WORKING PAPERS

N° TSE - 962

November 2018

“Apports naturels en eau dans les barrages-réservoirs et règle de Hotelling”

Claude Crampes et Michel Moreaux

Toulouse School of Economics

Apports naturels en eau dans les barrages-réservoirs et règle de Hotelling

Claude Crampes[1] et Michel Moreaux[2]

October 20, 2018

[1]Toulouse School of Economics, Université Toulouse Capitole
[2]Toulouse School of Economics, Université Toulouse Capitole

Abstract

L'article analyse la gestion annuelle des barrages hydroélectriques quand les apports naturels en eau suivent des cycles prévisibles. Nous montrons que dans ce cadre la règle de Hotelling s'applique par intermittence. En effet, dès lors qu'un stock est constitué sans que les contraintes de capacité soient liantes, il est possible de réaliser des arbitrages intertemporels semblables à ceux de la gestion d'une ressource non-renouvelable, donc la valeur de l'eau croît au taux de l'intérêt. En revanche, quand la ressource en eau est si rare qu'on ne peut compter que sur les apports instantanés ou, au contraire, trop abondante compte tenu des capacités du réservoir de sorte qu'il faut réaliser des lâchures improductives, la règle d'arbitrage de Hotelling ne s'applique plus. Nous expliquons aussi l'importance des contraintes de turbinage qui, quand elles sont liantes, donnent à l'électricité produite une valeur supérieure à celle de l'eau qui sert à la produire.

Codes JEL: Q25, Q42, C61, L94

Mots-clés: resource renouvelable, cycle de prélèvements, règle de Hotelling, hydroélectricité, barrages

1 Introduction

1.1 L'hydroélectricité dans le mix énergétique[1]

L'hydroélectricité présente plusieurs avantages qui en font un outil privilégié de l'équilibrage d'un système électrique. Son premier avantage est qu'une partie des apports en eau est soumise à un double stockage. En amont, un apport sous forme de neige en période de basse température est stocké à coût nul dans la nature, puis relâché progressivement au fur et à mesure que la température augmente. En aval, le système de stockage dans les barrages, est alimenté soit directement par les précipitations soit par la fonte des stocks de neige. Les barrages ont des coûts de construction élevés et des coûts d'entretien non négligeables mais peu dépendants des volumes d'eau qui y sont stockés. Le faible coût de stockage de l'énergie potentielle susceptible d'être livrée aux consommateurs d'électricité au gré de l'opérateur est l'un des avantages concurrentiels de la technologie hydroélectrique par rapport aux technologies solaire et éolienne dont l'input naturel est gratuit mais très variable et aux technologies brulant des fossiles dont l'input est contrôlable mais coûteux.

Un deuxième avantage est que l'eau stockée est une énergie immédiatement mobilisable et dont le débit peut être instantanément modulé sans avoir à subir des coûts de démarrage, de variation de régime ou d'arrêt. C'est donc une ressource beaucoup plus flexible que les énergies fossiles, flexibilité qui permet de compenser les manques de puissance dans le réseau lorsqu'on a pu mettre en réserve le flux des apports naturels en eau.[2]

Les barrages permettent de réguler le flux des apports naturels qui varie fortement au cours de l'année avec, le plus souvent, une saison d'apports abondants et une saison d'apports rares, voire nuls sous certaines latitudes. La mise en équation du calcul économique des barrages hydroélectriques demande un fractionnement du temps tenant compte de la réalité de ce cycle annuel. L'année hydrologique est la période de 12 mois qui débute après le mois habituel des plus basses eaux. La date qui en marque le début dépend de la situation météorologique des régions. En France, l'année hydrologique débute généralement au mois de septembre mais il peut y avoir des variations.[3] Ainsi en 2016 les précipitations ont été très importantes en mai et juin alors que le deuxième semestre a été relativement sec.

L'importance de la production hydroélectrique dans le mix énergétique varie fortement d'un pays à l'autre en fonction de leurs ressources naturelles et des équipements de stockage et turbinage installés. Elle couvre plus de la moitié de la demande en Norvège (95.9%), au Venezuela (63.7%), au Brésil (61.9%) et au Canada (56,8%)[4]. En France, la production d'origine hydraulique couvre en moyenne un peu plus de 10% de la consommation électrique. Sa répartition par type de centrale est donnée dans l'histogramme

[1]Pour une introduction aux aspects techniques des systèmes hydroélectriques, voir Wagner et Mathur (2011).

[2]Sa flexibilité joue aussi quand il s'agit d'absorber des excédents de production grâce à des stations de transfert d'énergie par pompage (STEP). Sur le stockage par STEP, voir Crampes et Moreaux (2010).

[3]Source: http://www.glossaire.eaufrance.fr/concept/ann%C3%A9e-hydrologique

[4]Source: https://www.iea.org/publications/freepublications/publication/KeyWorld2017.pdf

de la Figure 1.

Figure 1 ici

1.2 Ressource renouvelable et non renouvelable

L'eau présente des caractéristiques physiques qui, sur le plan de l'analyse économique, la rattachent à la fois à la catégorie des ressources renouvelables et à celle des ressources non renouvelables. Les apports naturels en eau (pluie, ruissellement, fonte des neiges et des glaces) ne sont qu'imparfaitement prévisibles et leur somme cumulée au cours du temps est infinie, comme pour l'énergie solaire et l'énergie éolienne. Les règles d'investissement et de gestion de l'eau en tant que flux dans les centrales au fil de l'eau sont donc celles qui régissent ces énergies non stockables, cycliques et aléatoires. Mais contrairement au vent et au rayonnement solaire, l'eau peut être stockée, en quantité finie. Quand elle est stockée, l'optimisation de son usage emprunte donc aussi aux principes économiques de la gestion des ressources non renouvelables comme le charbon, le pétrole et le gaz naturel.

Pour conduire l'analyse économique de l'eau qui alimente les barrages-réservoirs, nous considérons qu'il s'agit d'une succession de stocks de ressources non-renouvelables à utiliser dans un délai imparti car, contrairement aux énergies fossiles, les apports en eau disparaissent par évaporation, infiltration ou ruissellement s'ils ne sont pas exploités instantanément ou mis en stock pour une exploitation ultérieure. La disponibilité des apports en eau dans les barrages-réservoirs est donc contrainte de deux façons. Sur le plan temporel, l'accès à la ressource est contraint par le cycle de ses apports.[5] Le stock naturel infini n'est disponible que de façon fractionnée, au rythme des "livraisons" naturelles qui suivent généralement des cycles annuels. En second lieu, il y a une contrainte de volume. Contrairement aux énergies fossiles, les apports en eau en tant que sources d'énergie disparaissent s'ils ne sont pas immédiatement exploités dans des centrales au fil de l'eau,[6] ou bien stockés dans des réservoirs pour une exploitation ultérieure.[7] Donc la partie contrôlable de ces apports est limitée par la capacité des réservoirs et des équipements de turbinage. L'essentiel des apports naturels échappe à tout contrôle industriel dès lors qu'ils tombent hors du système d'alimentation des barrages réservoirs.

[5]Nous ne traitons pas dans cet article des STEP pour lesquelles l'alimentation en eau de la retenue supérieure est partiellement sous contrôle.

[6]L'hydroélectricité au fil de l'eau, l'énergie éolienne et l'énergie solaire sont parfois appelées "énergies fatales". Les centrales au fil de l'eau ont une capacité faible, voire nulle, de moduler leur production. Elle varie donc en fonction des événements climatiques.

[7]Les centrales de lac et les centrales d'éclusée disposent d'une retenue qui permet de turbiner aux périodes de forte demande l'eau préalablement stockée. Les premières ont une durée de remplissage de leur réservoir supérieure à 400 heures et les secondes des durées inférieures. Les centrales d'éclusée modulent leur production au niveau journalier, voire hebdomadaire. Les centrales de lac assurent une modulation saisonnière de leur production.

source: http://www.france-hydro-electricite.fr/lenergie-hydraulique/principes

Dans la section 2, nous déterminons les caractéristiques de la gestion optimale d'un barrage réservoir alimentant une centrale électrique, connaissant la valeur d'usage de l'électricité et le calendrier des apports naturels en eau. La section 3 est consacrée à l'analyse de la règle de Hotelling selon que la politique optimale se heurte ou non à la contrainte de disponibilité de la ressource et à la contrainte de turbinage lors de la transformation de l'énergie gravitaire de l'eau en énergie électrique. Nous appliquons ensuite ces principes généraux à deux cas particuliers. Le premier (section 4) est celui d'une alternance de saisons humide et sèche alors que l'électricité est valorisée de la même façon tout au long du cycle annuel. Dans le second (section 5), au contraire, les apports en eau sont réguliers tout au long de l'année mais la demande du second semestre est plus élevée que celle du premier. Dans les deux cas on observe une discontinuité dans la trajectoire du prix de l'eau au passage de la date de changement de régime. La section 7 conclut.

2 Politique optimale de gestion de l'eau

Les apports naturels suivent généralement des cycles saisonniers, mais ces cycles peuvent être fortement perturbés dans le court terme par des aléas météorologiques. Notre analyse ne porte que sur la composante régulière prévisible des apports.[8] Après avoir construit un modèle cyclique stationnaire (section 2.1), nous déterminons la politique optimale de gestion des apports naturels en eau (section 2.2).

2.1 Caractéristiques structurelles

Notre modèle cyclique stationnaire est construit à partir de quatre données structurelles: *i*) le flux d'apports naturels instantanés, *ii*) les équipements de stockage de l'eau et de sa transformation en énergie électrique, *iii*) la fonction de surplus net qu'induit la consommation de l'hydro-électricité produite et *iv*) le taux d'intérêt.

2.1.1 Flux d'entrée et de sortie des barrages et capacité de stockage

Nous notons t ou θ le temps calendaire et Δ la durée d'un cycle, une année.

Soit $r(t)$ le volume d'eau qui entre dans les barrages à l'instant t, issu des précipitations, de la fonte des neiges et des glaciers en amont des retenues. Par cyclicité stationnaire, il faut comprendre que:

$$r(t+\Delta) = r(t), \quad t \geq 0.$$

Il en résulte que la somme des apports sur tout intervalle de temps $[t, t+\Delta)$ ne dépend pas de la date t de début de l'intervalle. Notons R la somme de ces apports:

$$R = \int_t^{t+\Delta} r(\theta) d\theta, \quad t \geq 0 \; .$$

[8]Notre modélisation est du type de celle initiée par Koopmans (1957).

La somme R peut être vue comme un stock à utiliser au cours de l'intervalle $[t, t+\Delta)$ et de ce fait comme une ressource non-renouvelable éphémère à consommer au plus tard à la date $t+\Delta$ à partir de la date t.

Une partie du flux d'entrée $r(t)$ ainsi qu'une partie du stock déjà présent dans les retenues est prélevée pour produire l'électricité que nous notons $q(t)$. Pour que le bilan entrées-sorties soit complet il faut ajouter aux sorties le flux $l(t)$ relâché vers l'aval sans être turbiné. La variation du stock d'eau en réserve a donc pour expression $r(t) - l(t) - q(t)$.

Soit $S(t)$ le stock d'eau en réservoir à l'instant t. Ce stock ne peut être supérieur à la capacité de retenue des barrages, notée $\overline{S}$, ni évidemment devenir négatif, d'où la dynamique et les contraintes suivantes:[9]

$$\dot{S}(t) = r(t) - l(t) - q(t), \overline{S} - S(t) \geq 0 \text{ et } S(t) \geq 0, \tag{1}$$

$$l(t) \geq 0 \text{ et } q(t) \geq 0. \tag{2}$$

2.1.2 Production d'électricité et coûts[10]

Pour aller à l'essentiel, nous supposerons que la production d'électricité est proportionnelle aux prélèvements pour turbinage.[11] En choisissant convenablement les unités de mesure et en négligeant les pertes inhérentes à toute transformation d'énergie, nous pouvons considérer que la production est égale à $q(t)$.[12] Cette production instantanée est limitée par la capacité des installations: capacité des conduits d'alimentation des turbines, capacité des turbines, etc. Notons $\overline{q}$ cette capacité. Aux contraintes (2) il faut donc ajouter la contrainte:

$$\overline{q} - q(t) \geq 0 \tag{3}$$

Pour tout intervalle de temps de durée Δ, la production d'électricité est donc au plus égale à $\overline{Q} = \Delta \times \overline{q}$. Pour tous R et $\overline{Q}$, la cumulée des retraits non turbinés est au moins égale à $\max\{0, R - \overline{Q}\}$:

$$\int_t^{t+\Delta} l(\theta) d\theta \geq \max\left\{0, R - \overline{Q}\right\}, \quad t \geq 0 \ .$$

La plupart des coûts sont des coûts d'entretien indépendants de l'utilisation des équipements. Pour simplifier, nous les supposons donnés et constants.

[9] Le plus souvent il est nécessaire aussi de ne pas laisser le stock descendre en dessous d'un certain niveau $\underline{S} > 0$. Sans perte de généralité nous posons $\underline{S} = 0$.

[10] Pour un aperçu de la complexité d'une modélisation détaillée de la gestion technique des installations, voir par exemple Munoz-Hernandez *et al.* (2013).

[11] Cela revient à considérer que la hauteur de la colonne d'eau dans le barrage n'a pas d'incidence sur la production d'électricité. C'est une approximation admissible pour les barrages de haute montagne dont l'eau est turbinée dans des installations situées à des altitudes beaucoup plus faibles.

[12] Il faut alors mesurer tous les flux et les stocks en unités d'énergie. Pour plus de détails sur la transformation eau$\longrightarrow$ électricité, voir Førsund (2007), p.13-18.

2.1.3 Surplus, intérêt et bien-être

Toute la production est livrée aux usagers pour consommation immédiate. Soit $u(q(t), t)$ le surplus net que les usagers retirent de la consommation $q(t)$ à l'instant t. C'est l'accroissement de surplus net permis par l'addition de $q(t)$ à la consommation des autres sources, considérées comme données.[13]

Les hypothèses de cyclicité et stationnarité signifient que la fonction $u(.,.)$ vérifie la condition suivante:

$$u(q, t + \Delta) = u(q, t), q \geq 0 \text{ et } t \geq 0.$$

Nous supposons que $u(q, t)$ en tant que fonction de q est continuement différentiable et concave sur un intervalle $(0, q_{\max}(t))$, croissante sur l'intervalle $(0, \widetilde{q}(t))$, $0 < \widetilde{q}(t) < q_{\max}(t)$, et décroissante sur l'intervalle $(\widetilde{q}(t), q_{\max}(t))$. L'idée est qu'au-delà de $\widetilde{q}(t)$ les usagers doiivent se débarrasser de $q(t) - \widetilde{q}(t)$ mais qu'ils ne peuvent pas se débarrasser de plus de $q_{\max}(t) - \widetilde{q}(t)$.

Puisque $\widetilde{q}(t + \Delta) = \widetilde{q}(t)$, $t \geq 0$, la production totale d'électricité qui permettrait de maximiser le surplus à chaque instant au cours d'un cycle à condition d'être disponible en temps voulu, notée $\widetilde{Q}$, est indépendante de la date de début du cycle:

$$\widetilde{Q} = \int_t^{t+\Delta} \widetilde{q}(\theta) d\theta, \quad t \geq 0.$$

Soient $u'(q, t)$ et $u''(q, t)$ les dérivées, première et seconde respectivement, de $u(q, t)$ par rapport à q :

$$u'(q, t + \Delta) = u'(q, t) \text{ et } u''(q, t + \Delta) = u''(q, t), \quad q_{\max}(t) > q > 0 \text{ et } t \geq 0$$

$$u'(q, t) \begin{cases} > 0, & 0 < q < \widetilde{q}(t) \\ = 0, & q = \widetilde{q}(t) \\ < 0, & \widetilde{q}(t) < q < q_{\max}(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad u''(q, t) < 0, 0 < q < q_{\max}(t), \quad t \geq 0.$$

Nous suposons que les surplus marginaux sont uniformément bornés en $q = 0$:

$$\exists u'_{\sup} > 0 : 0 < u'_{\sup} < \infty \text{ et } u'\left(0^+, t\right) \leq u'_{\sup}, \quad t \geq 0.$$

On pose de plus que la capacité d'absorption d'électricité au-delà de ce qui maximise le surplus est limitée:

$$\lim_{q \uparrow q_{\max}(t)} u'(q, t) = -\infty, \quad t \geq 0,$$

[13]En fait les productions optimales des diverses sources doivent être déterminées conjointement. Il faut donc supposer que les productions des autres sources, que nous considérons comme données, sont optimales.

et uniformément bornée:

$$\exists q_{\text{sup}} : 0 < q_{\text{sup}} < \infty \text{ et } q_{\max}(t) \leq q_{\text{sup}}, \quad t \geq 0.$$

Notons $q^d(p,t)$ la fonction de demande de l'instant t, l'inverse de la fonction $u'(q,t)$ par rapport à q:

$$q^d(p,t+\Delta) = q^d(p,t), u'\left(0^+,t\right) > p > -\infty \text{ et } t \geq 0$$

$$q^d(p,t) \begin{cases} > 0, & -\infty < p < u'(0^+,t) \\ = 0, & u'(0^+,t) \leq p \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\partial q^d(p,t)}{\partial p} \begin{cases} < 0, & -\infty < p < u'(0^+,t) \\ = 0, & u'(0^+,t) \leq p \end{cases}, \quad t \geq 0.$$

$$\lim_{p \downarrow -\infty} q^d(p,t) = q_{\max}(t), q^d(0,t) = \widetilde{q}(t) \text{ et } \lim_{p \uparrow u'(0^+,t)} q^d(p,t) = 0, \ t \geq 0.$$

Pour simplifier, nous supposons que le flux de sortie $l(t) + q(t)$ n'est pas valorisé en aval (par exemple par l'agriculture et le tourisme) et qu'il n'est soumis à aucune contrainte de régularisation d'étiage.[14]

Enfin, le taux d'intérêt instantané, noté i, est posé constant et la fonction de bien-être est la somme des surplus actualisés nets de coûts.

2.2 Politique optimale

Après avoir déterminé les caractéristiques générales de la trajectoire de prélèvement, nous discutons des cas particuliers dans lesquels certaines contraintes sont liantes ou non.

2.2.1 Caractéristiques de la politique optimale

En l'absence de coûts liés à la modulation des flux turbinés, la gestion optimale des apports naturels $r(t)$ est celle qui maximise la somme des surplus actualisés. Le problème à résoudre est donc le problème (P.1) suivant:

(P.1)

$$\max_{\{l(t),q(t)\}_{t=0}^{\infty}} \int_0^{\infty} u(q(t),t)e^{-it}dt \tag{4}$$

sous les contraintes (1)-(3), et la condition initiale $S(0) = S_0, 0 \leq S_0 \leq \overline{S}$ où S_0 et $\overline{S}$ sont donnés.

Soit $\lambda(t)$ la variable adjointe associée à l'équation d'évolution du stock, $\overline{\nu}(t)$ et $\underline{\nu}(t)$ les multiplicateurs associés aux contraintes de stock maximum et minimum respectivement,

[14] Par exemple garantir un débit aval au moins égal à un certain minimum $\underline{s}(t) : l(t) + q(t) \geq \underline{s}(t)$, ou au contraire éviter les débits excessifs: $l(t) + q(t) \leq \overline{s}(t)$ où $\overline{s}(t)$ est le débit maximum à ne pas dépasser. Mais les contraintes peuvent aussi porter sur l'accélération des débits pour ne pas perturber les éco-systèmes de l'aval:

$$\dot{s}_{\inf}(t) \leq \dot{l}(t) + \dot{q}(t) \leq \dot{s}_{\sup}(t).$$

Voir Edwards (2003) et Niu et Insley (2013), pour une étude des conséquences de ce type de contrainte.

$\overline{\gamma}_q(t)$ et $\underline{\gamma}_q(t)$ les multiplicateurs associés aux contraintes de production maximale et minimale, et $\gamma_l(t)$ le multiplicateur associé à la contrainte de non-négativité des lâchers improductifs $l(t)$.

Le hamiltonien H et le lagrangien L du problème (P.1), tous deux en valeur courante, ont pour expression:

$H = u(q(t), t) + \lambda(t)[r(t) - l(t) - q(t)]$

$L = H + \overline{\nu}(t)\left(\overline{S} - S(t)\right) + \underline{\nu}(t)S(t) + \overline{\gamma}_q(t)(\overline{q} - q(t)) + \underline{\gamma}_q(t)q(t) + \gamma_l(t)l(t)$

Les conditions de premier ordre sont:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Rightarrow u'(q(t), t) = \lambda(t) + \overline{\gamma}_q(t) - \underline{\gamma}_q(t) \tag{5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = 0 \Rightarrow \lambda(t) = \gamma_l(t) \tag{6}$$

où les multiplicateurs $\overline{\gamma}_q, \underline{\gamma}_q$ et γ_l vérifient les conditions habituelles d'écarts complémentaires.

La dynamique de la variable adjointe $\lambda(t)$ doit vérifier la condition suivante à toute date t à laquelle elle est différentiable:

$$\dot{\lambda}(t) = i\lambda(t) - \frac{\partial L}{\partial S} \Rightarrow \dot{\lambda}(t) = i\lambda(t) + \overline{\nu}(t) - \underline{\nu}(t) \tag{7}$$

où

$$\overline{\nu}(t) \geq 0, \overline{S} - S(t) \geq 0 \;\text{ et } \overline{\nu}(t)\left(\overline{S} - S(t)\right) = 0. \tag{8}$$

$$\underline{\nu}(t) \geq 0, S(t) \geq 0 \text{ et } \underline{\nu}(t)S(t) = 0 \tag{9}$$

2.2.2 Valeur de l'eau stockée et prix de l'électricité

Dans ce système, les apports naturels en eau sont des apports d'électricité potentielle et le stock d'eau doit être vu comme un stock d'électricité gardée en réserve. A chaque instant, apports et stock peuvent être transformés en électricité à consommer immédiatement, ou relâchés sans être turbinés ou, s'agissant des apports, ajoutés aux réserves déjà constituées.

Lorsque la consommation est positive et non contrainte par la capacité de turbinage $\overline{q}$, alors $\underline{\gamma}_q(t) = \overline{\gamma}_q(t) = 0$ par les conditions d'écarts complémentaires et donc $u^{'}(q(t), t) = \lambda(t)$ par (5). En d'autres termes, $q\left(t\right) = q^d\left(\lambda(t), t\right)$: le prix de l'électricité d'origine hydraulique produite doit être égal à la valeur marginale de l'énergie hydraulique en stock, puisque le coût de transformation de l'électricité potentielle en électricité prête à consommer est nul. Ceci n'est possible que si, soit $r\left(t\right) \geq q^d\left(\lambda(t), t\right)$ lorsque $S\left(t\right) = 0$, auquel cas $r\left(t\right) - q^d\left(\lambda(t), t\right)$ doit être mis en réserve, soit $S\left(t\right) > 0$ lorsque $r\left(t\right) < q^d\left(\lambda(t), t\right)$ auquel cas $q^d\left(\lambda(t), t\right) - r\left(t\right)$ doit être prélevé sur le stock.

Lorsque, au contraire, la consommation est limitée par la capacité de turbinage, il faut ajouter la rente de rareté temporaire de la capacité de production $\overline{q}$ à la valeur marginale de l'eau stockée pour obtenir le prix de l'électricité produite: $u'(q(t), t) =$

$\lambda(t)+\overline{\gamma}_q(t)$. On remarquera que, si $r(t)>\overline{q}$ et $S(t)=\overline{S}$, la saturation simultanée des deux contraintes de capacité de turbinage et de capacité de stockage oblige à procéder à des lâchures sans turbinage. Nous reviendrons sur ce point au paragraphe suivant. Si, au contraire, $r(t)<\overline{q}$ la contrainte de turbinage ne peut bloquer la consommation souhaitée que s'il existe des réserves sur lesquelles il est permis de prélever $\overline{q}-r(t)$. Enfin, si la demande de la date t est faible, i.e. si $u'(0^+,t)<\lambda(t)$, mieux vaut mettre les apports en réserve que de les transformer immédiatement en électricité et mieux vaut conserver les réserves déjà accumulées, s'il y en a, que d'y puiser pour produire: $q(t)=0$ puisque $\underline{\gamma}_q(t)>0$. On notera que la mise en réserve des apports suppose que les réservoirs ne sont pas saturés, sinon il faut procéder à des lâchures sans turbinage.

La condition (6) stipule qu'il ne faut procéder à des lâchures d'eau non turbinées que si l'eau n'a aucune valeur: $l(t)>0$ implique que $\gamma_l(t)=0$ par la condition d'écarts complémentaires, et alors $\lambda(t)=0$. Procéder à des lâchures sans turbinage c'est se démunir d'une électricité potentielle sans avoir à subir de coût de mise au rebut. Pour les apports, c'est renoncer à leur conversion en électricité à consommer de suite ou à leur mise en réserve pour une consommation differée. Un tel renoncement n'est justifié au cours d'un intervalle de temps (t_1,t_2) dans les deux situations évoquées plus haut dans lesquelles la capacité de stockage est saturée: $S(t)=\overline{S}, t\in(t_1,t_2)$. Dans la première, la production d'électricité sature la capacité de turbinage sans saturer les besoins $q(t)=\overline{q}$ d'où $u'(\overline{q},t)>0$, et les apports naturels sont supérieurs à $\overline{q}$ de sorte que l'excédent doit être relâché : $l(t)=r(t)-\overline{q}>0$. Dans la seconde, la consommation sature les besoins mais pas la capacité de turbinage, $q(t)=\widetilde{q}(t)<\overline{q}$ et les apports sont supérieurs à la consommation de saturation de sorte que l'excédent doit être relâché sans être turbiné pour que les usagers n'aient pas à subir le coût d'une production excessive: $l(t)=r(t)-\widetilde{q}(t)$.[15] Il reste à déterminer si de telles situations sont susceptibles de survenir le long d'un sentier optimal. Pourquoi avoir constitué et pourquoi conserver un stock $S(t)=\overline{S}$ dont la valeur marginale est nulle? L'analyse de la sous-section 4.3.2 montre qu'il peut être optimal de procéder à de tels lâchures.

Lorsque le stock $S(t)$ est positif et non contraint par la capacité de rétention des réservoirs, alors $\overline{\nu}(t)=\underline{\nu}(t)=0$ et (7) s'écrit plus simplement:

$$\dot{\lambda}(t)=i\lambda(t). \tag{10}$$

La valeur marginale du stock doit croître au taux de l'intérêt. C'est la règle de Hotelling de gestion d'une mine lorsque les coûts marginaux d'extraction sont constants, ce qui est le cas ici puisque le coût marginal de transformation de l'eau stockée en électricité est nul. Le stock d'eau peut donc être vu comme une mine au cours de ses phases de décroissance. Mais c'est une mine qu'il n'est possible d'exploiter que si on

[15] Pouvoir procéder à des lachûres sans turbinage peut être vu comme un cas de libre disposition (free disposal), possibilité souvent supposée dans les versions les plus courantes de la théorie de l'équilibre général (cf. Debreu (1959)). Dans notre modèle, l'option est ouverte au producteur d'hydroélectricité pour le facteur eau. Mais si on considère l'ensemble du système, elle n'est pas ouverte pour l'électricité produite puisqu'une production de celle-ci au delà de $\widetilde{q}(t)$ entraine une perte pour les usagers, perte qui est compensée par un prix négatif sur la plupart des marchés de gros (voir par exemple EPEXSPOT).

l'a constituée et la règle de Hotelling s'applique non seulement au cours des phases d'extraction mais aussi au cours de ses phases de constitution.

Si les réservoirs sont bien dimensionnés, plus précisément s'ils ne sont pas surdimensionnés, ils devraient être pleins au cours de certaines périodes et devraient être vides à d'autres périodes. Au cours de ces périodes la gestion optimale s'écarte des prescriptions de Hotelling puisqu'alors ou bien $\overline{\nu}(t) > 0$ ou bien $\underline{\nu}(t) > 0$ dans la condition (7) . La règle de Hotelling ne devrait donc s'appliquer que par intermittence.[16]

3 Règle de Hotelling cyclique

Au cours de tout intervalle de temps de durée Δ, la même production potentielle d'électricité $\min\{R, \overline{Q}\}$ est disponible. Une condition nécessaire pour qu'il soit optimal de consommer la totalité de ce potentiel est que cette consommation soit non seulement techniquement possible mais de plus qu'elle ne soit pas supérieure à la somme des consommations de saturation $\widetilde{Q}$. Dans ce qui suit, on suppose aussi que ce n'est pas la capacité annuelle de turbinage $\overline{Q}$ qui ferait obstacle à une politique de saturation permanente de la consommation mais le volume disponible de la ressource R : $R < \min\left\{\widetilde{Q}, \overline{Q}\right\}$. Cette inégalité n'exclut cependant ni une saturation temporaire de la consommation, ni une saturation temporaire de la capacité de turbinage.

3.1 Conditions de synchronisme

Examinons à quelles conditions il existerait une date t^*, début d'un intervalle de temps de durée Δ, pour laquelle il serait justifié de considérer que R est la taille d'un stock d'eau exploitable jusqu'à la date $t^* + \Delta$, dont le plan d'exploitation ne serait contraint que par les conditions de non-négativité de la production d'électricité et des réserves non encore consommées, et n'impliquerait aucune lâchure. Le plan serait la solution du problème (P.2) suivant:

(P.2)

$$\max_{\{q(t)\}_{t^*}^{t^*+\Delta}} \int_{t^*}^{t^*+\Delta} u(q(t), t) e^{-i(t-t^*)} dt \tag{11}$$

sous les contraintes

$$\dot{R}(t) = -q(t), R(t^*) = R \text{ et } R(t) \geq 0 \tag{12}$$

$$q(t) \geq 0 \tag{13}$$

Puisque les coûts variables de prélèvement sont nuls, la consommation solution de (P.2) doit satisfaire la condition (14) suivante

$$u'(q(t), t) = \lambda(t^*) e^{i(t-t^*)} - \underline{\gamma}_q(t), \ t \in [t^*, t^* + \Delta] \tag{14}$$

[16]Pour une revue des algorithmes permettant de calculer la politique optimale, voir par exemple U.S.D.I. (2012, 2013).

où $\lambda(t)$ est la valeur marginale de $R(t)$ et $\underline{\gamma}_q(t)$ est le multiplicateur associé à la contrainte de non-négativité des prélèvements. Notons $q^*(t)$ la consommation optimale en t:

$$q^*(t) = q^d(\lambda(t^*)e^{i(t-t^*)}, t),\ t \in [t^*, t^* + \Delta]\,. \tag{15}$$

Puisque $R < \widetilde{Q}$ la totalité du stock initialement disponible doit être consommée. La valeur optimale de $\lambda(t^*)$ est alors déterminée par la condition d'épuisement de ce stock, c'est à dire comme solution de l'équation:

$$\int_{t^*}^{t^*+\Delta} q^d(\lambda(t^*)e^{i(t-t^*)}, t)dt = R. \tag{16}$$

Mais, de fait, R n'est pas encore totalement disponible dès la date t^*. Pour que la solution (15) du programme (P.2) puisse être mise en œuvre il faut que le flux d'apports $r(t)$ et le flux de consommation $q^*(t)$ soient suffisamment bien synchronisés grâce au stock d'eau mis éventuellement en réserve dans les barrages.[17] Plus précisément, il faut que le flux $r(t)$:

- soit suffisamment soutenu pour que le stock d'eau qu'implique la différence cumulée entre $r(t)$ et $q^*(t)$ ne devienne pas négative:

$$S(t) \equiv \int_{t^*}^{t} [r(\theta) - q^*(\theta)]\, d\theta \geq 0,\ t \in [t^*, t^* + \Delta), \tag{17}$$

- ne soit pas trop longtemps supérieur à $q^*(t)$ pour que le stock d'eau ne dépasse jamais la capacité des retenues:

$$S(t) \equiv \int_{t^*}^{t} [r(\theta) - q^*(\theta)]\, d\theta \leq \overline{S},\ t \in [t^*, t^* + \Delta). \tag{18}$$

Si ces deux conditions sont satisfaites il est possible de mettre en œuvre une solution cyclique au cours des intervalles de temps successifs de durée Δ depuis la date $t_0^* = t^* - n^*\Delta$ où $n^* = \max\{0, 1, 2, ... : t^* - n\Delta \geq 0\}$, partant d'un stock d'eau nul à cette date et qui sera nul à toutes les dates $t_0^* + n\Delta$, $n = 0, 1, 2, ...$ Il en résulte que, à partir de t_0^* :

- si le taux d'intérêt est nul, le prix de l'eau, ou sa valeur marginale, est constant au cours du temps et suit trivialement la règle de Hotelling en permanence;
- si le taux de l'intérêt est positif, la valeur marginale de l'eau évolue de façon cyclique, $\lambda(t + \Delta) = \lambda(t)$, $t \geq t_0^*$, et suit la règle de Hotelling au cours de chacun des intervalles $[t^* + n\Delta, t^* + (n+1)\,\Delta), n = 0, 1, 2, ...,$ mais est discontinue à chaque date $t_0^* + n\Delta, n = 1, 2, ...$ de fin d'intervalle, la valeur marginale (ou le prix $p(t) = \lambda(t)$) chutant alors du niveau $p(t_0^*)e^{i\Delta} = u'(q^*(t_0^*), t_0^*)e^{i\Delta}$ au niveau $p(t_0^*)$. Un tel sentier est illustré à la Figure 2 où le prix $p(t_0^*)$ est noté plus simplement p_0^*.

[17] Førsund (2007, p. 21) raisonne sur un modèle discret dans lequel l'année hydraulique est découpée en T périodes, agencées de telle façon que la totalité des apports est concentrée à la première de ces périodes.

Par ailleurs rien ne garantit que le sentier $q^*(t)$ respecte la contrainte de turbinage $\overline{q} - q^*(t) \geq 0$, problème que nous aborderons à la sous-section 3.3.

3.2 Arbitrage et contraintes de disponibilité

Montrons que si la solution de (P.2) respecte les conditions (17) et (18) et ne sature jamais la contrainte de turbinage, alors les possibilités d'arbitrage sont épuisées.

Lorsque le taux d'intérêt est nul, la valeur marginale de l'eau est constante ce qui ferme la porte à tout gain d'arbitrage. Lorsqu'au contraire le taux de l'intérêt est positif et que le sentier de prix présente les discontinuités illustrées à la Figure 2, il est nécessaire de s'assurer qu'aucun arbitrage fructueux n'est possible.

Il est clair par exemple que l'eau consommée en $t_0^* + \Delta + \delta$, $\delta > 0$ et suffisamment petit, serait mieux valorisée en $t_0^* + \Delta - \delta$ (voir Figure 2). Mais l'eau qui sera consommée en $t_0^* + \Delta + \delta$ n'est pas encore disponible en $t_0^* + \Delta - \delta$. Elle ne le sera au plus tôt qu'à partir de $t_0^* + \Delta$. L'arbitrage est donc physiquement impossible.

Figure 2 ici

A compter de la date t_0^* tout se passe comme si le gestionnaire disposait d'une quantité infinie d'une ressource non renouvelable mais dont la livraison est fractionnée, la seule quantité R en étant livrée à chacune des dates $t_0^*, t_0^* + n\Delta, n = 1, 2, ...$ A ces livraisons fractionnées correspond une règle de Hotelling elle aussi fractionnée. Chacun des intervalles successifs $[t_0^* + (n-1)\,\Delta, t_0^* + n\Delta)$ constitue une sorte d'isolat car s'il n'est pas physiquement possible de disposer avant la date $t^* + n\Delta$ de ce qui sera consommé à la date $t^* + n\Delta + \delta$, il n'est pas non plus judicieux de transférer la consommation de la date $t_0^* + n\Delta - \delta_1$ de l'intervalle $[t_0^* + (n-1)\,\Delta, t_0^* + n\Delta)$ à une date $t_0^* + n\Delta + \delta_2$ de l'intervalle suivant quand bien même c'est toujours techniquement possible.[18] Ainsi qu'on peut le voir sur la Figure 2 pour $n = 2$, un tel transfert ne serait rentable que si en $t^* + 2\Delta + \delta_2$ le prix de l'eau était supérieur à $p_0^* e^{i(\Delta+\delta_2)}$, or il n'est égal qu'à $p_0^* e^{i\delta_2}$.

En conclusion, si les conditions (17) et (18) sont satisfaites, le sentier de prix, constant si $i = 0$ et cyclique si $i > 0$, correspondant à la solution du programme (P.2), épuise les possibilités d'arbitrage. Il est facile de vérifier qu'alors les conditions d'optimalité (5) - (9) sont satisfaites avec $l(t) = 0, t \geq t_0^*$.

Insistons sur le fait que pour mettre en œuvre la politique à laquelle cette analyse conduit, il est nécessaire de déterminer la date t^* (ou t_0^*) prise comme donnée dans la formulation du problème (P.2). A priori cette date ne peut résulter du seul examen du flux d'apport. L'aspect demande est aussi important. La variation de la demande, lorsque celle-ci est différentiable par rapport au temps sur un intervalle $(t_1, t_2) \subseteq [t_0^* +$

[18] Plus précisément, pour tout $n \geq 1$, il existe $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$ tels que: $q^*\left(t_0^* + n\Delta - \delta_1\right) > 0$ et $S(t) < \overline{S}$, $t \in [t_0^* + n\Delta - \delta_1, t_0^* + n\Delta + \delta_2)$ de sorte qu'il est possible de transférer une partie de la consommation de la date $t_0^* + n\Delta - \delta_1$ à la date $t_0^* + n\Delta + \delta_2$ sans heurter la contrainte de capacité de stockage.

$n\Delta, t_0^* + (n+1)\,\Delta)$, a pour expression

$$\dot{q}^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } q^*(t) \text{ est bloqué à } \overline{q} \text{ ou } 0 \\ \frac{ip_0^* e^{i(t-t_0^*-n\Delta)} - \partial u'(q^*(t),t)/\partial t}{u''(q^*(t),t)} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{19}$$

Le signe de $\dot{q}^*(t)$ dépend donc de l'évolution temporelle de l'utilité marginale $\partial u'(q^*(t), t)/\partial t$. L'étude de la détermination de t^* sort du champ de cet article.

3.3 Arbitrage et contraintes de turbinage

La saturation éventuelle de la capacité de turbinage n'intervient pas directement dans la détermination de la dynamique de λ puisque le multiplicateur $\overline{\gamma}_q(t)$ ne figure pas dans l'équation (7) qui définit cette dynamique. Seuls les multiplicateurs $\overline{\nu}(t)$ et $\underline{\nu}(t)$ correspondant aux contraintes sur le montant du stock d'eau en réservoir infléchissent la trajectoire. Cependant l'éventuelle saturation de la contrainte de turbinage peut être aisément prise en compte dans la détermination de p_0^*, plus précisément de λ_0^*, la valeur de $\lambda(t^*)$ solution de l'équation (16). Si on ajoute la contrainte de turbinage au programme (P.2), la condition de premier ordre n'est plus (14) mais une condition formellement identique à (5). Pour tout λ_0 définissons la consommation $q(t)$ comme suit:

$$q(t) = \min\left\{\overline{q}, q^d(\lambda_0 e^{i(t-t^*)}, t)\right\}.$$

La valeur optimale de λ_0, notée λ_0^*, est alors déterminée par la condition suivante, analogue à la condition (16):

$$\int_{t^*}^{t^*+\Delta} \min\left\{\overline{q}, q^d(\lambda_0 e^{i(t-t^*)}, t)\right\} dt = R.$$

Soit $q^*(t) = \min\left\{\overline{q}, q^d(\lambda_0 e^{i(t-t^*)}, t)\right\}$ ou, de façon équivalente,

$$q^*(t) = q^d(\lambda_0^* e^{i(t-t^*)}, t) + \overline{\gamma}_q^*(t)$$

où $\overline{\gamma}_q^*(t) = u'(\overline{q}, t) - \lambda_0^* e^{i(t-t^*)}$ si $q^d(\lambda_0^* e^{i(t-t^*)}, t) > \overline{q}$ et $\overline{\gamma}_q^*(t) = 0$ sinon. Les conditions (17) et (18) de mise en oeuvre de cette solution restent formellement identiques à condition que $q^*(t)$ soit défini comme on vient de l'indiquer. Cependant dans ce qui suit, pour éviter toute confusion, nous conviendrons d'appeler "solution du programme (P.2)" le sentier solution du problème $(11) - (13)$ dans lequel la contrainte de turbinage est négligée.

Sous l'hypothèse $R < \min\left\{\widetilde{Q}, \overline{Q}\right\}$, si la contrainte de turbinage est active ce ne peut être que sur une partie du cycle. Lors des phases du cycle au cours desquelles la contrainte de turbinage est effective mais pas la contrainte de capacité de stockage, il faut distinguer le coût marginal de la contrainte de turbinage de la valeur marginale de l'eau qui croît au taux de l'intérêt, la somme des deux $\overline{\gamma}_q^*(t) + \lambda_0^* e^{i(t-t^*)}$ constituant le prix ou coût marginal complet de l'énergie.

Lorsque la contrainte de turbinage ne permet de transformer en électricité qu'une partie des apports, si la partie non transformée est mise en stock il peut advenir que cette politique bute sur la contrainte de capacité des réservoirs. Les deux contraintes sont alors simultanément actives. La façon dont une contrainte de turbinage plus sévère induit l'activation de la contrainte de stockage est illustrée à la sous-section 4.3.

3.4 Arbitrage et saturation de la consommation

Sous l'hypothèse $R < \min\left\{\widetilde{Q}, \overline{Q}\right\}$, si les contraintes (17) et (18) sur les niveaux minimaux et maximaux du stock d'eau et la contrainte de turbinage sont inactives, alors la solution du problème (P.2) est telle qu'à chaque instant $t \in [t^*, t^* + \Delta]$ la consommation optimale $q^*(t)$ est inférieure à la consommation de saturation au même instant, $\widetilde{q}(t)$. Il n'y a donc pas lieu de s'inquiéter du problème des lâchures sans turbinage. La raison en est que, partant d'un plan de consommation $q(t), t \in [t^*, t^* + \Delta]$ qui épuise la totalité du stock R, donc tel que $\int_{t^*}^{t^*+\Delta} q(t)dt = R$, pour lequel ces contraintes sont inactives, il est toujours possible d'accroître marginalement de n'importe quelle date t' en réduisant d'autant la consommation de n'importe quelle date t'' pourvu que $q(t'') > 0$. Si $t' > t''$, il s'agit d'une classique mise en stock pour consommation ultérieure, et si $t'' > t'$ il s'agit typiquement d'une possibilité de transfert de l'extraction d'une date t'' à une date antérieure t' dans une mine dont le gisement n'est pas encore épuisé en t''. Il en résulte que s'il existe un intervalle $(t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1), \delta_1 > 0$, au cours duquel $q(t) > \widetilde{q}(t)$ alors il existe un autre intervalle $(t_2 - \delta_2, t_2 + \delta_2), \delta_2 > 0$, au cours duquel $q(t) < \widetilde{q}(t)$ puisque $\int_{t^*}^{t^*+\Delta} q(t)dt = R < \widetilde{Q}$, et donc un transfert de consommation du premier intervalle au second permet d'augmenter la somme des surplus actualisés.[19]

Il ne peut être opportun de procéder à des lâchures sans turbinage que si les transferts de consommation entre certaines dates de l'intervalle $[t^*, t^* + \Delta]$ sont bloqués et ils ne peuvent l'être que parce que l'une au moins des contraintes (17) ou (18) , ou la contrainte de turbinage, est active.

3.5 Arbitrage et fluctuations

Stocker de l'eau au cours du cycle n'a d'intérêt que si, soit les apports, soit les besoins, soit les deux, fluctuent. En l'absence de ces fluctuations, la nature même du cycle disparait.

En l'absence de fluctuation des apports, $r(t) = r$, $t \in [0, \Delta)$ et des besoins $u(q, t) = u(q), q \geq 0$ et $t \in [0, \Delta)$, il est clair que la politique optimale consiste à consommer à chaque instant la totalité des apports du moment pourvu que la capacité de turbinage soit suffisante, $\overline{q} > r$. Alors, $q^*(t) = r$ et $p^*(t) = u'(r) = \lambda^*(t)$, $t \in [0, \Delta)$. Etant donné ces sentiers, stocker des apports pour une utilisation ultérieure ne peut que déprimer la somme des surplus actualisés sous l'hypothèse de surplus marginal décroissant, $u''(r) < 0$, effet amplifié par l'actualisation. Avec un taux d'actualisation

[19] Et ce, quel que soit le taux de l'intérêt si $t_2 > t_1$, car $u'(q(t)) \leq 0, t \in (t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1)$ tandis que $u'(q(t)) > 0, t \in (t_2 - \delta_2, t_2 + \delta_2)$.

positif, $i > 0$, transférer de la consommation d'une date t'' à une date antérieure t' permettrait d'accroitre cette somme mais ce transfert est impossible car $S(t) = 0$, $t \in [0, \Delta)$.[20] Le prix de l'électricité et la valeur de l'eau sont égaux, et constants bien que le taux d'actualisation soit positif.[21]

Nous nous proposons maintenant d'illustrer comment il faudrait modifier la solution de (P.2) lorsque celle-ci impliquerait que l'une ou l'autre des conditions (17) et (18), ou les deux, n'est pas respectée dans deux cas extrèmes pour lesquels la détermination de t^* est simple. Dans le premier cas seuls les apports fluctuent et la mise en réserve des apports permet de lisser les consommations. Dans le second, seuls les besoins fluctuent et la mise en réserve permet au contraire une plus grande variation des consommations au cours de l'année.

4 Stocker pour se protéger de l'intermittence des apports

Considérons le cas d'un régime d'apports composé de deux saisons d'égales durées, une saison humide suivie d'une saison sèche:[22]

$$r(t) = \begin{cases} \overline{r} > 0, & 0 \leq t < \Delta/2 \\ 0, & \Delta/2 \leq t < \Delta. \end{cases}$$

Face à ces apports fortement fluctuants, supposons des besoins stables. La fonction de surplus reste inchangée au cours du cycle, et donc aussi la fonction de demande. Formellement:

$$u(q(t), t) = u(q(t)) \Longrightarrow q^d(p(t), t) = q^d(p(t)), \quad t \in [0, \Delta).$$

Soit $q_1^*(t)$ la solution du programme (P.2) et $p_1^*(t) = p_0^* e^{it}$, $t \in [0, \Delta)$ le sentier de prix associé. Sous les hypothèses posées sur $u(.)$ la consommation optimale $q_1^*(t)$ décroît à chaque instant où elle est positive et, si elle s'annule à une date $t' < \Delta$, reste nulle jusqu'à la fin du cycle.[23]

Examinons successivement les cas où la condition de stock positif (17) puis la condition de stock maximum (18) ne seraient pas remplies, avant de montrer comment tenir compte de la contrainte de turbinage si nécessaire.

[20] Les conditions d'optimalité (5) and (6) sont vérifiées pour $q^*(t) = r$, $\lambda^*(t) = u'(r), \overline{\gamma}_q(t) = 0, \underline{\gamma}_q(t) = 0, l^*(t) = 0$ et $\gamma_l(t) = \lambda^*(t), t \in [0, \Delta)$. Les conditions (7) and (9) le sont pour $\overline{\nu}(t) = 0$ et $\underline{\nu}(t) = i\lambda^*(t)$ de sorte que $\dot{\lambda}^*(t) = i\lambda^*(t) + \overline{\nu}(t) - \underline{\nu}(t) = 0$.

[21] Si, au contraire $\overline{q} < r$, alors la politique optimale est la suivante: $q^*(t) = \overline{q}$, $p^*(t) = u'(\overline{q})$, $l^*(t) = r - \overline{q}$, $\lambda^*(t) = \gamma_l(t) = 0$. Cependant poser $\overline{q} < r$ contredit l'hypothèse $R < \overline{Q}$.

[22] Pour simplifier la notation nous notons dans cette section et la suivante $t = 0$ la date t_0^* de la Section 3.

[23] Dans l'expression (19) de $\dot{q}^*(t)$ le terme $\partial u'(q^*(t), t)/\partial t$ est ici nul, d'où $\dot{q}^*(t) < 0$.

4.1 La consommation initiale est trop importante

Le cas d'une consommation initiale trop importante est illustré à la Figure 3 sur laquelle:

a. la somme des apports excédentaires $r(t) - q_1^*(t) > 0$ est représentée par la surface A;

b. la somme des excédents de consommation $q_1^*(t) - r(t) > 0$ est la somme des surfaces B_1 et B_2.

L'égalité $A = B_1 + B_2$ garantit que le sentier serait réalisable si la somme des apports $R = \overline{r}\Delta/2$ était disponible dès le début du cycle en $t = 0$. Mais pour $t < \overline{t}_1$, où $\overline{t}_1$ est la date à laquelle $q_1^*(t) = \overline{r}$, le stock devrait être négatif:

$$S^*(t) = \int_0^t (\overline{r} - q_1^*(\theta))\, d\theta < 0,$$

ce qui viole la condition (17).

Figure 3 ici

Cette situation est d'autant plus probable que le taux d'intérêt est élevé. Sous les conditions de la présente section, p_0^* est déterminé comme solution de

$$\int_0^\Delta q^d\left(p_0^* e^{it}\right) dt = R.$$

Différentions par rapport à i, R étant constant. Il en résulte que

$$\frac{dp_0^*}{di} = -\frac{\int_0^\Delta \frac{dq^d\left(p_0^* e^{it}\right)}{dp} t p_0^* e^{it} dt}{\int_0^\Delta \frac{dq^d\left(p_0^* e^{it}\right)}{dp} e^{it} dt} < 0,$$

et donc, si $q_1^*(t) > 0$:

$$\frac{dq_1^*(t)}{di} = \frac{dq^d\left(p_0^* e^{it}\right)}{di} = \frac{dq^d\left(p_0^* e^{it}\right)}{dp}\left[\frac{dp_0^*}{di} + t p_0^*\right] e^{it}.$$

Une variation positive du taux de l'intérêt, $di > 0$, induit un basculement du sentier optimal de consommation: les consommations des dates $t < -\left(dp_0^*/di\right)/p_0^*$ augmentent et celles des dates ultérieures diminuent.[24] Puisque, par hypothèse, $R = \overline{r}\Delta/2 < \widetilde{Q} = \widetilde{q}\Delta$ où $\widetilde{q}$ est la consommation de saturation, ici constante au cours du cycle, alors il existe un taux d'intérêt critique au-delà duquel la condition (17) est nécessairement violée.

Le plan optimal consiste à bloquer la consommation au niveau des apports $\overline{r}$ sur un intervalle $[0, \overline{t}_2)$, $0 < \overline{t}_2 < \Delta/2$, c'est à dire à retarder le début de la phase de constitution des réserves, $0 < \overline{t}_1 < \overline{t}_2 < \Delta/2$. Le sentier des consommations optimales est illustré à la Figure 4a et le sentier de prix correspondant à la Figure 4b.

[24] Pour i suffisamment élevé, la consommation optimale $q_1^*(t)$ est nulle aux dates $t > \widehat{t}$: $p_0^* e^{i\widehat{t}} = u'\left(0^+\right)$, lorsque $\widehat{t} < \Delta$. Pour ces dates évidemment $dq_1^*(t)/di = 0$.

Figure 4 ici

Sur la Figure 4a le sentier $q_1^*(t)$ est tracé en pointillés et le sentier optimal de consommation, le sentier $q_2^*(t)$ qui respecte la condition (17), est tracé en trait plein. La nouvelle surface A, le stock en réserve à son niveau maximal, est égale à la surface B, la consommation cumulée de la période sèche. Rappelons que nous supposons ici que la contrainte de capacité des réservoirs, la condition (18), n'est pas liante.

Sur l'intervalle $\left(\bar{t}_2, \Delta\right)$, le stock est positif et la règle de Hotelling s'applique. Soit $\bar{p}$ le prix justifiant la consommation $\bar{r}$: $q^d(\bar{p}) = \bar{r}$. Alors le sentier de prix $p_2^*(t)$ qui soutient $q_2^*(t)$ a pour expression:

$$p_2^*(t) = \begin{cases} \bar{p} & , \ 0 \leq t < \bar{t}_2 \\ \bar{p}e^{i\left(t-\bar{t}_2\right)} & , \ \bar{t}_2 \leq t < \Delta. \end{cases}$$

La date optimale $\bar{t}_2$ est déterminée par la condition d'égalité du stockage et du déstockage, c'est à dire comme la solution de l'équation suivante:

$$\int_{\bar{t}_2}^{\Delta/2} \left\{ \bar{r} - q^d\left(\bar{p}e^{i\left(t-\bar{t}_2\right)}\right) \right\} dt = \int_{\Delta/2}^{\Delta} q^d\left(\bar{p}e^{i\left(t-\bar{t}_2\right)}\right) dt \tag{20}$$

On notera que $\bar{t}_1 < \bar{t}_2$, sinon la condition (18) ne peut pas être respectée.

La partie décroissante du sentier de consommation $q_2^*(t)$ est une translation horizontale vers la droite du sentier $q_1^*(t)$ car la partie croissante du sentier de prix $p_2^*(t)$ est une translation similaire du sentier de prix $p_1^*(t)$ qui soutient $q_1^*(t)$.

La valeur marginale de l'eau est égale au prix de l'énergie: $\lambda^*(t) = p_2^*(t)$. Les conditions d'optimalité (7)-(9) sont alors les suivantes:

$$\dot{\lambda}^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \bar{t}_2 \\ i\bar{p}e^{i\left(t-\bar{t}_2\right)}, & \bar{t}_2 \leq t < \Delta \end{cases} \qquad \underline{\nu}^*(t) = \begin{cases} i\bar{p}, & 0 \leq t < \bar{t}_2 \\ 0, & \bar{t}_2 \leq t < \Delta \end{cases}$$

et $\bar{\nu}^*(t) = 0,\ 0 \leq t < \Delta$.

En effet, d'une part le réservoir reste vide entre 0 et $\bar{t}_2$ puisque les apports naturels sont intégralement consommés au fur et à mesure de leur arrivée et, d'autre part, le réservoir n'est jamais saturé.

Il est facile de vérifier que les possibilités d'arbitrage sont épuisées pour ces prix de l'eau. Pour ce sentier optimal $q_2^*(t)$, transférer des consommations de l'intervalle $(\bar{t}_2, \Delta)$ à l'intervalle $[0, \bar{t}_2)$ permettrait d'accroitre la valeur de la fonction d'objectif mais ce transfert est bloqué parce que la contrainte (17) est active sur l'intervalle $[0, \bar{t}_2)$: puisque $S(t) = 0$ et $q_2^*(t) = \bar{r}$, $t = [0, \bar{t}_2)$, il n'est pas possible d'augmenter la consommation à ces dates, en particulier du montant du transfert souhaitable en question.

4.2 Le stockage requis est supérieur à la capacité des réservoirs

L'autre cause d'impossibilité de mise en œuvre soit de la solution $q_1^*(t)$ du programme (P.2) soit de la solution $q_2^*(t)$ déterminée à la sous-section précédente est l'insuffisance de la capacité de stockage des réservoirs. Quid si la mesure de la surface A de la Figure 3 ou de la Figure 4.a est supérieure à $\bar{S}$?

4.2.1 Détermination de la trajectoire de prélèvement

Plaçons-nous dans la situation où la solution de (P.2) respecterait la condition (17) de non-négativité du stock mais pas la contrainte (18) de capacité des réservoirs. Cette solution est représentée par les sentiers de consommation $q_1^*(t)$ et de prix $p_1^*(t)$ en pointillés sur les Figures 5a et 5b respectivement.

Figure 5 ici

En suivant ce sentier, la quantité d'eau à mettre en stock est représentée par la surface *abcd* supérieure à la capacité de stockage $\overline{S}$. La solution qui consisterait à suivre le sentier $q_1^*(t)$ dès le début du cycle puis à rejeter les excédents d'apport $l(t) = \overline{r} - q_1^*(t) > 0$ à partir de la date où le réservoir est plein est évidemment sous-optimale puisque l'eau a une valeur marginale positive. Il faut donc forcer la consommation initiale au niveau des apports sur un intervalle $\left[0, \overline{t}_3\right]$, $0 < \overline{t}_3 < \Delta/2$ pour ramener la mise en stock au niveau $\overline{S}$.

Entre $\overline{t}_3$ et $\Delta/2$ le stock est positif et la règle de Hotelling s'applique. Notons $q_3^*(t)$ et $p_3^*(t)$ les sentiers optimaux respectant la contrainte de capacité des réservoirs. Alors:

$$p_3^*(t) = \begin{cases} \overline{p}, & 0 \leq t < \overline{t}_3 \\ \overline{p}e^{i\left(t-\overline{t}_3\right)}, & \overline{t}_3 \leq t < \Delta/2 \end{cases} \quad \text{et } q_3^*(t) = q^d\left(p_3^*(t)\right), \ t \in [0, \Delta/2) \tag{21}$$

La date $\overline{t}_3$ est déterminée comme solution de la condition de saturation de la capacité de stockage

$$\int_{\overline{t}_3}^{\Delta/2} \left\{\overline{r} - q^d\left(\overline{p}e^{i\left(t-\overline{t}_3\right)}\right)\right\} dt = \overline{S} \tag{22}$$

Notons que $q_3^*(t) > q_1^*(t)$ et $p_3^*(t) < p_1^*(t)$, $t \in [0, \Delta/2)$.

Puisque le stock $\overline{S}$ disponible au début de la saison sèche est inférieur à celui de la solution de (P.2), la consommation $q_3^*(t)$ au cours de cette saison est inférieure à $q_1^*(t)$ et puisque le stock est positif entre $\Delta/2$ et Δ la règle de Hotelling s'applique. Soit $p^*(\Delta/2)$ le prix de l'électricité au début de la saison sèche. Alors:

$$p_3^*(t) = p^*(\Delta/2)\, e^{i(t-\Delta/2)} \text{ et } q_3^*(t) = q^d\left(p_3^*(t)\right), \ t \in [\Delta/2, \Delta) \tag{23}$$

où le prix $p^*(\Delta/2)$, valeur optimale de $p(\Delta/2)$, est déterminé par la condition d'épuisement du stock:

$$\int_{\Delta/2}^{\Delta} q^d\left(p(\Delta/2)\, e^{i(t-\Delta/2)}\right) dt = \overline{S}. \tag{24}$$

Puisque *i)* le sentier $q_1^*(t)$ est continu, *ii)* $q_3^*(t) > q_1^*(t)$ si $t < \Delta/2$ et *iii)* $q_3^*(t) < q_1^*(t)$ si $t > \Delta/2$, le sentier de consommation $q_3^*(t)$ fait un saut vers le bas en $t = \Delta/2$ et donc le sentier de prix de l'hydroélecticité fait un saut vers le haut.

- Pendant la saison humide le sentier $\lambda^*(t) \equiv p_3^*(t)$ vérifie les conditions (7)-(9) pour les valeurs suivantes de $\overline{\nu}(t)$ et $\underline{\nu}(t)$:

$$\dot{\lambda}^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \overline{t}_3 \\ i\overline{p}e^{i\left(t-\overline{t}_3\right)}, & \overline{t}_3 \leq t < \Delta/2 \end{cases} \qquad \underline{\nu}^*(t) = \begin{cases} i\overline{p}, & 0 \leq t < \overline{t}_3 \\ 0, & \overline{t}_3 \leq t < \Delta/2 \end{cases}$$

et $\overline{\nu}^*(t) = 0,\ 0 \leq t < \Delta/2$.

- Pendant la saison sèche, $\lambda^*(t) = p_3^*(t)$ vérifie ces conditions (7)-(9) pour $\underline{v}^*(t) = 0 = \overline{\nu}^*(t),\ \Delta/2 \leq t < \Delta$.

Les conditions (7)-(9) ne spécifient rien aux points de non-différentiabilité de $\lambda^*(t)$, et donc a fortiori rien aux points de discontinuité.

4.2.2 Gestion de l'eau et gestion des réservoirs

La différence $p^*(\Delta/2) - \overline{p}e^{i\left(\frac{\Delta}{2}-\overline{t}_3\right)}$ est la valeur marginale de la capacité des réservoirs.[25] Si la gestion du stock d'eau et des réservoirs est intégrée, le gestionnaire prend naturellement en compte la contrainte de capacité. Face au sentier de prix $p_3^*(t)$ défini par les conditions $(23)-(24)$ il préfèrerait réduire les consommations de la période humide pour augmenter celles de la période sèche au cours de laquelle elles seraient mieux valorisées. Mais quel que soit le gain qu'il pourrait ainsi réaliser, ce gain intègre le bloquage des transferts par la saturation de la capacité de rétention des réservoirs.

Qu'en est-il si la gestion est partagée entre deux autorités distinctes? Un gestionnaire de l'eau décide à chaque instant de la fraction de l'eau stockée et des apports qu'il faut turbiner pour produire de l'électricité, le reste étant conservé pour une production ultérieure. De son côté, un gestionnaire des réservoirs dispose du droit de mettre ou non leur capacité à la diposition du gestionnaire de l'eau.

Pour que le gestionnaire de l'eau ne soit pas incité à dévier du sentier de pélèvement $q_3^*(t)$ il suffit de le mettre face à une trajectoire du prix de l'eau $\widehat{p}(t)$ le long de laquelle la règle de Hotelling s'applique sans discontinuité de $\overline{t}_3$ jusqu'à la fin du cycle:

$$\widehat{p}(t) = \begin{cases} \overline{p}, & 0 \leq t < \overline{t}_3 \\ \overline{p}e^{i\left(t-\overline{t}_3\right)}, & \overline{t}_3 \leq t < \Delta \end{cases}$$

A la date du changement de saison, le gestionnaire du réservoir perçoit un péage $\kappa^* = p^*(\Delta/2) - \overline{p}e^{i\left(\frac{\Delta}{2}-\overline{t}_3\right)}$ par unité d'eau transférée (en valeur de la date $\Delta/2$). Ayant acquitté ce péage, le gestionnaire de l'eau retirera le même bénéfice de la transformation de l'eau en électricité à toutes les dates de la période sèche si le prix de l'énergie est pour cette saison le prix $p_3^*(t)$ défini par $(23)-(24)$.

En résumé, pour un prix de l'eau $\widehat{p}(t)$, $t \in [0, \Delta)$, un péage κ^* versé en $t = \Delta/2$, et un prix de l'énergie $p_3^*(t)$, $t \in [0, \Delta)$, le gestionnaire de l'eau n'a pas intérêt à dévier de $p_3^*(t)$, ni le gestionnaire du réservoir à en limiter l'accès.[26]

[25] Sur la Figure 4, tout accroissement de $\overline{S}$ se traduit par un rapprochement des courbes $q_3^*(t)$ de la courbe $q_1^*(t)$ et des courbes $p_3^*(t)$ de la courbe $p_1^*(t)$.

[26] Un système de péage équivalent consisterait à requérir un taux $\tau(t) = \tau^* e^{i(t-\Delta/2)}$, $t \in [\Delta/2, \Delta)$, par unité d'eau mise en réservoir jusqu'à la date t quelle que soit la date à laquelle elle a été mise en réserve.

4.3 La capacité de turbinage est saturée

Supposons maintenant que la contrainte de capacité de turbinage ne soit pas respectée, ce qui ne peut survenir que si $\overline{q} < \overline{r}$.

Par exemple, sur la Figure 6 le sentier $q^*(t)$ est un sentier solution du programme (P.2) qui viole la contrainte de turbinage initialement mais respecte la contrainte (17), $S(t) > 0, t \in [0, \Delta)$ et respecte ou non la contrainte (18) selon que A= $S(\Delta/2)$ =B est inférieur ou supérieur à $\overline{S}$.

Figure 6 ici

Si $q_1^*(0) > \overline{q}$, le sentier $q_1^*(t)$ illustré à la Figure 3.serait une solution du programme (P.2) qui initialement ne respecte ni la contrainte de capacité de turbinage ni celle de non-négativité du stock d'eau et qui respecte ou non la condition (18) selon que A= $S(\Delta/2)$ =B$_1$+B$_2$ est inférieur ou supérieur à $\overline{S}$. Mais, après correction pour prise en compte de la seule condition (17), le sentier $q_2^*(t)$ de la Figure 4a qui en résulte ne peut violer la contrainte de turbinage que si $\overline{q} < \overline{r}$. Enfin, le sentier $q_3^*(t)$ de la Figure 5a qui respecte les conditions (17) et (18) ne peut violer la contrainte de turbinage que si $\overline{q} < \overline{r}$.

Notons que sous l'hypothèse générale $R < \overline{Q} \equiv \Delta\overline{q}$ et l'hypothèse particulière $R = \overline{r}\Delta/2$ de la présente section, alors $\overline{q} > \overline{r}/2$.

4.3.1 Seule la contrainte de turbinage est saturée à l'optimum

Lorsque la capacité de turbinage est saturée, elle l'est sur un intervalle initial $\left[0, \overline{t}_4\right)$, $0 < \overline{t}_4 < \Delta$ puisqu'en l'absence de prise en compte de la contrainte le sentier de consommation serait soit constamment décroissant (Figures 3 et 6), soit constant puis décroissant.

Notons $\overline{p}$ le prix qui justifie la consommation $\overline{q}$, $q^d(\overline{p}) = \overline{q}$, et non pas la consommation $\overline{r}$ comme aux sous-sections précédentes. Soit $p_4^*(t)$ le sentier de prix qui soutient $q_4^*(t)$. Alors, pour autant que la capacité des réservoirs soit suffisante, ces sentiers sont de la forme:

$$p_4^*(t) = \begin{cases} \overline{p}, & 0 \leq t < \overline{t}_4 \\ \overline{p}e^{i\left(t-\overline{t}_4\right)}, & \overline{t}_4 \leq t < \Delta \end{cases} \quad \text{et } q_4^*(t) = q^d\left(p_4^*(t)\right), \ 0 \leq t < \Delta$$

où $\overline{t}_4$ est déterminée par la condition d'épuisement des apports:

$$\overline{t}_4\overline{q} + \int_{\overline{t}_4}^{\Delta} q^d\left(\overline{p}e^{i\left(t-\overline{t}_4\right)}\right) dt = R \quad (= \overline{r}\Delta/2). \tag{25}$$

Les Figures 7 et 8 illustrent les deux types de solution possibles, selon que la contrainte de turbinage n'est active qu'au cours de la saison humide ou est active aussi sur une partie de la saison sèche respectivement.

Figure 7 ici

Quelle que soit la durée de la période $\left[0, \overline{t}_4\right)$ pendant laquelle la production d'électricité est contrainte, le stock $S\left(t\right)$ est positif et puisque la contrainte $S\left(t\right) \leq \overline{S}$ n'est pas non plus saturée, alors $\overline{\nu}(t) = \underline{\nu}(t) = 0$. La règle de Hotelling doit prévaloir sur la totalité du cycle. Le sentier de valeur de l'eau $\lambda(t^*)$ doit donc être de la forme:

$$\lambda(t^*) = \overline{p}e^{i\left(t-\overline{t}_4\right)},\ 0 \leq t < \Delta \tag{26}$$

Pour obtenir le prix de l'électricité, il faut ajouter à ce prix de l'eau le coût marginal de la contrainte de turbinage lorsqu'elle est saturée, à savoir $\overline{\gamma}_q^*(t)$ déterminé par la condition de premier ordre (5):

$$\overline{\gamma}_q^*(t) = u^{'}(\overline{q}) - \lambda(t^*) = \left[1 - e^{i\left(t-\overline{t}_4\right)}\right]\overline{p},\ t \in \left[0, \overline{t}_4\right) \tag{27}$$

On obtient bien ainsi $\lambda(t^*) + \overline{\gamma}_q^*(t) = \overline{p}$.

On peut remarquer que plus la capacité de turbinage $\overline{q}$ est élevée, plus faible est le coût d'usage des turbines puisque $\overline{p} = u^{'}(\overline{q})$ décroît en $\overline{q}$.

Figure 8 ici

4.3.2 Les deux contraintes, de turbinage et de stockage, sont actives.

Plus la contrainte de turbinage est sévère, plus longue est la période pendant laquelle la contrainte est active. On déduit en effet de la différentiation de (25) que:

$$\frac{d\overline{t}_4}{d\overline{q}} = \frac{\overline{t}_4 + \frac{d\overline{p}}{d\overline{q}}\int_{\overline{t}_4}^{\Delta}\frac{dq^d}{dp}e^{i\left(t-\overline{t}_4\right)}dt}{i\overline{p}\int_{\overline{t}_4}^{\Delta}\frac{dq^d}{dp}e^{i\left(t-\overline{t}_4\right)}dt} < 0. \tag{28}$$

Ceci implique que le niveau maximum du stock mis en réserve augmente lorsque la capacité de turbinage diminue. Le point est illustré à la Figure 9 pour le cas où $\overline{t}_4 < \Delta/2$. Sur cette figure $\overline{\delta} > 0$ représente une variation hypothétique de $\overline{t}_4$ consécutive à la baisse, $d\overline{q} < 0$, de la capacité de turbinage telle que, à partir de $\overline{t}_4 + \overline{\delta}$, le nouveau sentier optimal de consommation est confondu avec l'ancien. Le long d'un tel sentier, le stock accumulé à la date $\Delta/2$ augmenterait alors que la consommation cumulée postérieure à $\Delta/2$ ne changerait pas. Or, pour la capacité $\overline{q}$, ces deux stocks sont égaux. Avec la trajectoire hypothétique que nous examinons, une partie des apports serait donc gaspillée. Il en serait de même pour toute variation $d\overline{t}_4 < \overline{\delta}$. On conclut que $d\overline{t}_4 > \overline{\delta}$ ainsi qu'illustré à la Figure 9, ce qui implique que la consommation cumulée entre $\Delta/2$ et Δ augmente et donc aussi le stock constitué à la date $\Delta/2$.

Figure 9 ici

Ceci suggère qu'il ne faut pas exclure a priori que la contrainte de turbinage induise une saturation de la capacité de stockage.

Le cas illustré à la Figure 10 est celui dans lequel $\bar{t}_4 < \Delta/2$. La Figure 10 présente des similarités avec la Figure 5. Le sentier qui serait optimal en l'absence de contrainte de stockage est tracé en pointillés. La contrainte de stockage a pour effet un allongement de la période où les prélèvements sont au plafond de turbinage. Le sentier de consommation fait un saut vers le bas en $t = \Delta/2$ et le sentier de prix un saut vers le haut.

Figure 10 ici

Le cas illustré à la Figure 11 est celui dans lequel $\bar{t}_4 > \Delta/2$. En l'absence de problème de stockage le stock maximum serait le stock $S(\Delta/2) = (\bar{r} - \bar{q})\Delta/2 = R - \bar{q}\Delta/2$ et la période de production au plafond de turbinage s'étendrait jusqu'à la date $\bar{t}_4 + \bar{\delta}$, $\bar{\delta} > 0$. Les sentiers qui seraient optimaux sont tracés en pointillés. Puisque $S(\Delta/2) > \overline{S}$ et la consommation optimale $q_4^*(t)$ (tracée en trait plein) est égale à $\bar{q}$ entre 0 et $\Delta/2$, alors la partie des apports égale à $R - \left(\overline{S} + \bar{q}\Delta/2\right)$ doit être relâchée sans être turbinée: $l^*(t) = \bar{r} - \left(\bar{q} + 2\overline{S}/\Delta\right) > 0$ et $\gamma_l^*(t) = 0$, $0 \leq t < \Delta/2$, d'où $\lambda^*(t) = 0$ d'après (6). Il en résulte que la consommation cumulée au cours de la saison sèche est inférieure à ce qu'elle aurait été sans la contrainte de capacité des réservoirs. Cette baisse est obtenue par une réduction δ de la période au plafond de turbinage, contrairement au cas de la Figure 9, et une réduction de la consommation à toute date postérieure à $\bar{t}_4$.

Figure 11 ici

Les sentiers de prix de l'électricité et de l'eau sont les suivants:

$$p_4^*(t) = \begin{cases} \bar{p}, & 0 \leq t < \bar{t}_4 \\ \bar{p}e^{i\left(t-\bar{t}_4\right)}, & \bar{t}_4 \leq t < \Delta \end{cases} \quad \text{et } \lambda^*(t) = 0,\ 0 \leq t < \Delta,$$

de sorte que les conditions (7)-(9) sont bien satisfaites pour $\underline{\nu}^*(t) = 0 = \overline{\nu}^*(t)$, seules valeurs possibles de ces multiplicateurs puisque $S(t) > 0$, $0 \leq t < \Delta$, et $S(t) < \overline{S}$, cette dernière inégalité en tout t, $\Delta/2$ excepté.

Soit $\tau^*(t)$ le coût marginal de la contrainte de stockage, défini comme le coût unitaire de maintien de l'eau en réservoir jusqu'à la date t, $\Delta/2 \leq t < \Delta$, échéant à la dite date, quel que soit l'instant $t' < \Delta/2$ auquel elle a été mise en réserve:

$$\tau^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \Delta/2 \\ \left[1 - e^{i\left(\Delta/2 - \bar{t}_4\right)}\right]\bar{p}e^{i(t-\Delta/2)}, & \Delta/2 \leq t < \Delta. \end{cases}$$

Soit $\overline{\gamma}_q^*(t)$ le coût marginal de la contrainte de turbinage:

$$\overline{\gamma}_q^*(t) = \begin{cases} \bar{p}, & 0 \leq t < \bar{t}_4 \\ 0, & \bar{t}_4 < t < \Delta. \end{cases}$$

Pour obtenir le prix de l'électricité $p_4^*(t)$ il faut ajouter à la valeur marginale de l'eau $\lambda^*(t)$ le coût de la contrainte qui à l'instant t est la plus sévère, donc la plus coûteuse à la marge:

$$p_4^*(t) = \max\left\{\overline{\gamma}_q^*(t), \tau^*(t)\right\},\ 0 < t < \Delta.$$

Dans la situation illustrée à la Figure 11, la contrainte de capacité de turbinage est si forte que la discontinuité du prix de l'électricité que pourrait causer la saturation des capacités de stockage est effacée, contrairement au cas illustré à la Figure 10.

4.4 La consommation est saturée

Nous avons remarqué à la sous-section 3.4 que, sous l'hypothèse $R < \widetilde{Q}$, la consommation ne peut être saturée que si les transferts intertemporels sont bloqués parce qu'une contrainte est active. Une telle situation est possible ici lorsque d'une part la consommation de saturation est inférieure aux apports de la saison humide et à la capacité de turbinage, $\widetilde{q} < \min\{\overline{r}, \overline{q}\}$ et d'autre part la capacité des réservoirs $\overline{S}$ est insuffisante. Une situation de ce type est illustrée à la Figure 12. On notera que sous l'hypothèse générale $R < \widetilde{Q} = \widetilde{q}\Delta$ et l'hypothèse particulière de la présente section $R = \overline{r}\Delta/2$, alors $\widetilde{q} > \overline{r}/2$.

Figure 12 ici

Sur la Figure 12 la surface $(\overline{r} - \widetilde{q})\,\Delta/2$ représente la partie des apports qui pourrait être stockée tout en saturant la consommation de la saison humide à condition que la capacité des réservoirs soit suffisante. Mais elle ne l'est pas: $\overline{S} < (\overline{r} - \widetilde{q})\,\Delta/2$. Le sentier optimal de consommation est le sentier $q_5^*(t) = q^d(p_5^*(t))$ où $p_5^*(t)$ est le sentier suivant:

$$p_5^*(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t < \Delta/2 \\ p^*(\Delta/2)\, e^{i(t-\Delta/2)} & , \Delta/2 \leq t < \Delta \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{\Delta/2}^{\Delta} q^d\left(p^*(\Delta/2)\, e^{i(t-\Delta/2)}\right) dt = \overline{S}.$$

La partie $(\overline{r} - \widetilde{q})\,\Delta/2 - \overline{S}$ des apports de la saison humide doit donc être relâchée sans être turbinée. Cependant le profil précis des lâchures et/ou de la constitution du stock $\overline{S}$ est indéterminé. Tout sentier $l^*(t)$, $t \in [0, \Delta/2)$ tel que:

$$0 \leq l^*(t) \leq \overline{r} - \widetilde{q} \quad \text{et} \quad \int_0^{\Delta/2} (\overline{r} - l^*(t))dt = \overline{S}$$

est un sentier optimal.

5 Stocker pour faciliter les variations de consommation

Lorsque les apports varient peu au cours du temps et que, au contraire, les besoins fluctuent fortement, le stockage permet une modulation des consommations plus en accord avec ces fluctuations que ce qu'eût permis la consommation des seuls apports au fil de leur arrivée. Un exemple de ce type de situation est celui dans lequel les apports sont constants au cours du temps et les besoins sont plus intenses au cours de la seconde moitié du cycle qu'au cours de la première.

Supposons que

$$\begin{aligned}
&r(t)=\overline{r}, && t\in[0,\Delta)\\
&u(q(t),t)=\left\{\begin{array}{ll} u_1\left(q(t)\right), & 0\leq t<\Delta/2\\ u_2\left(q(t)\right), & \Delta/2\leq t<\Delta\end{array}\right. &&\\
&\widetilde{q}_1<\widetilde{q}_2, u_1\left(q\right)<u_2\left(q\right)\text{ et } u_1^{'}\left(q\right)<u_2^{'}\left(q\right), q\in(0,\widetilde{q}_2) &&
\end{aligned}$$

où $\widetilde{q}_j$, $j=1,2$ est la consommation de saturation de la saison j.

Soit $q_j^d\left(p\right)$ la fonction de demande instantanée de la saison j. Alors, pour tout prix auquel la demande de la saison 2 est positive, celle-ci est supérieure à la demande de la saison 1:

$$\forall p\geq 0: q_2^d\left(p\right)>0\Longrightarrow q_1^d\left(p\right)<q_2^d\left(p\right).$$

Pour simplifier on suppose que les apports sont inférieurs aux consommations de saturation de chaque saison : $\overline{r}<\widetilde{q}_j$, $j=1,2$. On note $\overline{p}_j$ le prix auquel la demande de la saison i absorbe la totalité des apports instantanés: $q_j^d\left(\overline{p}_j\right)=\overline{r}$, $j=1,2$. Il est clair que $\overline{p}_1<\overline{p}_2$. Supposons que la solution du programme (P.2), où ici $R=\overline{r}\Delta$, ne sature pas la contrainte de turbinage. Notons $p^*(t)=p_0^*e^{it}$, $t\in[0,\Delta)$ le sentier de prix de l'électricité ou valeur de l'eau de cette solution, $q_1^*(t), t\in[0,\Delta/2)$ et $q_2^*(t), t\in[\Delta/2,\Delta)$ les consommations correspondantes. Sous l'hypothèse de non saturation de la capacité de turbinage, $q_j^*(t)$ est de la forme:

$$q_1^*(t)=q_1^d\left(p_0^*e^{it}\right),\ t\in[0,\Delta/2)\ \text{ et } q_2^*(t)=q_2^d\left(p_0^*e^{it}\right),\ t\in[\Delta/2,\Delta)$$

Chaque fonction $q_j^*(t)$ est décroissante et, sous l'hypothèse de rareté de la ressource, la totalité des apports est consommée:

$$\int_0^{\Delta/2}q_1^*(t)dt+\int_{\Delta/2}^{\Delta}q_2^*(t)dt=R. \tag{29}$$

Un cas dans lequel les deux conditions (17) et (18) seraient satisfaites est illustré à la Figure 13 où la surface A, le stock constitué à la saison 1, est inférieur à $\overline{S}$ et égale à la surface B, l'excédent des consommations sur les apports de la saison 2. Le stock d'eau est positif à chaque instant du cycle. En l'absence de possibilités de stockage la consommation serait en permanence égale à $\overline{r}$. Le stockage permet une modulation des consommations mieux adaptées aux besoins.

Figure 13 ici

Nous montrons maintenant qu'apparaissent de nouvelles possibilités de non-respect de la condition (17) de non-négativité du stock d'eau sur lesquelles nous concentrons l'analyse.

5.1 Sentiers optimaux et contrainte de non négativité du stock d'eau

Avec des apports constants et des besoins saisonniers, la solution du programme (P.2) peut violer la condition (17) en début du cycle comme à la section précédente, mais aussi en fin de cycle. Trois types de situations sont susceptibles d'apparaitre: non respect uniquement en fin de cycle, non respect en début et en fin de cycle, et même non-respect sur la totalité du cycle excepté aux dates extrêmes $t = 0$ et $t = \Delta$. Ce dernier cas est illustré sur la Figure 14.

Figure 14 ici

Sur la Figure 14 il existe deux phases au cours desquelles les apports sont supérieurs aux consommations, la phase $(t_1, \Delta/2)$ au cours de laquelle la somme des excédents est la surface A_1 et la phase (t_2, Δ) pendant laquelle cette somme est égale à A_2. Il existe aussi deux phases au cours desquelles les consommations sont supérieures aux apports, la phase $(0, t_1)$ pendant laquelle la somme des excédents s'élève à B_1 et la phase $(\Delta/2, t_2)$ pendant laquelle elle s'élève à B_2. Sur l'ensemble du cycle, le stockage $A_1 + A_2$ est égal au déstockage $B_1 + B_2$ de sorte que $S(0) = 0 = S(\Delta)$. Mais en t_1 et t_2 le stock atteint un minimum négatif. Il atteint un maximum local en $t = \Delta/2$. Ce maximum est positif et global si $A_1 > B_1$. Il est négatif et local si $A_1 < B_1$, comme illustré à la Figure 14 et alors le stock est négatif sur la totalité du cycle, sauf en 0 et Δ.

5.1.1 Nécessité du stockage et types de sentiers admissibles à l'optimalité

Puisque nous avons supposé que la saison 2 est la saison où la demande est la plus forte ($\overline{p}_1 \overset{def}{=} u_1^{'}(\overline{r}) < u_2^{'}(\overline{r}) \overset{def}{=} \overline{p}_2$), l'optimalité requiert un certain stockage. En effet le transfert d'une partie $\epsilon > 0$ des apports d'une date t_1 de la saison 1 pour consommation à une date t_2 du début de la période 2 permet d'accroitre la somme des surplus actualisés d'un montant approximativement égal à $\epsilon(\overline{p}_2 - \overline{p}_1)e^{-i(t_2-t_1)}$ (en valeur à la date t_1), montant positif pourvu que ϵ soit suffisamment petit et que le taux de l'intérêt, qui mesure l'impatience, ne soit pas infini.

Sachant qu'il faut stocker puis déstocker et qu'il faut partir d'un stock nul en début de cycle, pour que la condition de non-négativité (17) soit satisfaite il est d'abord necessaire que la consommation ne soit pas supérieure à $\overline{r}$ au début de la saison 1 pour annuler $B1$ dans la Figure 14. Mais à supposer que $B1$ soit nul et $A1$ positif, il faut alors que $A2$ soit nul pour que le stock ne soit pas positif en fin de cycle, ce qui impose que la consommation ne soit pas inférieure à $\overline{r}$ dans la dernière partie de la saison 2.

En l'absence de contrainte de capacité de stockage et de turbinage, ce qu'on supposera dans cette sous-section, les seuls sentiers de prix admissibles sont donc les quatre sentiers de la Figure 15 le long desquels, lorsque le prix est croissant, il croît au taux proportionnel instantané i.

Figure 15 ici

Le sentier de type I est celui pour lequel la solution de (P.2) vérifie la condition (17) et épuise le stock en fin de cycle. C'est le type de sentier de prix qui soutient le sentier de consommation de la Figure 13 : le stock est positif sur la totalité du cycle $(0, \Delta)$ et la règle de Hotelling s'applique en permanence au cours du cycle. Les autres types sont ceux pour lesquels la solution de (P.2) violerait la condition (17) et/ou laisserait un stock d'eau positif en Δ :

- pour le type II, la solution de (P.2) violerait (17) au début de la saison 1. La contrainte de non négativité du stock est donc active au début de la saison de faible demande;
- pour le type III, la poursuite du sentier de consommation solution de (P.2) conduirait à consommer moins que les apports et engendrerait un stock positif en fin de saison de forte demande. La trajectoire descendante doit donc être tronquée à $q_2^*(t) = \overline{r}$ en fin de cycle et le stock est vide avant même la date Δ;
- enfin, le type IV cumule les caractéristiques des types II et III.

Montrons que chacun de ces types de sentiers ne peut apparaitre comme sentier optimal que sous certaines conditions relatives à l'écart des prix $\overline{p}_2 - \overline{p}_1$ et au taux de l'intérêt i.

5.1.2 Détermination du sentier optimal

Soit Γ le délai nécessaire pour que le prix $p(t)$ atteigne le niveau $\overline{p}_2$ en partant du niveau $\overline{p}_1$ et croissant au taux i:

$$\overline{p}_2 = \overline{p}_1 e^{i\Gamma} \Longrightarrow \Gamma = \frac{1}{i} \ln\left(\frac{\overline{p}_2}{\overline{p}_1}\right) = \frac{1}{i}\left[\ln \overline{p}_2 - \ln \overline{p}_1\right].$$

Ce délai est le délai de transition de $\overline{p}_1$ à $\overline{p}_2$ le long du sentier de prix qui respecte la règle de Hotelling lors de la transition. Plusieurs cas se présentent selon que le délai est bref ($\Gamma < \Delta/2$), modéré ($\Delta/2 < \Gamma < \Delta$), ou long ($\Delta < \Gamma$); de façon équivalente, selon que la société est impatiente ($i > 2\ln\left(\frac{\overline{p}_2}{\overline{p}_1}\right)/\Delta$), modérément patiente ($\ln\left(\frac{\overline{p}_2}{\overline{p}_1}\right)/\Delta < i < 2\ln\left(\frac{\overline{p}_2}{\overline{p}_1}\right)/\Delta$), ou patiente ($i < \ln\left(\frac{\overline{p}_2}{\overline{p}_1}\right)/\Delta$); de façon équivalente encore, selon que la différence d'intensité des besoins (représentée par la différence entre dispositions à payer pour la consommation du flux instantané $\overline{p}_j = u_j^{'}(\overline{r})$ quand la demande est faible, $j = 1$, et quand la demande est forte, $j = 2$) est faible ($\overline{p}_2/\overline{p}_1 < e^{i\Delta/2}$), modérée ($e^{i\Delta/2} < \overline{p}_2/\overline{p}_1 < e^{i\Delta}$), ou importante ($e^{i\Delta} < \overline{p}_2/\overline{p}_1$).

Cas $\Gamma < \Delta/2$: La société est impatiente Dans ce cas, l'impatience pousse à augmenter les consommations présentes au détriment des consommations futures et va à l'encontre de la structure des préférences instantanées qui valorise plus les consommations futures. Le sentier optimal est du type IV dans la Figure 13. Le sentier optimal de prix est le sentier

$$p^*(t) = \begin{cases} \overline{p}_1 & \text{si } 0 \leq t < \overline{t}_1 \\ \overline{p}_1 e^{i(t-\overline{t}_1)} & \text{si } \overline{t}_1 \leq t < \overline{t}_1 + \Gamma \\ \overline{p}_2 & \text{si } \overline{t}_1 + \Gamma \leq t < \Delta \end{cases}$$

où $\overline{t}_1$ $\left(\underline{t}_1 < \overline{t}_1 < \Delta/2\right)$ est l'unique solution de l'équation d'égalité du stockage et du déstockage:

$$\int_t^{\Delta/2} \left[\overline{r} - q_1^d\left(\overline{p}_1 e^{i(\theta-t)}\right)\right] d\theta = \int_{\Delta/2}^{t+\Gamma} \left[q_2^d\left(\overline{p}_1 e^{i(\theta-t)}\right) - \overline{r}\right] d\theta. \tag{30}$$

Plus la préférence pour le présent est forte, plus l'écart entre les consommations des deux périodes est réduit grâce à la consommation immédiate des apports du début de la saison 1. Géométriquement, cela se traduit par un allongement du plateau initial de la phase 1 et du plateau final de la phase 2 des sentiers du type IV. Ce n'est qu'à l'approche de la césure, pour des dates de la première et de la deuxième périodes tellement proches que la préférence pour le présent perd de sa force, que le différentiel des préférences reprend le rôle principal et pousse à réduire la consommation présente pour augmenter celle du début de la deuxième période. Cette période de stockage-déstockage est d'autant plus courte (la pente de la courbe de prix est d'autant plus forte) que l'impatience de la société est forte.

Cas $\Delta < \Gamma$: La société est très patiente La patience de la société amplifie le différentiel d'intensité des préférences en faveur de la seconde période. Dans ce cas, la transition du prix $\overline{p}_1$ au prix $\overline{p}_2$ est très lente et exige donc un délai Γ plus long que la durée du cycle naturel Δ. Les quantités consommées et le prix sont du type I, avec éventuellement un troncage soit en début, soit en fin de cycle, mais pas aux deux (Les trajectoires de type IV sont exclues puisqu'elles nécessitent $\Gamma < \Delta/2$).

Un cas particulier limite est celui d'une absence totale de préférence pour le présent, $i = 0$. Le prix de la ressource suit donc une trajectoire constante p^* $(\overline{p}_1 < p^* < \overline{p}_2)$ au cours du cycle et les quantités consommées sont constantes pendant chacune des deux parties du cycle, plus faibles à la saison 1 qu'à la saison 2. C'est un sentier de type I avec une courbe de prix horizontale et deux courbes de consommation horizontales $q_1^* < q_2^*$. La solution est entièrement caractérisée par

$$\begin{aligned} &\overline{r} - q_1^d(p^*) = q_2^d(p^*) - \overline{r} \\ &p^* = u_1'(q_1^*) = u_2'(q_2^*) \end{aligned}$$

comme dans un modèle discret à deux périodes[27] où le stock à répartir serait égal à $2\overline{r}$.

Cas $\Delta/2 < \Gamma < \Delta$: La société est modérément patiente Dans ce cas intermédiaire, les sentiers optimaux peuvent être de n'importe lequel des types précédents, sauf du type I car le taux d'intérêt est trop élevé pour que le délai de passage du prix $\overline{p}_1$ au prix $\overline{p}_2$ en suivant le sentier de Hotelling soit supérieur à la durée Δ du cycle.

[27]Voir Crampes et Moreaux (2016).

5.2 Sentiers optimaux et autres contraintes

Montrons maintenant comment ce nouveau type de période au cours de laquelle la contrainte de non négativité du stock est active peut se combiner avec des périodes au cours desquelles les autres contraintes, capacité de stockage et capacité de turbinage, sont également actives. A priori il est possible que chaque contrainte soit active en même temps que l'une des deux autres ou les deux simultanément. Un exemple de situation dans laquelle les trois contraintes sont actives au cours du cycle est illustré à la Figure 16. [28]

Figure 16 ici

Sur la Figure 16 les prix p_{jT}, $j = 1, 2$, sont les prix auxquels est demandée une quantité d'électricité égale à la capacité de turbinage: $p_{jT} = u_j^{'}(\overline{q})\,,.\; j = 1, 2$. Le sentier illustré n'est possible que si d'une part $\overline{r} < \overline{q}$ et, d'autre part, étant donnés $\overline{r}$ et $\overline{q}$, la distance entre les fonctions de surplus marginal $u_1^{'}(q)$ et $u_2^{'}(q)$ est suffisamment importante pour que $\overline{p}_1 < p_{2T}$ (cf. Figure 17).

Figure 17 ici

Le sentier de la Figure 16 est un sentier le long duquel:

a) au cours de la saison 1, la demande potentielle, la plus faible des deux saisons, est cependant suffisamment forte pour qu'il soit initialement nécessaire de consommer sur l'intervalle $[0, t_1]$ la totalité des apports à chaque instant, la contrainte (17) de non-négativité du stock étant alors active, et simultanément la demande forte de la saison 2 est suffisamment intense pour que le montant du stock à accumuler sur l'intervalle $[t_1, \Delta/2]$ soit bloqué par la contrainte (18) de capacité des réservoirs;

b) au cours de la saison 2, la demande potentielle est suffisamment élevée pour qu'en début de saison la consommation soit supérieure aux apports sur l'intervalle $[\Delta/2, t_3]$ et bloquée initialement par la capacité de turbinage sur l'intervalle $[\Delta/2, t_2]$, $t_2 < t_3$. A la date $t_3 < \Delta$ le stock est épuisé: $S(t_3) = 0$. Sur l'intervalle $[t_3, \Delta]$ il ne serait pas optimal de constituer un nouveau stock pour transférer de l'électricité d'une date à une date ultérieure puisque l'utilité marginale est décroissante. Donc lors de la dernière phase du cycle $[t_3, \Delta]$ la consommation est égale aux apports et la condition (17) est saturée.

On notera que la condition nécessaire d'existence d'une telle trajectoire optimale, la condition $\overline{r} < \overline{q}$ qui suppose une capacité de turbinage supérieure au flux constant des apports, n'est pas l'indice d'une capacité de turbinage trop largement dimensionnée puisqu'elle est saturée au cours du cycle. Au demeurant, sans elle il ne serait pas possible de moduler la production d'électricité pour mieux l'adapter aux besoins.

La date t_1 est déterminée par la condition de saturation de la capacité de stockage à la saison 1:

$$\int_{t_1}^{\Delta/2} \left[\overline{r} - q_1^d\left(\overline{p}_1 e^{i(t-t_1)}\right)\right] dt = \overline{S}.$$

[28] Un recensement de toutes les situations possibles est disponible sur demande aux auteurs.

Les dates t_2 et t_3 sont simultanément déterminées par les deux conditions d'épuisement du stock entre $\Delta/2$ et t_3 au cours de la saison 2 et la condition de continuité du prix de l'électricité à la date t_3 :

$$\begin{array}{l} [t_2 - \Delta/2]\, q^d\,(p_{2T}) + \int_{t_2}^{t_3} q^d\left(p_{2T}e^{i(t-t_2)}\right) dt = \overline{S} + [t_3 - \Delta/2]\,\overline{r} \\ p_{2T}e^{i(t_3-t_2)} = \overline{p}_2. \end{array}$$

Le prix de l'électricité et la valeur de l'eau sont confondus exceptés sur l'intervalle $[\Delta/2, t_2]$ pendant lequel la contrainte de turbinage est active. Les conditions nécessaires d'optimalité $(5) - (8)$ sont satisfaites pour les valeurs suivantes des multiplicateurs:

au cours de la saison 1:

$$\lambda^*(t) = p^*(t) \left\{ \begin{array}{ll} \overline{p}_1, & 0 \le t < t_1 \\ \overline{p}_1 e^{i(t-t_1)}, & t_1 \le t < \Delta/2 \end{array} \right. , \quad \underline{\nu}^*(t) = \left\{ \begin{array}{ll} i\overline{p}, & 0 \le t < t_1 \\ 0, & t_1 \le t < \Delta/2 \end{array} \right. \tag{31}$$

$$\overline{\nu}^*(t) = 0, \overline{\gamma}_q^*(t) = 0, \underline{\gamma}_q^*(t) = 0, \gamma_l^*(t) = \lambda^*(t), 0 \le t < \Delta/2$$

au cours de la saison 2:

$$\lambda^*(t) = \left\{ \begin{array}{ll} p_{2T}e^{i(t-t_2)}, & \Delta/2 \le t < t_3 \\ \overline{p}_2, & t_3 \le t < \Delta \end{array} \right. , \qquad p^*(t) = \left\{ \begin{array}{ll} p_{2T}, & \Delta/2 \le t < t_2 \\ \lambda^*(t), & t_2 \le t < \Delta \end{array} \right. \tag{32}$$

$$\underline{\nu}^*(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \Delta/2 \le t < t_3 \\ i\overline{p}_2, & t_3 \le t < \Delta \end{array} \right. , \qquad \overline{\nu}^*(t) = 0,\ \Delta/2 \le t < t_3 \tag{33}$$

$$\overline{\gamma}_q^*(t) = \left\{ \begin{array}{ll} p_{2T}\left[1 - e^{i(t-t_2)}\right], & \Delta/2 \le t < t_2 \\ 0, & t_2 \le t < \Delta \end{array} \right. , \underline{\gamma}_q^*(t) = 0, \gamma_l^*(t) = \lambda^*(t), \Delta/2 \le t < \Delta. \tag{34}$$

A la date $\Delta/2$ valeur de l'eau et prix de l'électricité font tous deux un saut vers le haut mais le saut de la valeur de l'eau $p_{2T}e^{i(\Delta/2-t_2)} - \overline{p}_1 e^{i(\Delta/2-t_1)}$, correspondant à la saturation de la contrainte de capacité de stockage, est inférieur au saut du prix de l'électricité, $p_{2T} - \overline{p}_1 e^{i(\Delta/2-t_2)}$, qui inclut de plus le saut du multiplicateur $\overline{\gamma}_q$ associé à la saturation de la capacité de turbinage qui devient active à cette date.

Le long du sentier, aucun arbitrage n'est possible, en particulier les apports de l'intervalle (t_3, Δ) qui seraient mieux valorisés sur l'intervalle (t_2, t_3), $p_{2T}e^{i(t-t_2)} > \overline{p}_2, t_3 \le t < \Delta$, ne peuvent pas être transférés car la contrainte $S(t) \ge 0$ est active entre t_3 et Δ.

6 Coûts des contraintes et dimensionnement optimal des installations

Le modèle présenté dans les sections précédentes décrit soit ce que doit être la gestion optimale d'installations en place, soit ce que devrait être la gestion optimale d'installations projetées. Dans ce dernier cas les multiplicateurs associés aux contraintes de capacité de la retenue et de capacité de turbinage fournissent une partie de l'information nécessaire à la détermination du dimensionnement optimal des dites installations. L'autre partie est donnée par les coûts maginaux d'accroissement des capacités en question.

Considérons d'abord le cas dans lequel la contrainte de capacité de la retenue est bloquante à la date $\Delta/2$ dans l'un ou l'autre exemple des sections 4 et 5. Soit τ^* la valeur courante à cette date du multiplicateur associé à la contrainte et τ_0^* sa valeur en début de période, $\tau_0^* = \tau^* e^{-i\Delta/2}$. Un accroissement $d\overline{S} > 0$ de la capacité du réservoir permet d'amplifier d'un même montant $d\overline{S}$ à chaque période les transferts d'eau de la première saison $[0, \Delta/2)$ à la seconde $[\Delta/2, \Delta)$..Puisque τ_0^* est l'écart de valeur entre l'eau disponible pendant la première saison et celle disponible pendant la seconde, l'accroissement de la valeur de la somme des surplus nets actualisés s'élève à $\tau_0^* d\overline{S}$ (en valeur début de période).

Soit $\beta = e^{-i\Delta}$ le facteur d'escompte inter-périodes et $n+1$ le nombre de périodes pendant lesquelles le barrage devrait être exploité. La valeur capitalisée de $d\overline{S}$ au début de la première période d'exploitation du barrage s'élève alors à $V\left(d\overline{S}\right) = \tau_0^* d\overline{S} \sum_{k=0}^{n} \beta^k$. La capacité de la retenue doit donc être revue à la hausse si le coût de l'accroissement $d\overline{S}$ envisagé est, en valeur à la même date, inférieur à $V\left(d\overline{S}\right)$.[29,30]

Considérons maintenant le cas dans lequel la contrainte de capacité de turbinage est active. Prenons pour exemple la situation illustrée à la Figure 16, situation dans laquelle la contrainte de turbinage est active sur l'intervalle $[\Delta/2, t_2)$. Au cours de cette phase, la valeur courante du multiplicateur associé à la contrainte, $\overline{\gamma}_q^*(t)$, est décroissante et s'annule en t_2 (cf. eq (34))

Un accroissement $d\overline{q} > 0$ de la capacité de turbinage parmet donc d'accroitre la somme des surplus nets actualisés de chaque période d'un montant $d\overline{q} \int_{\Delta/2}^{t_2} \overline{\gamma}_q^*(t)\, e^{-it} dt$, en valeur début de période. La valeur capitalisée de $d\overline{q}$ au début de la première période d'exploitation des installations s'élève alors à $V(d\overline{q}) = d\overline{q} \left[\int_{\Delta/2}^{t_2} \overline{\gamma}_q^*(t)\, e^{-it} dt\right] \sum_{k=0}^{n} \beta^k$ lorsque les installations doivent être exploitées pendant $n+1$ périodes.[31] Selon que le coût de $d\overline{q}$ évalué à la même date que $V(d\overline{q})$, est inférieur ou supérieur à $V(d\overline{q})$, la capacité de turbinage doit être ou non plus largement dimensionnée.

Il est clair que ces comparaisons déterminent les dimensions optimales des équipements ... s'il est profitable de les construire. Il reste à comparer la somme des surplus nets actualisés aux coûts fixes pour savoir s'il faut les construire ou non.

7 Conclusion

En introduisant des apports en eau exogènes dans un modèle de gestion optimale d'un réservoir, nous avons démontré que la règle de Hotelling, règle d'arbitrage entre utilisations concurrentes à différentes dates d'un stock de ressource rare, ne dépend pas du

[29] Pour une vallée donnée, la topographie et la géologie d'une part et les techniques de construction disponibles d'autre part fixent une limite supérieure à la capacité des retenues réalisables. Pour cette capacité limite on peut toujours poser que le coût marginal de $\overline{S}$ est infini.

[30] Pour être complet, il faudrait tenir compte du devenir du site à l'issue de ces $n+1$ périodes d'exploitation.

[31] Il est clair qu'il y a un problème de concordance des durées de vie des retenues et des capacités de turbinage.

fait que ce stock soit en phase de remplissage ou de vidage. Mais, pour que la règle soit satisfaite, il est nécessaire que la gestion optimale de la ressource ne bute pas sur une contrainte de stock, qu'il s'agisse du seuil maximum ou du seuil minimum à respecter pour l'eau placée en réserve. Hors de ces contraintes, la valeur de l'eau stockée croît donc au taux de l'intérêt. Il peut cependant exister des discontinuités dans la trajectoire de la valeur de l'eau au passage de certains seuils, par exemple si l'alternance entre saisons humide et sèche ou l'alternance entre périodes de faible demande et de forte demande est discontinue.

Dans l'industrie hydroélectrique, la ressource en eau est transformée en électricité en passant par les installations de turbinage. La relation entre valeur de l'eau et valeur de l'électricité qui en est tirée dépend donc des contraintes en capacités de production. L'eau stockée permet de résoudre le déphasage entre les apports naturels irréguliers en eau et les besoins très variables dans le temps des consommateurs d'électricité. Mais le lissage de ces deux types d'irrégularités est contraint par les capacités de stockage limitées des réservoirs et les capacités limitées de transformation de la force de gravité de l'eau en électricité produite par les générateurs électriques associés.

Plusieurs types d'extension sont possibles à partir du modèle de base développé ici. D'abord, l'eau a des usages multiples, mutuellement exclusifs ou non, tels que production d'énergie, irrigation, alimentation et usage récréatif. Les lâchures, turbinées ou non, ont donc une valeur économique qui peut être traitée soit sous la forme d'une valeur de marché endogène si la ressource est mise en concurrence entre les divers usagers, soit sous la forme de contraintes supplémentaires imposées dans un cahier des charges. Dans cette perspective, il faudrait aussi reconsidérer l'hypothèse de libre disposition qui permet de satisfaire la consommation d'électricité sans excéder le niveau de saturation et de se débarrasser des excédents de ressource sans dommage pour les usagers situés en aval.

Une deuxième extension pourrait concerner la forme de la fonction d'objectif. La plupart des installations hydroélectriques sont intégrées dans un vaste système dont elles ne représentent qu'une faible part de la production. Le gain du turbinage est donc le prix du marché, paramètre exogène, et non l'utilité marginale endogène de la consommation d'électricité. En fait, il existe plusieurs marchés (du lendemain, d'ajustement) sur lesquels la très grande flexibilité des installations hydroélectriques permettent d'intervenir. Le caractère exogène de la valeur de l'électricité produite peut être également dû au cadre régulatoire qui contraint les installations hydroélectriques.

Enfin, une hypothèse essentielle de notre modèle est que les apports naturels en eau, bien qu'irréguliers, sont parfaitement prévisibles. Il faudrait introduire une distribution de probabilités des précipitations propre à chaque sous-période pour ajouter la dimension assurancielle à la gestion de l'esu mise en réservoir.

References

[1] Crampes, C. et M. Moreaux (2010), "Pumping storage and cost saving", Energy Economics, Elsevier, vol. 32, n. 2, March, pp. 325–333.

[2] Crampes, C. et M. Moreaux (2016) "Microéconomie de l'hydroélectricité : Partie 1 Valeurs de l'eau", TSE Working Paper, n° 16-640

[3] Debreu, G. (1959), "Theory of value", Cowles Foundation Monograph n°17, John Wiley and Sons.

[4] Edwards, B.K. (2003), "The economics of hydroelectric power", Edward Elgar.

[5] Førsund, F.R (2007), "Hydropower economics"; second edition 2015, Springer.

[6] Horsley, A. et A. Wrobel (2007), "Profit-maximizing operation and valuation of hydroelectric plant: A new solution to the Koopmans problem", Journal of Economic Dynamics and Control, Elsevier, vol. 31(3), pages 938-970, March (repris et développé dans Horsley et Wrobel, 2016).

[7] Horsley, A. et A. Wrobel (2016), "The short-run approach to long-run equilibrium in competitive markets. A general theory with application to peak-load pricing with storage", Springer International Publishing AG, Switzerland.

[8] Hotelling, H. (1931) "The economics of exhaustible resources", Journal of Political Economy, vol. 39, 137-175.

[9] Koopmans, T.C. (1957), "Water storage policy in a simplified hydroelectric system", Proceedings of the First International Conference in Operational Research, p. 1-35, et Cowles Foundation Papers n°115.

[10] Munoz-Hernandez, G.A., S.P Mansoor and D.I Jones (2013) "Modelling and controlling hydropower plants", Springer.

[11] Niu, S. and M. Insley (2013), "On the economics of ramping rate restrictions at hydro power plants: Balancing profitability and environmental costs", Energy Economics 39, 39-52, September.

[12] RTE (2017), "Panorama de l'électricité renouvelable au 30 juin 2017", Réseau de Transport d'Electricité, septembre, http://www.rte-france.com/sites/default/files/panorama_enr20170630.pdf

[13] U.S D.I (2012), "Advanced algorithms for hydropower optimization", US Department of Interior, Buraeu of Reclamation, Technical Service Center, Technical report S&T-2011-486.

[14] U.S D.I (2013), "Phase 2. Advanced algorithms for hydropower optimization", US Department of Interior, Buraeu of Reclamation, Technical Service Center, Technical report S&T-2013-3906.

[15] Wagner, H.-J. and J. Mathur (2011) "Introduction to hydro energy systems. Basics, technology and operation", Springer.