Bonne copie - CC du 20/03/07

Exo I (5 points)

0,5 ① E est le noyau de l'application linéaire $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y+z \\ x+y-z \\ x-2z \end{pmatrix}$ donc c'est un sev

0,5 ② F est l'espace vectoriel engendré donc c'est un sev

0,5 ③ $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1 ④ Base : $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc E est une droite vectorielle

0,5 ⑤ $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille génératrice

1 ⑥ Base : $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ donc F est une droite vectorielle

1 ⑦ $\left| \begin{array}{l} -1+1=0 \\ 2-1-1=0 \\ 2-2\cdot 1=0 \end{array} \right.$ donc $F \subset E$

d'où $F \cap E = E$

Exo II (5 points)

① • On a vu que E a pour base $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ donc $\dim E = 1$

on a $\dim F = 2$

2 donc $\dim E + \dim F = \dim \mathbb{R}^3$

• De plus $1+0 \neq 0$ et $0+1 \neq 0$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin E$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin E$ donc $E \cap F = \{0\}$

• Donc $E \oplus F = \mathbb{R}^3$

② $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(a-b-c)\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in E} + \frac{a+b-c}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in F} + \frac{-a+b+3c}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in F}$

donc

$$p\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{a-b-c}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3 $$= \begin{pmatrix} a-b-c \\ \frac{-a+b+c}{2} \\ \frac{a-b-c}{2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Donc la matrice de projection est $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{EXO III}}$ (7,5 points)

0,5 ① & ② f peut être identifiée à
0,5 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ qui est sa représentation matricielle dans la bases canoniques

③ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(f) \iff \begin{cases} y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

0,5

0,5 ④ $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

1 ⑤ Une base de $\operatorname{Im}(f)$ est $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

1 ⑥ Une éq cartésienne est $x + y - z = 0$

0,5 ⑦ $1 + 1 - 1 \neq 0$ donc il n'y a pas de solution

1 ⑧ $1 + 1 - 2 = 0$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im}(f)$.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une solution particulière donc l'ens des solutions est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \ker(f)$.

(9) Si $1 + a - b \neq 0$ il n'y a pas de solution

1 Si $1 + a - b = 0$ il y a des solutions. De plus $\dim \ker f = 3 - rg(f) = 3 - 1 = 2$ donc il y a une infinité de solutions.

1 (10) les solutions sont égales à $\ker(f)$. Une base de $\ker(f)$ est $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

EXO IV
(4 points)

(1) Soit P et P' dans H

$P + \lambda P' \in \mathbb{R}_n(X)$

1 $(P + \lambda P')(0) = P(0) + \lambda P'(0) = 0$

donc H est un sev

(2) Considérons la famille $F = \{X, X^2, \ldots, X^n\}$

F est une sous famille de $\{1, X, \ldots, X^n\}$

3 qui est une famille libre de $\mathbb{R}_n(X)$ donc F est une famille libre.

De plus tout $P \in H$ s'écrit

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X^i$$

donc F est une famille génératrice de H. Donc F est une base de H et $\dim H = n-1$.