admissible. Le vecteur d est une direction admissible si*

1. $$\forall i \in \{1, \cdots, m\}, \qquad \langle \nabla h_i(x), d\rangle = 0$$
   et
2. - *Si $j \notin \mathcal{I}(x)$ alors toute direction est admissible,*
   - *Si $j \in \mathcal{I}(x)$ alors une direction d est admissible si*
   $$\langle \nabla g_j(x), d\rangle < 0\ .$$
   si g_j n'est pas affine et, si g_j est affine
   $$\langle \nabla g_j(x), d\rangle \leq 0\ .$$

À savoir (fait en cours) 3.3. *Avoir une intuition des ingrédients de la démonstration de Proposition 3.8.*

Pour aller plus loin. *(***) On peut aller plus loin et définir le cône tangent en x^* :*
$$\{d \in \mathbb{R}^N,\ \exists (d_k)_k \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}, d_k \to d, \exists (\alpha_k)_k \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}, \alpha_k \to 0\ :\ \forall k, x_k = x^* + \alpha_k d_k \in \mathcal{K}, \}$$

Plutôt que de travailler avec les directions, comme nous avons choisi de le faire dans ce cours, on peut même travailler directement sur des suites admissibles et c'est la façon de faire la plus générale (et la plus intuitive) mais la moins pratique, le cône obtenu est appelé cône tangent au sens de Bouligand ou cône contingent *: une suite $(x_k)_k$ est appelée suite admissible en x^* si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$,
2. *il existe k_0 tel que x_k soit admissible pour tout $k \geq k_0$,*
3. $x_k \neq x^*$ *pour tout k.*

En principe le cône tangent linéarisé est inclus dans le cône tangent qui est inclus dans l'ensemble des suites admissibles. Ils coïncident dans le cas où les contraintes sont dites *qualifiée*. Les contraintes sont, par exemple, qualifiées en x si

- $\mathcal{K}$ est un polyèdre convexe : h et g sont affines,
- $\mathcal{K}$ est un ensemble dit «régulier» : La concaténation des familles $(\nabla h_i(x))_{i\in\{1,\cdots,m\}}$ et $(\nabla g_j(x))_{j\in\mathcal{I}(x)}$ forme une famille libre.
- Conditions de Mangasarian-Fromowitz :
  — La famille $(\nabla h_i)(x)$ est libre,
  — il existe une direction d dans le cône tangent linéarisé en x.
- Critère de qualification de Slater :

Proposition 3.9 (Conditions de Slater)**.** *Supposons que les fonctions* $\{h_i\}_{i\in\{1,\cdots,m\}}$ *et* $\{g_j\}_{j\in\{1,\cdots,p\}}$ *sont convexes. S'il existe* y *à l'intérieur de* $\mathcal{K}$ *tel que*

$$\forall i\in\{1,\cdots,m\},\quad h_i(y)=0$$
$$\forall j\in\{1,\cdots,p\},\quad \begin{cases} g_j(y)<0 \text{ si } g_j \text{ n'est pas affine et} \\ g_j(y)\leq 0 \text{ si } g_j \text{ est affine.}\end{cases}$$

Alors pour tout $x\in\mathcal{K}$ *les contraintes sont qualifiées en* x*.*

Exercice 3.7. *Démontrer Proposition 3.9.*

• Soit $x\in\mathcal{K}$. Si toutes les fonctions sont affines alors les contraintes sont qualifiées. Si $\mathcal{I}(x)=\emptyset$ il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $\mathcal{I}(x)\neq\emptyset$ et que toutes les fonctions $\{g_j\}_{j\in\{1,\cdots,p\}}$ ne sont pas affines. Par convexité de g_j on a pour tout $j\in\{1,\cdots,p\}$

$$\forall y\in\mathcal{K}^\circ\qquad g_j(y)\geq g_j(x)+\langle\nabla g_j(x),y-x\rangle$$

En utilisant la définition de $\mathcal{I}$ on a pour tout $j\in\mathcal{I}(x)$

$$\forall y\in\mathcal{K}^\circ\qquad g_j(y)\geq\langle\nabla g_j(x),y-x\rangle$$

ou pour tout $j\in\mathcal{I}(x)$

$$\forall y\in\mathcal{K}^\circ\qquad \langle\nabla g_j(x),y-x\rangle\leq g_j(y)$$

En l'appliquant au y de l'hypothèse on obtient pour tout $j\in\mathcal{I}(x)$

$$\langle\nabla g_j(x),y-x\rangle\leq g_j(y)\leq 0$$

et si g_j n'est pas affine

$$\langle\nabla g_j(x),y-x\rangle\leq g_j(y)<0$$

Donc les contraintes sont qualifiées en x avec $d=y-x$.

Il y a d'autres conditions de qualifications que nous ne verrons pas ici comme la condition de qualification du rang constant, ou de dépendance linéaire ou de quasi-normalité.

3.2.3 Théorème de Karush-Kuhn-Tucker

Théorème 3.10 (Théorème de Karush (1939)-Kuhn-Tucker(1951))**.** *Soit* x^* *un point en lequel la qualification des contraintes est vérifiée. Si* x^* *est solution du problème* (3.4) *sous les contraintes* (3.6) *alors il existe* $\{\lambda_i^*\}_{i\in\{1,\cdots,m\}}\in\mathbb{R}^m$ *et* $\{\mu_j^*\}_{j\in\{1,\cdots,p\}}\in\mathbb{R}^p$ *tels que*

$$\nabla f(x^*)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^*\nabla h_i(x^*)+\sum_{j=1}^p\mu_j^*\nabla g_j(x^*)=0 \tag{3.7}$$

avec

— *admissibilité : pour tout* i *dans* $\{1,\cdots,m\}$*,* $h_i(x^*)=0$ *et pour tout* j *dans* $\{1,\cdots,p\}$*,* $g_j(x^*)\leq 0$*,*

— *complémentarité : pour tout* j *dans* $\{1,\cdots,p\}$*,* $\mu_j\, g_j(x^*)=0$*,*

— *positivité : pour tout* j *dans* $\{1,\cdots,p\}$*,* $\mu_j\geq 0$*.*

• La condition de Lagrange s'obtient par le démonstration habituelle. La complémentarité stipule que si une contrainte d'inégalité n'est pas active son multiplicateur est nul. Au regard de la Proposition 3.4 la positivité indique que c'est un point de minimum. D'ailleurs si on cherche un maximum il faut juste changer le signe des μ_j. De même si les conraintes sont $g_j(x)\geq 0$ (car alors on refait Proposition 3.4 avec $-\varepsilon$). S'il y a des μ_j positifs et d'autres négatifs alors ça n'est ni un max ni un min (il y a des directions où l'on monte d'autres où l'on descend)

Pour aller plus loin. *(***) On peut relâcher les hypothèses de qualification du Théorème* (3.10) *c'est le théorème de John (1948) : Si* x^* *est solution du problème* (3.4) *sous les contraintes* (3.6) *alors il existe* $\mu_0 \neq 0$, $\{\lambda_i^*\}_{i\in\{1,\cdots,m\}} \in \mathbb{R}^m$ *et* $\{\mu_j^*\}_{j\in\{1,\cdots,p\}} \in \mathbb{R}^p$ *tels que*

$$\mu_0 \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0$$

avec

— *admissibilité : pour tout* i *dans* $\{1,\cdots,m\}$, $h_i(x^*) = 0$ *et pour tout* j *dans* $\{1,\cdots,p\}$, $g_j(x^*) \leq 0$,

— *complémentarité : pour tout* j *dans* $\{1,\cdots,p\}$, $\mu_j\, g_j(x^*) = 0$,

— *positivité : pour tout* j *dans* $\{1,\cdots,p\}$, $\mu_j \geq 0$.

La Lagrangien de ce problème est

$$\mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, h_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j\, g_j(x)$$

La condition (3.7) s'écrit

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*,\lambda^*,\mu^*) = 0\ .$$

Pour aller plus loin. *(***) On peut montrer de même une condition nécessaire d'ordre 2 :* $\nabla^2\mathcal{L}$ *doit être semi-définie positive pour l'ensemble des directions* d *telles que*

— *pour tout* i *dans* $\{1,\cdots,m\}$, $\langle \nabla h_i(x), d\rangle = 0$

— *pour tout* j *dans* $\mathcal{I}(x)$, $\langle \nabla g_j(x), d\rangle \leq 0$

— *pour tout* j *dans* $\mathcal{I}(x)$ *tel que* $\mu_j > 0$, $\langle \nabla g_j, d\rangle = 0$

Corollaire 3.11 (Conditions de Slater)**.** *Considérons le problème* (3.4) *sous les contraintes* (3.6). *Supposons que pour tout* $i \in \{1,\cdots,m\}$, h_i *est affine, que pour tout* $j \in \{1,\cdots,p\}$, g_j *est convexe et* f *est convexe. Supposons que* x^* *vérifient les conditions de Slater de Proposition 3.9 alors les conditions KKT du Théorème 3.10 sont suffisantes pour que* x^* *soit une solution du problème* (3.4) *sous les contraintes* (3.6).

- C'est un problème convexe.