monographies
du
séminaire
d'économétrie

13

J. J. LAFFONT

EFFETS EXTERNES
ET
THÉORIE ÉCONOMIQUE

éditions du cnrs

MONOGRAPHIES
DU
SÉMINAIRE D'ÉCONOMÉTRIE

publiées sous la direction de René ROY † et Edmond MALINVAUD

XIII

EFFETS EXTERNES ET THÉORIE ÉCONOMIQUE

PAR

Jean-Jacques LAFFONT

ÉDITIONS DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
15, quai Anatole-France – 75700 PARIS
1977

MONOGRAPHIES
DU
SÉMINAIRE D'ÉCONOMÉTRIE
publiées sous la direction de René ROY † et Edmond MALINVAUD

XIII

EFFETS EXTERNES ET THÉORIE ÉCONOMIQUE

PAR
Jean-Jacques LAFFONT

ÉDITIONS DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
15, quai Anatole-France – 75700 PARIS
1977

© Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1977
ISBN 2-222-02106-5

PRÉFACE

Cette monographie rassemble neuf études sur l'introduction des effets externes dans la théorie économique, qui n'ont aucune prétention à l'exhaustivité. Toutefois, les hasards de ma curiosité m'ont conduit à aborder une grande plage du champ de la théorie microéconomique traditionnelle ; aussi, cet ensemble d'essais propose-t-il un panorama assez complet des diverses difficultés posées par les effets externes à la théorie économique.

Dans le premier Chapitre, nous présentons un bref historique de l'étude des effets externes qui permet de situer les différents chapitres de la monographie dans l'effort théorique contemporain. Dans le Chapitre II, nous démontrons l'existence d'un équilibre concurrentiel avec effets externes destiné à décrire le comportement d'une économie décentralisée avec effets externes. Cette notion d'équilibre est aussi utilisée pour formaliser certaines idées de Marshall sur les rendements croissants. Au vu de la non-Pareto optimalité de ces équilibres concurrentiels, nous étudions dans le Chapitre III les diverses possibilités de décentralisation des optima parétiens dans des économies avec effets externes très généraux. Les exigences de ces décentralisations, en termes d'information et d'outils de politique économique, nous conduisent à discuter dans le Chapitre IV les diverses approches de second rang qui ont été proposées. Les résultats obtenus dans cette direction sont encore fort limités. Le Chapitre V présente certaines difficultés posées par les externalités à l'approche théorie des jeux des mécanismes de l'échange. Le Chapitre VI propose des méthodes de planification, ou plus modestement, des procédures d'échange d'information entre un Centre et des agents économiques qui permettent d'approcher une allocation des ressources Pareto optimale. Le Chapitre VII explore l'utilisation dans une économie avec effets externes d'une notion de justice qui ne nécessite pas de comparaisons interpersonnelles d'utilité. La question de l'évaluation des effets externes à concernement collectif dans une économie avec incertitude et sans un système complet de marchés contingents fait l'objet du Chapitre VIII. Des mécanismes qui permettent *dans le cas particulier des fonctions d'utilité séparables de découvrir les vraies préférences pour les effets externes sont étudiés en détail au Chapitre IX. Enfin, une annexe rassemble les énoncés précis des principaux théorèmes mathématiques utilisés.*

Je n'ai pas cherché à fondre dans un texte global les contributions des divers chapitres, tout en recherchant cependant une certaine homogénéité des notations. Ceci a l'inconvénient de conduire à des nombreuses redites mais a l'avantage de permettre une lecture indépendante des différents chapitres.

Je n'ai pas toujours commenté en détail les résultats présentés et je n'en ai pas tiré toutes les conséquences pour la recherche théorique ou pour la politique économique. J'espère que le texte sera suffisamment stimulant pour amener le lecteur à imaginer lui-même les implications de certains résultats et les extensions possibles, sans compter les nombreuses erreurs qu'il devra sans doute corriger. Sur de nombreuses questions les problèmes n'ont guère été que posés et beaucoup reste à faire pour parvenir à une compréhension satisfaisante.

J'ai bénéficié pour certains chapitres de la coopération directe de plusieurs économistes et amis que je tiens a remercier ici chaleureusement. Le Chapitre II doit certainement l'essentiel de ses qualités à Guy Laroque, administrateur à l'INSEE. J'ai utilisé pour le Chapitre VI les compétences du spécialiste de l'analyse numérique qu'est Patrick Saint-Pierre de l'Université Dauphine. Enfin, le Chapitre IX est un sous-produit d'un travail avec Jerry Green de Harvard University qui est consacré uniquement au problème de la révélation des préférences.

En plus de l'aide considérable mentionnée ci-dessus, j'ai bénéficié de nombreuses discussions et encouragements que je ne peux citer ici.

Je tiens toutefois à exprimer à Messieurs les Professeurs J.P. Aubin, C. Fourgeaud, H. Guitton, Cl. Henry et E. Malinvaud, ma reconnaissance pour la confiance qu'ils m'ont accordée et pour le soutien moral et intellectuel qu'ils m'ont apporté soit directement, soit par l'exemple de leurs travaux.

Enfin, je remercie Mme Alves de Souza qui a tapé avec beaucoup de savoir-faire et une constante bonne humeur le texte de cet ouvrage.

SOMMAIRE

Pages

CHAPITRE PREMIER [1]

BREF HISTORIQUE

1. INTRODUCTION

L'importance croissante des interdépendances hors marchés dans les économies contemporaines ne permet plus de les négliger dans quelque aspect de la politique économique que ce soit. Or, les effets externes posent des problèmes théoriques complexes qu'il est important de bien maîtriser avant de se hasarder dans des politiques correctrices toujours coûteuses en termes d'information et de mise en œuvre.

L'objectif de ce chapitre est de fournir une perspective historique qui permette de suivre l'émergence et l'évolution des concepts associés aux phénomènes d'interdépendances hors marchés, avant de faire le point sur la théorie la plus récente pour situer les différents chapitres du livre dans l'effort théorique contemporain.

Dans la deuxième section, nous montrons comment le concept d'externalité apparu clairement chez quelques précurseurs a dû se dégager de la confuse controverse des «boîtes vides». La troisième section concrétise la classification des concepts en dégageant deux voies de recherches, l'une associée aux économies externes pécuniaires, l'autre aux effets externes technologiques. La quatrième section développe les critiques, par Coase et ses successeurs, de la politique économique pigouvienne. Enfin, dans une dernière section, nous rassemblons les résultats importants des derniers travaux sur le sujet.

---

(1) Ce chapitre est basé sur «Note Historique sur les Effets Externes», *l'Actualité Economique*, Montréal, 1975.

2. DE LA NAISSANCE DU CONCEPT A LA CONTROVERSE DES «BOITES VIDES»

H. Sidgwick semble être le premier à avoir pris conscience des problèmes posés par les effets externes dans une économie décentralisée. Dans le chapitre II du livre III (1887, p. 402), il examine dans quelle mesure «même dans une société constituée uniquement ou principalement d'«homo economicus» le système de la liberté naturelle peut ne pas avoir tendance à réaliser les résultats bénéfiques qu'on lui attribue». Entre autres raisons (monopoles. . .), il comprend (1887, p. 607) «qu'il existe des utilités qui, par leur nature, ne peuvent pas pratiquement être appropriées par ceux qui les produisent. . .». Il propose comme illustration les effets bénéfiques d'une forêt sur le régime des pluies (exemple repris par Pigou et Meade) et d'autres exemples concernant les biens publics. A cause de ces «divergences entre intérêt privé et intérêt public» il préconise l'intervention de l'Etat sans être très précis sur les modalités.

L'oeuvre de Sidgwick semble avoir directement inspiré Pigou. Avant d'aborder l'apport de Pigou, il faut parler des travaux de A. Marshall qui a introduit les expressions d'économies internes et externes dans un contexte qui a fortement influencé l'évolution des idées. En effet, son approche l'a conduit à des confusions qui furent longues à dissiper.

Ecoutons A. Marshall (1961, p. 262) :

> «Si nous étudions de plus près les économies nées d'un accroissement de l'échelle de la production, nous trouvons qu'elles se répartissent en deux catégories : celles qui dépendent du développement général de l'industrie (économies externes), celles qui dépendent des ressources des entreprises indivuelles et de l'efficacité de leur gestion (économies internes)».

Son analyse qui mêle courte et longue périodes, équilibre partiel et équilibre général est peu rigoureuse, mais elle met néanmoins en lumière le caractère positif des groupements et de l'interdépendance des agents économiques. L'utilisation de la courbe de prix d'offre l'empêche de faire la distinction entre les économies provenant de mouvements de prix et les économies technologiques. Ses nombreux exemples se réfèrent le plus souvent aux économies d'échelle (abaissement de certains coûts fixes et possibilité de création d'activités qui nécessitent un seuil minimum de volume d'affaires) plutôt qu'aux interdépendances techniques entre les agents bien que dans son esprit les deux sortes de concepts soient présents. S'il parle

essentiellement de l'aspect positif des externalités, quelques remarques montrent qu'il est très conscient du problème théorique des déséconomies ; cependant, comme à son époque ce n'est pas tellement un problème de fait, Marshall l'écarte généralement (1961, p. 267).

> «Il faut sans aucun doute déduire (des avantages) les difficultés croissantes à trouver solitude, calme et même air pur ; mais il y a dans la plupart des cas «some balance of good»».

Marshall croit avoir apporté, à l'aide des effets externes, une réponse au problème de la compatibilité entre concurrence parfaite et rendements croissants(2). La polémique qui se développera par la suite s'attachera à détruire ce but sans percevoir l'intérêt des concepts introduits par Marshall.

A côté de cette présentation dynamique, Pigou a défini (1960, 2^e partie, chapitre IX) très clairement le concept d'effet externe statique. Il n'utilise pas le terme d'économie externe qu'il réserve à l'approche «croissance» de Marshall (1961, 2^e partie, chapitre XI, *Increasing Supply Prices*). Le cadre utilisé est celui de la théorie statique de l'optimum. La réalisation de l'optimum exige l'égalité des produits marginaux sociaux nets(3) alors que les intérêts privés ne réalisent que l'égalité des produits marginaux privés nets. Toute cause de divergence de ces produits marginaux sociaux et privés éloigne de l'optimum. Les «effets externes statiques» sont l'une de ces causes qu'il examine.

> «Ici (la 2^e cause), le point essentiel est qu'une personne A en rendant un service rémunéré à une autre personne B rend incidemment des services ou crée des dommages à d'autres personnes (non productrices de tels biens) tels que des paiements ne peuvent être réclamés aux bénéficiaires ou des compensations demandées par les parties lésées».

Il donne ensuite une série d'exemples tels l'implantation de forêts, la lumière à la porte d'une maison qui éclaire la rue, le dispositif antifumée, la recherche ou la construction d'une usine dans un quartier résidentiel.

Pigou propose alors une solution (1960, p. 192) :

> «Il est possible pour l'Etat, s'il le veut, d'éliminer les divergences par des «encouragements extraordinaires» ou des «contraintes extraordinaires». . . Les formes les plus évidentes d'encouragements et de contraintes que l'on peut imaginer sont les subventions et les impôts».

---

(2) Voir Chipman (1970) et Ch. II pour une interprétation possible et une présentation rigoureuse de ce résultat.

(3) Pour une définition, écoutons Pigou (1960, p. 134) : «Le produit marginal social net est le produit total net de biens physiques ou de services objectifs dû à un accroissement marginal de ressources. . .».

Il tire de la vie économique des illustrations de telles subventions. Il ajoute (1960, p. 194) :

> «Parfois, lorsque les liaisons entre les différentes personnes concernées sont très complexes, le gouvernement peut trouver nécessaire d'exercer certains contrôles autoritaires en sus des subventions qu'il accorde».

Le chapitre IX de *Economics of Welfare* a été à l'origine d'une «tradition pigouvienne» qui a souvent débordé le cadre défini par Pigou ; remarquons, en particulier, qu'il se place dans les conditions de la concurrence parfaite lorsqu'il propose sa solution.

Clapham (1922) entame alors la controverse des «boîtes vides». Les concepts (boîtes) d'industries à rendements croissants, constants ou décroissants utilisés par Marshall et Pigou ne recouvrent, d'après lui, aucune réalité. De plus, même s'il était possible d'identifier ces industries ce serait inutile. La réponse de Pigou (1922) est vigoureuse ; certes, il est difficile de déterminer statistiquement quelles industries ont des rendements décroissants, constants ou croissants, mais l'effort des théoriciens et des praticiens permettra certainement d'y parvenir bientôt. Si c'est impossible, l'utilité de ces concepts sera de mettre en évidence le dogmatisme de nombreuses mesures de politique économique qui implicitement font de telles hypothèses. Nous n'insisterons pas ici sur les détails souvent confus de cette grande controverse à laquelle participent aussi Young, Robertson, Knight, Robinson, Sraffa, Kahn. Elle aboutit, enfin, avec Viner (1931) à l'aide de sa distinction fondamentale entre économies et déséconomies pécuniaires ou technologiques intimement liées dans la pensée de Marshall. On peut alors faire le point de la théorie.

Les effets externes statiques exposés par Pigou sont technologiques ; ce sont les seuls à avoir une signification pour la théorie du bien-être ; cependant, ils sont peu importants. Les autres économies ou déséconomies externes liées aux rendements croissants ou décroissants sont pécuniaires, c'est-à-dire passent par l'intermédiaire des prix de marché et révèlent seulement la nécessité d'une analyse d'équilibre général.

3. LA CLARIFICATION DES CONCEPTS

Les conclusions tirées de la controverse des «boîtes vides» ont conduit à un désintéressement du sujet des effets externes. En 1943, Ellis et Fellner publient un article qui reprend les analyses de Pigou, Young, Sraffa, évoquées ci-dessus. Leur étude des déséconomies externes ne concerne pas les «déséconomies authentiques qui proviennent de phénomènes tels que la nuisance de la fumée, le gaspillage des ressources naturelles. . .», c'est-à-dire les déséconomies externes technologiques. Lorsqu'ils parlent d'économies externes, sans être convaincus de l'intérêt du sujet («si les économies externes existent»), ils confondent économies pécuniaires et technologiques. Ils font néanmoins une distinction importante qui n'a pas été, à notre avis, suffisamment exploitée entre les économies externes «réversibles» qui «apparaissent avec un accroissement de l'output mais disparaissent lorsque par la suite l'output diminue» et les économies externes «irréversibles». Ces dernières nécessitent une théorie dynamique qui n'est pas faite et qui devrait en particulier justifier en avenir incertain des mesures de politique économique injustifiables dans une théorie statique.

A la même époque, dans leurs études sur l'industrialisation des pays sous-développés, Rosenstein-Rodan, Nurske, Hirschman, Chenery font un grand usage du concept d'économie externe pécuniaire et retrouvent certaines des idées de Marshall sur l'intérêt des externalités dans le processus de croissance. L'importance de ce secteur de l'analyse économique s'est révélée de premier ordre (problème de l'incitation à investir, des pôles de croissance. . .) mais peu à peu les économistes se sont rendus compte qu'il repose sur les mécanismes classiques des marchés et des prix et ne nécessite pas de concept spécifique. L'article de Scitovsky (1954) a le mérite de clarifier une nouvelle fois la distinction entre les deux types d'effets externes (pécuniaires ou technologiques). L'inutilité de l'introduction du concept d'effet externe pécuniaire sera même par la suite reconnue par Scitovsky dans une correspondance privée avec Mishan (4). Désormais, *par effet externe, il sera entendu,* effet externe technologique, c'est-à-dire, *tout effet indirect d'une activité de production ou d'une activité de consommation sur une fonction d'utilité, un ensemble de consommation ou*

---

(4) Inspirés par Arrow [voir note de bas de page n° 16 dans l'article de Scitovsky (1954)], W. Heller et D. Starrett (1974) ont fait une tentative pour sauver le concept d'effet externe pécuniaire. Il peut exister une interdépendance non technologique entre les agents qui ne passe pas par les prix en l'absence de marchés futurs.

une fonction de production. [5]

Meade (1952) a été le premier à prendre nettement conscience de ce clivage définitif et à étudier les effets externes technologiques en tant que tels. Son article marque le début de la théorie moderne des effets externes. Nous allons l'analyser en quelque détail.

Meade se place dans un cadre de concurrence parfaite et examine les effets externes de production marginaux au sens où «nous serons concernés seulement par de petits ajustements par rapport à des structures concurrentielles existantes» (1952, p. 185). Cette méthode d'analyse partielle sera critiquée à la section 4. Il formalise l'effet externe en introduisant dans la fonction de production d'une entreprise l'activité de production d'une autre entreprise représentée par un output ou un input ou même par l'ensemble du vecteur de production. L'objet essentiel de son article est alors de distinguer deux sortes d'effets externes, les facteurs non payés et les «créations d'atmosphère».

Le premier type est illustré par l'exemple de l'apiculteur et du verger ; les abeilles fournissent le service de fécondation des fleurs au propriétaire des arbres fruitiers qui, de son côté, fournit du suc à l'apiculteur. Il s'agit d'économies externes réciproques. D'après Meade, la caractéristique des facteurs non payés est l'existence de rendements d'échelle constants pour la société dans son ensemble et non-croissants pour les industries individuelles. Certains facteurs ne sont pas rémunérés à leur productivité marginale sociale. Pour y remédier, il suffit de créer des institutions adéquates qui permettent l'appropriation des effets externes ; il est alors possible de rémunérer les facteurs à leur productivité marginale sociale puisqu'il y a rendements constants au niveau global.

Le deuxième type d'effets externes est la «création d'atmosphère» tel le reboisement d'un terrain qui modifie le régime des pluies sur l'ensemble des terres voisines. Il y a, d'après Meade, rendements constants pour les entreprises individuelles et rendements croissants pour l'économie dans son ensemble. Ceci exclut la rémunération selon la productivité marginale sociale s'il n'y a pas d'apport extérieur.

En fait, il nous semble que la distinction intéressante de Meade est celle entre effets externes à destruction par l'usage et effets externes sans

(5) Nous avons voulu consacrer cette étude aux effets externes proprement dits et nous avons exclu de notre analyse les biens publics en insistant sur le caractère indirect des effets externes. Toutefois, bien que la théorie des biens publics soit sensiblement différente de la théorie des effets externes (en particulier la théorie positive), un grand nombre de résultats de cet ouvrage peuvent s'interpréter en termes de biens publics (voir en particulier J.C. Milleron (1972)).

destruction par l'usage qui posent des problèmes différents pour la politique économique. Nous en voulons pour preuve l'énoncé suivant (1952, p. 192) :

> «Un facteur de production et une «atmosphère» sont des conditions qui affectent l'output d'une certaine industrie. Mais l'atmosphère est une condition fixe de production qui reste inchangée pour tous les producteurs de l'industrie en question... quelle que soit l'échelle de la production de cette industrie. D'autre part, le facteur de production est une aide à la production d'un montant fixe disponible en quantités moindres pour chaque producteur de l'industrie lorsque le nombre de producteurs croît...».

On peut rattacher à cette partie la contribution plus tardive de Buchanan et Stubblebine (1963) qui cherchent à préciser la terminologie dans le cas d'un seul effet externe. Leur apport nous semble être de remarquer qu'à l'optimum il peut subsister des effets externes et de proposer la définition d'effet externe infra-marginal quand l'effet marginal d'un accroissement de l'effet externe est nul. Ils ajoutent que l'existence d'effets externes ne justifie pas en soi une intervention quelconque qui serait inopportune dans le cas infra-marginal.

A ce stade, la théorie se place donc dans une situation de concurrence parfaite et propose généralement comme solution la taxation empruntée à la tradition pigouvienne. Une certaine clarté dans l'analyse du concept d'effet externe technologique a été obtenue ; le débat va maintenant se déplacer sur le problème de la solution qu'un courant d'économistes va remettre en question.

4. UNE NOUVELLE APPROCHE

Dans *Economics of Welfare,* Pigou a tracé les grandes lignes de l'intervention de l'Etat pour atteindre l'optimum en présence d'effets externes. Il l'a fait sans grande rigueur ; aussi il s'est développé une tradition pigouvienne essentiellement orale qui précise les remèdes à apporter aux externalités par subvention et taxation. La pensée de Pigou, peu explicite il est vrai, semble beaucoup plus nuancée que la tradition pigouvienne.

Pigou dit seulement qu'il faut imposer l'émetteur de déséconomie externe et subventionner l'émetteur d'économie externe pour réaliser l'égalité des coûts et recettes marginaux sociaux, c'est-à-dire pour que soient réalisées les conditions du premier ordre de l'optimum. Il précise qu'il se place dans un cadre d'hypothèses qui assure la suffisance de ces conditions (en particulier unicité du maximum). Il semble que dans son esprit l'Etat doive financer les subventions et percevoir les impôts ; on conçoit donc qu'il puisse y avoir un problème de financement global (cf. Meade (1952)). Il ne fait pas de lien entre celui qui émet et celui qui reçoit l'effet externe.

La politique économique inspirée de *Economics of Welfare* a été l'objet d'une attaque vigoureuse et originale par Coase (1960) qui a été à l'origine d'une nouvelle approche des effets externes.

> «Je soutiens que les types d'action suggérés sont inappropriés car ils conduisent à des résultats qui ne sont pas nécessairement, et même habituellement désirables» Coase (1960. p. 2).

Il met d'abord en évidence la nature réciproque du problème et explique le point important suivant : la situation de référence par rapport à laquelle une politique corrective doit être envisagée n'est pas forcément la position zéro. Nous pouvons essayer de clarifier ceci par un exemple. Considérons une entreprise bruyante qui s'installe dans un désert ; un autre agent s'établit à côté d'elle et subit des pertes dues au bruit. Il ne semble pas à Coase que l'entreprise bruyante ait à payer un impôt. En effet, la solution de référence, définie par des droits, peut n'être pas une absence d'activité. On peut estimer en l'occurence que c'est plutôt à l'agent qui arrive de payer pour obtenir une diminution de l'externalité. On rejoint alors une deuxième idée de Coase selon laquelle le problème ne doit pas seulement être examiné à la marge mais aussi globalement. En effet, ici, la solution est que l'entreprise nouvelle s'installe dans un autre endroit isolé du désert si les pertes qu'elle subit sont supérieures aux bénéfices qu'elle retire de la proximité de la première entreprise et si le coût d'élimination totale ou partielle du bruit est supérieur aux pertes qu'elle subit.

A notre avis, la deuxième critique de Coase est tout à fait justifiée bien que l'utilisation sous-jacente du critère du surplus doive être prudente. Cependant, lorsqu'un raisonnement marginal est suffisant (absence de non-convexités), le problème de la situation de référence est seulement un problème de répartition des revenus et non d'allocation optimale des ressources. L'existence de procédés de purification introduit souvent des non-convexités(6). Coase donne l'exemple suivant : une entreprise cause des déséconomies d'une valeur de 100 dollars. Pour y remédier, elle peut

(6) Voir Bohm (1970) pour une analyse de certains problèmes posés par les possibilités ae purification.

installer un dispositif qui coûte 90 dollars, alors qu'avec 40 dollars, les consommateurs qui subissent l'effet externe peuvent s'en débarrasser. Coase en conclut qu'il ne faut pas taxer l'entreprise si on veut obtenir l'optimum.

Il apparaît donc que le principe «le pollueur sera le payeur» issu de la tradition pigouvienne peut ne pas conduire à un optimum de production. (Notons que Coase interprète la tradition pigouvienne en disant que l'émetteur d'externalité négative doit payer un impôt égal aux dommages créés ; voir la différence avec l'interprétation donnée ci-dessus). Coase propose alors que l'Etat détermine des droits communs concernant les responsabilités des externalités qui pourront être remis en question par des négociations entre parties. Ces négociations permettront d'atteindre une valeur maximale de la production (cf. exemple ci-dessus). Cependant, lorsqu'elles sont coûteuses, il peut être préférable que l'Etat impose une solution. Coase émet des doutes sur la valeur d'une intervention gouvernementale souvent souhaitée par les économistes et qui est en général très coûteuse. Parfois mieux vaut le laissez-faire.

En résumé, le juriste Coase par une approche très concrète introduit de nombreux problèmes nouveaux (possibilités de purification, coûts de mise en œuvre, analyse non marginaliste nécessitée par l'existence de plusieurs maxima) qui modifient les résultats de l'analyse classique. En fait, il introduit dans le modèle classique des phénomènes exclus par hypothèse. Aussi ses critiques n'ont pas toujours la valeur de son apport.

Davis et Whinston (1966) abordent le problème sous la forme de deux entreprises aux externalités réciproques, c'est-à-dire encore une fois dans un cadre d'analyse partielle. Ils mettent l'accent sur le rôle des fusions, entendues comme négociations ayant abouti à une maximation jointe des profits qui internalisent une part importante des effets externes. Ils ont conscience de l'impossibilité de résoudre le problème en multipliant le nombre d'agents.

> «les problèmes d'externalités comprennent de nombreux aspects des problèmes de duopole. . . ; ces problèmes restent inchangés si le nombre d'entreprise considérées croît.»

(On retrouve ceci du point de vue théorique dans l'impossibilité d'obtenir des théorèmes limites généraux et intéressants). Leur distinction entre séparabilité (coût marginal d'une entreprise indépendant des activités des autres) et non-séparabilité ne nous semble pas très intéressante ; néanmoins, elle leur permet de poser le problème de l'interdépendance qu'une approche non-coopérative peut permettre de décrire. Leur façon de poser le problème fait penser à une autre modélisation pour tenir compte de l'incertitude créée par la méconnaissance des activités des autres, qui serait un équilibre temporaire avec incertitude sur les outputs.

Buchanan et Stubblebine (1962) reprennent dans la deuxième partie de leur article l'argumentation de Coase. L'ensemble de ces articles est résumé par Turvey (1963) qui fournit une synthèse des vues de cette nouvelle ligne de pensée : ensemble de critiques portant sur la difficulté et le coût de la solution d'imposition ; si à la solution de la taxe s'ajoute une négociation, la solution obtenue n'est pas optimale (voir également sur ce point l'exposé de Pearce et Sturmey (1967)) ; la taxe doit être fonction de l'effet externe réellement émis et pas seulement d'un paramètre lié à l'effet externe ; intérêt de la solution de négociation ; pour des effets externes à concernement public, il faut en général une solution collective qui risque d'être très coûteuse d'où l'orientation vers des solutions de second rang obtenues par réglementation étatique.

A son tour, la solution de négociation a été critiquée en particulier par Wellisz (1964) dont les arguments essentiels sont les suivants : lorsque la négociation prend place les agents ne se conduisent plus comme en situation de concurrence parfaite ; des menaces apparaissent et peut-être des créations artificielles d'effets externes négatifs. La négociation semble particulièrement difficile dans le cas non séparable et lorsque les agents sont nombreux (cf. Turvey), et lui apparaît donc ne pouvoir être qu'exceptionnelle.

5. LE POINT DE LA THEORIE

Les nombreux travaux suscités au cours de la dernière décennie par une prise de conscience collective de l'importance des effets externes technologiques ont considérablement clarifié la théorie économique des effets externes, si ce n'est encore le débat public sur la question. Nous avons assemblé ci-après les résultats essentiels.

a) La création de marchés artificiels de droits pour les externalités (cf. Arrow (1969)) se heurte à de nombreux problèmes dans une économie décentralisée. Il existe tout d'abord des non-convexités fondamentales (voir Starrett (1972) et Ch. II-III) dans le cas des effets externes négatifs qui rendent le fonctionnement de ces marchés impossible. Intuitivement, s'il existe un prix positif pour une externalité négative, le producteur qui la subit voudra en absorber une quantité infinie et arrêter sa production ce qui lui assure un profit infini. Il ne peut donc exister d'équilibre avec un prix positif pour l'externalité. Dans le cas des consommateurs cette difficulté n'apparaît pas puisque la désutilité due à l'externalité croît avec celle-ci, à moins que le consommateur puisse y échapper (par exemple en ne se baignant pas si l'eau est polluée). Si l'on ignore ce problème, il est illusoire de penser que les agents économiques vont avoir un comportement concurrentiel sur ces marchés bilatéraux. Enfin, si ces marchés n'ont pas encore été créés, c'est peut-être souvent parce que les coûts de transaction qu'ils impliquent excèdent les bénéfices qu'ils rapportent (cf. Heller-Starrett (1974)). Il reste que dans certains cas particuliers d'externalités d'atmosphère, la création de marchés de droits animés par des agences gouvernementales peut conduire à une allocation efficace des niveaux de pollution optimaux.

b) La solution optimale de taxation-subvention (solution pigouvienne) qui nécessite un système très complexe de taxes indirectes personnalisées, de taxes forfaitaires (lump-sum taxes) et un comportement concurrentiel (voir Starrett (1972) et Ch. III) est de façon très générale (conditions de convexité) une condition de premier rang dont l'utilité théorique est de permettre une classification des situations déviantes. Les exemples suivants sont tous des cas où l'une des hypothèses ci-dessus est non-satisfaite. Il faut donc les traiter comme des problèmes de second rang (voir Ch. IV).

i) Buchanan (1969) a donné un exemple dans lequel la solution pigouvienne peut conduire à une situation moins favorable que le laissez-faire si l'agent économique concerné est un monopole. En effet, le monopole conduit à une contraction de l'output par rapport à l'allocation concurrentielle. Dans le cas d'un effet externe négatif, une taxe pigouvienne contracte encore l'output, alors que la contraction due au comportement monopolistique pouvait être proche de la situation optimale.

ii) La nécessité de taxer la bonne variable a été soulignée par Plott (1966) et ceci peut être impossible si certaines variables d'activité ne sont pas observables.

iii) On peut être contraint d'utiliser des taxes uniformes (non personnalisées), Diamond (1973), ce qui peut conduire à des solutions de second rang surprenantes comme la taxation de biens complémentaires ou substituts et non la taxation du bien directement lié à l'effet externe (Green-Sheshinski (1974)).

iv) Lorsque dans l'économie concernée il existe déjà un système de taxes, la taxation optimale n'est pas pigouvienne (Sandmo (1975)).

c) L'approche "théorie des jeux" du problème des effets externes initiée par Shapley et Shubik, n'a pas encore abouti à des résultats bien satisfaisants. Lorsque les effets externes sont positifs, le cœur est en général non vide (Shapley-Shubik (1969), Ch. V, Rosenthal (1971)). Cependant, il est difficile de définir le cœur (ensemble des imputations qui ne sont bloquées par aucune coalition), car ce que peut réaliser une coalition dépend du comportement du complémentaire de la coalition et toute hypothèse sur ce comportement conduit à un cœur particulier. Diverses tentatives pour rationaliser ce choix n'ont pas encore donné de résultats intéressants. Quand les effets externes sont négatifs, il peut être vide et on ne sait pas caractériser les économies pour lesquelles il est non vide si ce n'est dans le cas particulier d'effets externes impersonnels dans une économie d'échange sans libre disposition (Starrett (1973)).

d) Les problèmes posés par les effets externes à la planification centralisée de l'économie ont été abordés dans quelques études, qui ont proposé des mécanismes d'échange d'information permettant d'atteindre un optimum de Pareto (Davis et Whinston (1966), Aoki (1971), Ch. VI). Cependant, la question cruciale des motivations des agents économiques est ignorée. Groves (1974) a récemment fait une contribution importante sur ce difficile problème. Il a appliqué au cas des effets externes à concernement collectif un mécanisme qu'il avait mis au point pour conduire les agents économiques à révéler leurs préférences pour les biens publics. Il s'agit, par un choix approprié de transferts monétaires, de faire coïncider l'intérêt privé des agents économiques avec la révélation de leurs vraies préférences ou technologies, c'est-à-dire, ici, la révélation des vrais impacts des externalités (voir Ch. IX).

e) Diamond-Mirrlees (1973) ont fourni un début de caractérisation des économies dans lesquelles, en l'absence d'effets revenus, les allocations des équilibres concurrentiels non coopératifs(7) représentent un excédent (déficit) par rapport aux optima de Pareto des biens produisant des effets externes négatifs (positifs). Buchanan et Kafoglis (1963) avaient en effet fourni un exemple où les résultats contraires (peu intuitifs) apparaissent.

f) Notons le travail de Ayres et Kneese (1969) qui ont introduit une approche plus concrète des problèmes d'externalités. Ils voient la

(7) Dans un équilibre concurrentiel non-coopératif, chaque agent maxime son utilité (ou son profit) en considérant les prix et les actions des autres comme fixés. Voir Arrow-Hahn (1971, chap. 6), Ch. II pour des démonstrations d'existence de ces équilibres non-coopératifs.

pollution de l'environnement comme un problème de balance matière entre ce qui entre dans les processus de production (de l'économie tout entière) et ce qui en sort. Après avoir noté que l'offre de dépollution de la nature (que l'on peut interpréter à l'aide d'une fonction de production de la nature) est nécessairement limitée, que les possibilités de modification de cette fonction de production (possibilités de purification) nécessitent un cadre théorique plus vaste que la théorique statique de l'optimum, ils élaborent un modèle de Leontief généralisé qui prend en compte les externalités. En plus de la prise de conscience qu'il s'agit bien d'un problème d'équilibre général, ce travail montre la nécessité de la construction de statistiques d'externalités si l'on entend élaborer une politique économique valable.

g) La nécessité de raisonner dans un cadre intertemporel pour traiter les problèmes importants que constituent le gaspillage des ressources naturelles, l'accumulation des déchets de toutes sortes, l'irréversibilité de certains effets externes, a conduit à la multiplication rapide de modèles de croissance incorporant des externalités. Malgré la multiplication des modèles, à notre connaissance, les résultats de ces études ne sont pas encore très éclairants. Un output possible de cette approche pourrait être, avec l'introduction d'un avenir incertain, la justification théorique des solutions maximin qui conduisent à des politiques de second rang (quotas de pollution, par exemple) peu justifiables dans les modèles actuels.

CHAPITRE II

ÉQUILIBRE CONCURRENTIEL (1)

1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous construisons un modèle qui fournit une description cohérente du fonctionnement d'une économie décentralisée avec effets externes, dans laquelle les agents économiques maximent leurs fonctions objectifs en considérant l'environnement et les prix comme fixés. Ce modèle est une idéalisation qui nous permet d'analyser une économie de marchés livrée à elle-même, dans laquelle toutes sortes d'effets externes sont présents. De plus, il est un point de départ remarquablement clair pour l'étude des politiques économiques destinées à remédier aux inconvénients de l'excessive décentralisation des comportements économiques en économie de marchés.

La section 2 est consacrée à la présentation détaillée de l'économie que nous étudions. La démonstration de l'existence d'un équilibre concurrentiel avec effets externes fait l'objet de la section 3. Les exemples présentés dans la section 4 permettent de comprendre le rôle joué par les diverses hypothèses. La relation entre la production d'équilibre et la production optimale est discutée aux sections 5 et 6. Enfin, le modèle de ce chapitre est utilisé pour donner une interprétation statique des idées de Marshall sur la compatibilité entre rendements croissants et concurrence parfaite.

---

(1) Ce chapitre est basé sur un article joint avec Guy Laroque : "Effets Externes et Théorie de l'Equilibre Général", *Cahiers du Séminaire d'Econométrie n° 14, C.N.R.S.*, 1972.

2. DESCRIPTION DE L'ECONOMIE AVEC EFFETS EXTERNES

Nous considérons une économie qui comporte L biens privés (indicés par $\ell = (1, \ldots, L)$, J producteurs (indicés par $j = 1, \ldots, J$) et I consommateurs (indicés par $i = 1, \ldots, I$).

A) Producteurs

L'activité du producteur j est représentée par un vecteur y^j de l'espace des biens $\mathbf{R}^L$ dont les composantes positives sont des outputs et les composantes négatives des inputs. De même, l'activité du consommateur i est représentée par un vecteur x^i de $\mathbf{R}^L$ dont les composantes positives sont des consommations et les composantes négatives des outputs comme le travail.

L'ensemble de production Y^j du producteur j dépend, par l'intermédiaire des effets externes, des décisions prises par les autres agents économiques, c'est-à-dire les autres producteurs et les consommateurs. Soit $\bar{y}^j$ le vecteur de $\mathbf{R}^{L(J-1)}$ défini par $\bar{y}^j = (y^1, \ldots, y^{j-1}, y^{j+1}, \ldots, y^J)$ et soit x le vecteur de $\mathbf{R}^{LI}$ défini par $x = (x^1, \ldots, x^I)$.

Nous avons besoin tout d'abord d'une hypothèse technologique qui assurera la "continuité" du comportement des producteurs.

Hypothèse 1 : La correspondance de production du producteur j, $Y^j(\bar{y}^j, x)$ est une correspondance semi-continue inférieurement à valeurs convexes et à graphe fermé de $\mathbf{R}^{L(I+J-1)}$ dans $\mathbf{R}^L$; de plus

$$\forall (\bar{y}^j, x) \in \mathbf{R}^{L(I+J-1)} \quad , \quad 0 \in Y^j(\bar{y}^j, x)$$

En termes économiques, cette hypothèse assure essentiellement que, pour chaque valeur de son environnement $(\bar{y}^j, x)$, l'ensemble de production du producteur j est à rendements décroissants ou constants. De plus, l'inaction lui est possible, quel que soit cet environnement.

Le comportement des producteurs est paramétrique ou non coopératif au sens précis suivant :

Hypothèse 2 : Le producteur j maxime son profit dans son ensemble de production en considérant son environnement et les prix comme fixés (les astérisques désignent les variables que l'agent considère comme fixées) ; son programme d'optimation s'écrit :

$$\text{Max } p^* y^j \quad , \quad y^j \in Y^j(\bar{y}^{*j}, x^*)$$

On appelle programme de production global le vecteur y de $\mathbf{R}^{LJ}$ obtenu par juxtaposition des décisions de production individuelles $y = (y^1, \ldots, y^J)$. Pour chaque environnement de consommation, $x \in \mathbf{R}^{LI}$, l'ensemble des programmes de production possibles constitue un sous-ensemble $Y(x)$ de $\mathbf{R}^{LJ}$ défini par :

$$Y(x) = \{y \mid y^j \in Y^j(\bar{y}^j, x) \ , \ j = 1, \ldots, J\}$$

Il est important d'observer que nous n'exigeons pas que $Y(x)$ soit convexe. Pour assurer l'impossibilité de la production libre et l'irréversibilité de la production asymptotiquement, nous utilisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3 $\quad \forall x \in \mathbf{R}^{LI}$ si $(y^1, \ldots, y^J) \in A\,Y(x)$

$$\text{et} \quad \sum_{j=1}^{J} y^j \geqq 0 \quad \text{alors} \quad y^j = 0 \ , \ j = 1, \ldots, J$$

(la lettre A désigne le cône asymptotique à l'origine).

B) Consommateurs

L'ensemble de consommation X^i du consommateur i dépend, par l'intermédiaire des effets externes, des décisions prises par les autres agents économiques, c'est-à-dire les autres consommateurs et les producteurs. Soit $\bar{x}^i$ le vecteur de $\mathbf{R}^{L(I-1)}$ défini par $\bar{x}^i = (x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^I)$. Soit $w^i \in \mathbf{R}^L$, le vecteur de ressources initiales possédées par le consommateur i et soit α^{ij}, $j = 1, \ldots, J$, ses parts des diverses entreprises (et donc des divers profits) où $\alpha^{ij} \geqslant 0 \ \forall i, j$ et $\sum_{i=1}^{I} \alpha^{ij} = 1$.

Hypothèse 4 : La correspondance ensemble de consommation du consommateur i, $X^i(\bar{x}^i, y)$, est une correspondance semi-continue-inférieurement à valeurs convexes et graphe fermé de $\mathbf{R}^{L(J+I-1)}$ dans $\mathbf{R}^L$; de plus

$$\forall (y, \bar{x}^i) \in \mathbf{R}^{L(J+I-1)} \quad , \quad w^i \in \text{int } X(\bar{x}^i, y)$$

En termes économiques, cette hypothèse assure essentiellement que l'ensemble des vecteurs de consommation possibles est convexe. De plus, le vecteur des ressources initiales n'est pas un minimum vital quel que soit l'environnement.

Chaque consommateur i a un préordre de préférences $\underset{i}{\succsim}$ défini sur le graphe GX^i de sa correspondance ensemble de consommation $X^i(.,.)$. inclus dans $\mathbf{R}^{L(J+1)}$. En plus des effets externes sur les ensembles de consommation, il existe donc des effets externes sur les préférences.

Hypothèse 5 :

a) Les préférences sont continues, c'est-à-dire :

$\forall (x'^i, \bar{x}'^i, y') \in GX^i$, les ensembles

$$\{x^i/x^i \in X^i(\bar{x}'^i, y') \text{ et } (x^i, \bar{x}'^i, y') \underset{i}{\succsim} (x'^i, \bar{x}'^i, y')\} \text{ et}$$

$$\{x^i/x^i \in X^i(\bar{x}'^i, y') \text{ et } (x'^i, \bar{x}'^i, y') \underset{i}{\succsim} (x^i, \bar{x}'^i, y')\}$$

sont fermés.

b) Les préférences (pour les biens privés) sont convexes :

$$\forall (x^i, \bar{x}^i, y) \in GX^i \quad \text{et} \quad \forall (x'^i, \bar{x}^i, y) \in GX^i$$

tels que :

$$(x^i, \bar{x}^i, y) \underset{i}{\succ} (x'^i, \bar{x}^i, y)$$

$$(\lambda x^i + (1-\lambda) x'^i, \bar{x}^i, y) \underset{i}{\succ} (x'^i, \bar{x}^i, y) \quad \forall \lambda \in]0, 1[$$

c) Il y a absence de satiété

$$\forall (x^i, \bar{x}^i, y) \in GX^i, \exists (x'^i, \bar{x}^i, y) \in GX^i$$

tels que :

$$(x'^i, \bar{x}^i, y) \underset{i}{\succ} (x^i, \bar{x}^i, y)$$

De façon analogue à H1, les hypothèses H4 et H5 ont pour but de garantir la «continuité» du comportement des consommateurs. H5 dit essentiellement que, pour chaque valeur de son environnement, les préférences du consommateur i sur les biens privés qu'il consomme doivent être continues, convexes et non satiables.

Notons que l'hypothèse de continuité des préférences H5a assure ici l'existence d'une fonction d'utilité continue u^i définie sur GX^i qui fournit une représentation numérique des préférences.

Le comportement des consommateurs est aussi non coopératif au sens suivant :

Hypothèse 6 : Le consommateur i maxime son utilité dans l'intersection de son ensemble de budget et de son ensemble de consommation, en considérant son environnement et les prix comme fixés ; son programme d'optimation s'écrit :

$$\text{Max } u^i(x^i, \bar{x}^{*i}, y^*)$$

$$p^* x^i \leqq p^* w^i + \sum_{j=1}^{J} \alpha^{ij} p^* y^{*j}$$

$$(x^i, \bar{x}^{*i}, y^*) \in GX^i$$

Pour chaque environnement de production $y \in \mathbf{R}^{LJ}$, l'ensemble des programmes de consommation possibles constitue un sous-ensemble $X(y)$ de $\mathbf{R}^{LI}$ défini par :

$$X(y) = \{(x^1, \ldots, x^I)/x^i \in X^i(\bar{x}^i, y), i = 1, \ldots, I\}$$

Nous aurons aussi besoin de l'hypothèse asymptotique suivante pour empêcher des productions infinies.

Hypothèse 7 : $\forall y \in \mathbf{R}^{LJ}$, $AX(y) \subset \mathbf{R}^{LI}_+$

C) Equilibre

L'homogénéité de degré zéro des correspondances d'offre et de demande permet de restreindre l'espace des prix au simplexe P de l'espace $\mathbf{R}^L$:

$$P = \{p/p \in \mathbf{R}^L, \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell = 1, p_\ell \geqq 0, \ell = 1, \ldots, L\}$$

Etant donné une décision de production ou de consommation de chacun des agents de l'économie, le vecteur excédent de demande associé est défini par :

$$z = \sum_{i=1}^{I} x^i - \sum_{j=1}^{J} y^j - \sum_{i=1}^{I} w^i$$

Définition 1 : On appelle *équilibre concurrentiel avec effets externes* un $(I + J + 1)$ – uple de vecteurs de $\mathbf{R}^L$, $(x^{*1}, \ldots, x^{*I}, y^{*1}, \ldots, y^{*J}, p^*)$ tels que :

i) $p^* y^{*j} = \text{Max } \{p^* y^j / \ y^j \in Y^j(\bar{y}^{*j}, x^*)\} \quad j = 1, \ldots, J$

ii) $u^i(x^{*i}, \bar{x}^{*i}, y^*) = \text{Max } \{u^i(x^i, \bar{x}^{*i}, y^*)/x^i \in X^i(\bar{x}^{*i}, y^*),$

$$p^* x^i \leqq p^* w^i + \sum_{j=1}^{J} \alpha^{ij} \ p^* y^{*j}\} \quad i = 1, \ldots, I$$

iii) $z^* = \sum_{i=1}^{I} x^{*i} - \sum_{j=1}^{J} y^{*j} - \sum_{i=1}^{I} w^i \leqq 0 \quad \text{avec} \quad p^* \ z^* = 0$

3. EXISTENCE D'UN EQUILIBRE CONCURRENTIEL AVEC EFFETS EXTERNES

Notre démonstration est une généralisation de la démonstration classique d'Arrow-Debreu (1954) dont le schéma est le suivant :

A) Construction d'un jeu auxiliaire où les ensembles de choix sont compacts.

B) Démonstration de l'existence d'un point fixe dans le jeu auxiliaire.

C) Identification du point fixe du jeu auxiliaire avec un équilibre concurrentiel non-coopératif.

A) Soit T l'ensemble des allocations réalisables de l'économie E

$$T = \{(x^1, \dots, x^I, y^1, \dots, y^J)/x^i \in X^i(\overline{x}^i, y) \quad i = 1, \dots, I\ ;$$
$$y^j \in Y^j(\overline{y}^j, x) \quad j = 1, \dots, J\ ;$$
$$\sum_{i=1}^{I} x^i - \sum_{j=1}^{J} y^j - \sum_{i=1}^{I} w^i \leqq 0\}$$

Lemme : Sous H3, H7, T est borné.

Démonstration (2) : Soit :

$$T_1 = \bigcup_{y \in R^{LJ}} X(y) \times y$$

$$T_2 = \bigcup_{x \in R^{LI}} x \times Y(x)$$

$$T_3 = \{(x, y)/\sum_{i=1}^{I} x^i - \sum_{j=1}^{J} y^j - \sum_{i=1}^{I} w^i \leqq 0\}$$

$$T = T_1 \cap T_2 \cap T_3$$

Donc : $\quad AT \subset AT_1 \cap AT_2 \cap AT_3$

Si : $\quad \widetilde{T}_3 = \{(x, y)/\sum_{i=1}^{I} x^i - \sum_{j=1}^{J} y^j \leqq 0\}$

Alors : $\quad AT_3 = A\widetilde{T}_3$

Soit : $\quad (x_A, y_A) \in AT_1 \cap AT_2 \cap A\widetilde{T}_3$

(2) Voir Debreu (1959, Ch. 1) pour les propriétés des cônes asymptotiques utilisées ici.

$$x_A \in AX(y_A) \Rightarrow x_A^i \geqq 0 \quad i = 1, \dots, I \text{ par H7}$$

$$(x_A, y_A) \in AT_3 \Rightarrow \sum_{j=1}^{J} y_A^j \geqq \sum_{i=1}^{I} x_A^i \geqq 0$$

D'où par H3, $\quad y_A^j = 0 \quad j = 1, \dots, J$

Mais : $\quad \sum_{j=1}^{J} y_A^j \geqq \sum_{i=1}^{I} x_A^i \geqq x_A^i \geqq 0$

entraîne : $\quad x_A^i = 0 \quad i = 1, \dots, I$

Donc : $\quad AT = \{0\}$ et T est borné Q-E-D

T étant borné, il existe un ensemble compact convexe C de R^L contenant l'origine et tel que T appartienne à l'intérieur de C^{I+J}. Nous définissons le jeu auxiliaire comme suit ; il existe (I + J + 1) joueurs dont :

– J producteurs qui maximent leur profit $p^* y^j$ dans des ensembles de choix : $\hat{Y}^j(\overline{y}^{*j}, x^*) = Y^j(\overline{y}^{*j}, x^*) \cap C$

– I consommateurs qui maximent leur utilité $u^i(x^i, \overline{x}^{*i}, y^*)$ dans des ensembles de choix définis par :

$$x^i \in \hat{X}^i(\overline{x}^{*i}, y^*) = X^i(\overline{x}^{*i}, y^*) \cap C$$

$$p^* x^i \leqq p^* w^i + \text{Max}\left[0, \sum_{j=1}^{J} \alpha^{ij} p^* y^{*j}\right]$$

– Un agent répartiteur qui choisit le vecteur prix p dans P de façon à maximer la valeur de l'excédent de demande :

$$pz^* = p\left(\sum_{i=1}^{I} x^{*i} - \sum_{j=1}^{J} y^{*j} - \sum_{i=1}^{I} w^i\right)$$

Définition 2 : Un point fixe du jeu auxiliaire est un (I + J + 1) – uple de vecteurs de R^L, $(x^{*1}, \dots, x^{*I}, y^{*1}, \dots, y^{*J}, p^*)$ tels que :

i) $p^* y^{*j} = \text{Max}\ \{p^* y^j / y^j \in \hat{Y}^j(\overline{y}^{*j}, x^*)\} \quad j = 1, \dots, J$

ii) $u^i(x^{*i}, \overline{x}^{*i}, y^*) = \text{Max}\left\{ u^i(x^i, \overline{x}^{*i}, y^*)/x^i \in \hat{X}^i(\overline{x}^{*i}, y^*),\right.$

$$\left. p^* x^i \leqq p^* w^i + \text{Max}\left[0, \sum_{j=1}^{J} \alpha^{ij} p^* y^{*j}\right] \right\} \quad i = 1, \dots, I$$

iii) $p^* z^* = \text{Max}\ \{pz^*/p \in P\}$

Un mot d'explication sur cette construction. Nous avons "compactifié" les ensembles de choix originels en les intersectant par l'ensemble compact C, qui est suffisamment grand (C^{I+J} contient l'ensemble des réalisables) pour ne pas causer de déformation gênantes des offres et des demandes. La substitution de

$$\mathrm{Max}\left[0\,,\sum_{j=1}^{J}\alpha^{ij}p^*y^{*j}\right] \text{ à } \sum_{j=1}^{J}\alpha^{ij}p^*y^{*j}$$

permet d'assurer que, pour tout le domaine de définition des variables $p\,, y$, la correspondance de budget est non vide et suffisamment "continue".

Ceci ne sera pas non plus gênant par la suite car, au point fixe, $\sum_{j=1}^{J}\alpha^{ij}p^*y^{*j}$ sera positif. Enfin, nous avons introduit l'agent répartiteur qui modifie les prix de façon à réaliser l'égalité de l'offre et de la demande.

B) Pour démontrer l'existence d'un point fixe dans le jeu, nous construisons une correspondance qui applique l'ensemble $C^{I+J}\times P$ dans lui-même et qui vérifie les hypothèses du théorème de Kakutani. Pour la clarté de la démonstration, nous noterons :

$$P\times C^{I+J} = P\times\prod_{i=1}^{I}C^i\times\prod_{j=1}^{J}C^j$$

i) Correspondance du consommateur i : ϕ^i

Soit : $\Gamma^i(p\,,\overline{x}^i\,,y) = \Big\{ x^i/x^i\in\hat{X}^i(\overline{x}^i\,,y)$ et

$$px^i \leqq p\,w^i + \mathrm{Max}\left[0\,,\sum_{j=1}^{J}\alpha^{ij}\,p\,y^j\right]\Big\}$$

$\Gamma^i(p\,,\overline{x}^i\,,y)$ est une correspondance continue à valeurs non vides convexes de $P\times\prod_{\substack{i'=1\\ i'\neq i}}^{J}C^{i'}\times\prod_{j=1}^{J}C^j$ dans C^i en vertu de H4 – H5 (voir Debreu (1959)).

La correspondance du consommateur i est alors définie par :

$$\phi^i(p\,,\overline{x}^i\,,y) = \{\widetilde{x}^i/u^i(\widetilde{x}^i\,,\overline{x}^i\,,y) = \mathrm{Max}\;u^i(x^i\,,\overline{x}^i\,,y)\,,\quad x^i\in\Gamma^i(p\,,\overline{x}^i\,,y)\}$$

Nous sommes maintenant exactement dans le cadre des hypothèses du théorème du maximum, de sorte que nous pouvons en conclure que ϕ^i est une correspondance s.c.s. à valeurs non-vides. De plus, ϕ^i est aussi à valeurs convexes en vertu de la convexité des préférences H5 – b et de $\Gamma^i(p\,,\overline{x}^i\,,y)$ par H4.

ii) Correspondance du producteur j : ψ^j

Soit : $\psi^j(p\,,x\,,\overline{y}^j) = \{\widetilde{y}^j/p\widetilde{y}^j = \mathrm{Max}\;\{py^j/y^j\in\hat{Y}^j(\overline{y}^j\,,x)\}$

Nous sommes également dans un cas d'application du théorème du maximum, de sorte que ψ^j est une correspondance s.c.s. à valeurs convexes non-vides de $P\times\prod_{i=1}^{I}C^i\times\prod_{\substack{j'=1\\ j'\neq j}}^{J}C^{j'}$ dans C^j

iii) Correspondance de l'agent répartiteur : ξ

$$\text{Soit : }\ \xi(x\,,y) = \Big\{\,\widetilde{p}/\widetilde{p}\left(\sum_{i=1}^{I}x^i - \sum_{j=1}^{J}y^j - \sum_{i=1}^{I}w^i\right) = \mathrm{Max}\;p\left(\sum_{i=1}^{I}x^i - \sum_{j=1}^{J}y^j - \sum_{i=1}^{I}w^i\right),\ p\in P\Big\}$$

Toujours par application du théorème du maximum, cette correspondance est s.c.s. à valeurs convexes non-vides de $\prod_{i=1}^{I}C^i\times\prod_{j=1}^{J}C^j$ dans P.

Il suffit de juxtaposer les extensions canoniques des correspondances $\phi^i\,, i = 1\,,\dots\,, I$; $\psi^j\,, j = 1\,,\dots\,, J\,, \xi$ pour obtenir la correspondance recherchée de $P\times\prod_{i=1}^{I}C^i\times\prod_{j=1}^{J}C^j$ dans lui-même.

Soit [–] cette correspondance telle que :

$$[-](p\,,x\,,y) = \begin{bmatrix}\xi(x\,,y)\\ \phi^1(p\,,\overline{x}^1\,,y)\\ \hdashline \phi^I(p\,,\overline{x}^I\,,y)\\ \psi^1(p\,,x\,,\overline{y}^1)\\ \hdashline \psi^J(p\,,x\,,\overline{y}^J)\end{bmatrix}$$

[–] est une correspondance s.c.s. à valeurs convexes non-vides du compact convexe non-vide $P\times\prod_{i=1}^{I}C^i\times\prod_{j=1}^{J}C^j$ dans lui-même. D'après le théorème de Kakutani, elle a un point fixe

$$(p^*\,,x^*\,,y^*)\in P\times\prod_{i=1}^{I}C^i\times\prod_{j=1}^{J}C^j,$$

c'est-à-dire tel que :

$$p^* \in \xi(x^*, y^*)$$
$$x^{*i} \in \phi^i(p^*, \bar{x}^{*i}, y^*) \qquad i = 1, \ldots, I$$
$$y^{*j} \in \psi^j(p^*, x^*, \bar{y}^{*j}) \qquad j = 1, \ldots, J$$

C) Il reste donc à identifier ce point fixe à un équilibre de l'économie

Puisque $0 \in Y^j(\bar{y}^{*j}, x^*)$, $p^* y^{*j} \geqq 0$, $j = 1, \ldots, J$ et donc

$$\text{Max}\left[0, \sum_{j=1}^{J} \alpha^{ij} p^* y^{*j}\right] = \sum_{j=1}^{J} \alpha^{ij} p^* y^{*j}.$$

En sommant terme à terme les contraintes de budget des consommateurs et en utilisant $\sum_{i=1}^{I} \alpha^{ij} = 1$, $j = 1, \ldots, J$ on obtient :

$$p^* z^* = p^* \left(\sum_{i=1}^{I} x^{*i} - \sum_{j=1}^{J} y^{*j} - \sum_{i=1}^{I} w^i\right) \leqq 0$$

D'après le comportement de l'agent répartiteur :

$$p z^* \leqq p^* z^* \qquad \forall p \in P$$

Si nous choisissons successivement $p = (1, 0, \ldots, 0)$;

$$(0, 1, 0, \ldots, 0) ; \ldots ; (0, \ldots, 0, 1)$$

nous avons : $\quad z^* \leqq 0$, donc $(x^*, y^*) \in T$.

Il faut maintenant montrer que si les agents ne sont pas restreints dans leur choix par l'ensemble compact C, ils prennent les mêmes décisions de consommation ou de production. Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe pour le consommateur i un vecteur de consommation x'^i appartenant à $X^i(\bar{x}^{*i}, y^*)$ tel que :

$$u^i(x'^i, \bar{x}^{*i}, y^*) > u^i(x^{*i}, \bar{x}^{*i}, y^*)$$

Puisque (x^*, y^*) est réalisable, x^{*i} appartient à l'intérieur de C. Par conséquent, il existe $\lambda \in \,]0, 1[$ tel que :

$$u^i(\lambda x'^i + (1-\lambda) x^{*i}, \bar{x}^{*i}, y^*) > u^i(x^{*i}, \bar{x}^{*i}, y^*)$$

avec $\quad (\lambda x'^i + (1-\lambda) x^{*i}, \bar{x}^{*i}, y^*) \in X^i(\bar{x}^{*i}, y^*) \cap C$

x^{*i} ne serait pas alors un élément maximum dans $\hat{X}^i(\bar{x}^{*i}, y^*)$ en contradiction avec la définition de (x^*, y^*). Le même raisonnement est applicable aux producteurs.

Finalement, on a $p^* z^* = 0$. Sinon, il existerait un i tel que

$$p^* x^{*i} < p^* w^i + \sum_{j=1}^{J} \alpha^{ij} p^* y^{*j}$$

en contradiction avec l'hypothèse de non satiété H5c. Toutes les conditions de la définition 1 sont réunies, ce qui complète notre démonstration de l'existence d'un équilibre concurrentiel avec externalités. Nous pouvons donc énoncer :

Théorème 1 : Sous H1 à H6, il existe un équilibre concurrentiel avec effets externes.

4. QUELQUES EXEMPLES

La plupart des hypothèses faites dans la section précédente pour démontrer l'existence d'un équilibre concurrentiel avec externalités sont de simples extensions des hypothèses usuelles d'existence d'équilibre (Debreu (1959)). Avec quelques exemples, nous essayons dans cette section de donner une vision plus intuitive des hypothèses moins classiques que nous avons utilisées et de la nature du résultat obtenu.

A) Effets externes positifs et production infinie

Dans cet exemple que nous traiterons de façon assez complète, nous voyons la nécessité de l'hypothèse H3 pour éviter la production libre asymptotique.

L'économie comporte un bien primaire 1 et deux biens de consommation finale 2 et 3 produits chacun par une entreprise. Les deux entreprises s'avantagent mutuellement par des effets externes positifs. Il existe un consommateur unique qui possède comme ressource initiale une unité de bien primaire et est propriétaire de toutes les entreprises.

La première entreprise maxime son profit $p_1 y_1^1 + p_2 y_2^1$ dans son ensemble de production défini par les contraintes :

$$y_2^1 \leqq (-y_1^1) + \alpha y_3^2 \qquad \alpha \geqq 0$$

La deuxième entreprise maxime son profit $p_1 y_1^2 + p_3 y_3^2$ dans son ensemble de production défini par :

$$y_3^2 \leqq (-y_1^2) + \beta y_2^1 \qquad \beta \geqq 0$$

Le consommateur maxime son utilité $u(x_2, x_3) = x_2 x_3$ dans l'intersection de son ensemble de consommation $\mathbf{R}_+^2$ et de son ensemble de budget défini par :

$$p_2 x_2 + p_3 x_3 \leqq p_1 + \Sigma \text{ profits}$$

En combinant l'action réciproque des effets externes de production, on obtient :

$$y_2^1 \leqq [(-y_1^1) + \alpha(-y_1^2)]\,[1 + \alpha\beta + (\alpha\beta)^2 + \ldots]$$
$$y_3^2 \leqq [(-y_1^2) + \beta(-y_1^1)]\,[1 + \alpha\beta + (\alpha\beta)^2 + \ldots]$$

Si $\alpha\beta \geqq 1$, on peut produire une quantité infinie des biens 2 et 3 avec une quantité infinitésimale de bien primaire. C'est ce que permet d'éviter l'hypothèse H3, synthétisée ici en $\alpha\beta < 1$.

Calculons tout d'abord les équilibres concurrentiels : on vérifie aisément qu'il n'existe pas d'équilibre où le bien primaire ait un prix nul. Nous choisissons donc ce bien comme numéraire. Notons qu'il s'agit d'une normalisation des prix différente de celle utilisée dans la démonstration d'existence.

Les correspondances d'offre et de demande s'obtiennent immédiatement. Soit θ^1 et θ^2 les quantités de bien primaire utilisées respectivement par les entreprises 1 et 2.

Entreprise 1 :

p_2	< 1	1
$-y_1^1$	0	$0 \leqslant \theta^1 \leqslant 1$
y_2^1	αy_3^2	$\theta^1 + \alpha y_3^2$
Profit	$p_2 \alpha y_3^2$	αy_3^2

Entreprise 2 :

p_3	< 1	1
$-y_1^2$	0	$0 \leqslant \theta^2 \leqslant 1$
y_3^2	βy_2^1	$\theta^2 + \beta y_2^1$
Profit	$p_3 \beta y_2^1$	βy_2^1

Consommateur :

$$x_2 = \frac{1 + p_2 \alpha y_3^2 + p_3 \beta y_2^1}{2 p_2}$$

$$x_3 = \frac{1 + p_2 \alpha y_3^2 + p_3 \beta y_2^1}{2 p_3}$$

La recherche des équilibres (égalité de l'offre et de la demande si les prix sont positifs) conduit aux trois cas suivants (toujours avec $\alpha\beta < 1$) :

a) $(1 - \alpha)(1 - \beta) \geqq 0$

$$p_2 = p_3 = 1 \qquad x_2 = x_3 = \frac{1}{2 - \alpha - \beta}$$
$$\theta^1 = \frac{1 - \alpha}{2 - \alpha - \beta} \qquad \theta^2 = \frac{1 - \beta}{2 - \alpha - \beta}$$

b) $\alpha > 1$

$$p_2 = 1/\alpha \qquad p_3 = 1$$
$$x_2 = \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \qquad x_3 = \frac{1}{1 - \alpha\beta}$$
$$\theta^2 = 1 \qquad \theta^1 = 0$$

c) $\beta > 1$

$$p_2 = 1 \qquad p_3 = 1/\beta$$
$$x_2 = \frac{1}{1 - \alpha\beta} \qquad x_3 = \frac{\beta}{1 - \alpha\beta}$$
$$\theta^1 = 1 \qquad \theta^2 = 0$$

Dans chacun de ces cas, il existe donc un équilibre unique.

Les optima de Pareto sont définis par le programme suivant :

Max $x_2 x_3$

T.Q. $\quad x_2(1 - \beta) + x_3(1 - \alpha) = 1$

$$x_2 - \alpha x_3 \geqq 0 \qquad x_2 \geqq 0$$
$$x_3 - \beta x_2 \geqq 0 \qquad x_3 \geqq 0$$

On doit aussi distinguer trois cas (toujours avec $\alpha\beta < 1$) :

a') $\alpha(2-\beta) \leqq 1$

$\beta(2-\alpha) \leqq 1$

$$x_2 = \frac{1}{2(1-\beta)} \qquad x_3 = \frac{1}{2(1-\alpha)}$$

$$\theta^1 = \frac{1-2\alpha+\alpha\beta}{2(1-\alpha)(1-\beta)} \qquad \theta^2 = \frac{1-2\beta+\alpha\beta}{2(1-\alpha)(1-\beta)}$$

b') $\alpha > \dfrac{1}{2-\beta}$

$$x_2 = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta} \qquad x_3 = \frac{1}{1-\alpha\beta}$$

$$\theta^1 = 0 \qquad \theta^2 = 1$$

c') $\beta > \dfrac{1}{2-\alpha}$

$$x_2 = \frac{1}{1-\alpha\beta} \qquad x_3 = \frac{\beta}{1-\alpha\beta}$$

$$\theta^1 = 1 \qquad \theta^2 = 0$$

On peut rassembler ces résultats en donnant dans l'espace (α, β) des paramètres les valeurs prises par θ^1, à l'équilibre θ^1_e et à l'optimum θ^1_0 (voir figure 1) :

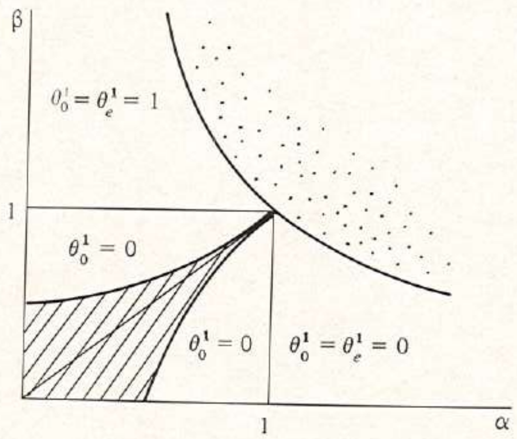

Figure 1

Dans tout le carré $\qquad \theta^1_e = \dfrac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta}$

Dans la zone hachurée $\qquad \theta^1_0 = \dfrac{1-2\alpha+\alpha\beta}{2(1-\alpha)(1-\beta)}$

Les allocations d'équilibre et d'optimum sont confondues sauf dans le carré (à l'exception de sa diagonale). A l'exception de la diagonale (qui est de mesure zéro), les cas où équilibre et optimum sont confondus correspondent à des solutions en coin (une des deux entreprises ne produit pas). Nous concluons provisoirement à partir de cet exemple qu'en général équilibre et optimum diffèrent mais qu'ils peuvent fort bien coïncider (cf. Section 5).

B) Convexité des valeurs de la correspondance de production

L'exemple suivant met l'accent sur la limitation qu'introduit l'hypothèse de convexité associée à la possibilité de production nulle. Elle élimine une certaine catégorie d'effets externes négatifs qui ont un caractère de coût fixe.

Considérons la même économie que dans l'exemple précédent, à l'exception des ensembles de production, qui sont différents (figure 2) :

$$Y^1 = \{(y^1_1, y^1_2)/y^1_1 \leqq 0,\ y^1_2 \leqq -y^1_1 - \alpha y^2_3,\ 0 \geqq \alpha \geqq 1\} \cup \{-\mathbf{R}^3_+\}$$

$$Y^2 = \{y^2_1, y^2_3 \mid y^2_3 \leqq -y^2_1,\ y^2_1 \leqq 0\}$$

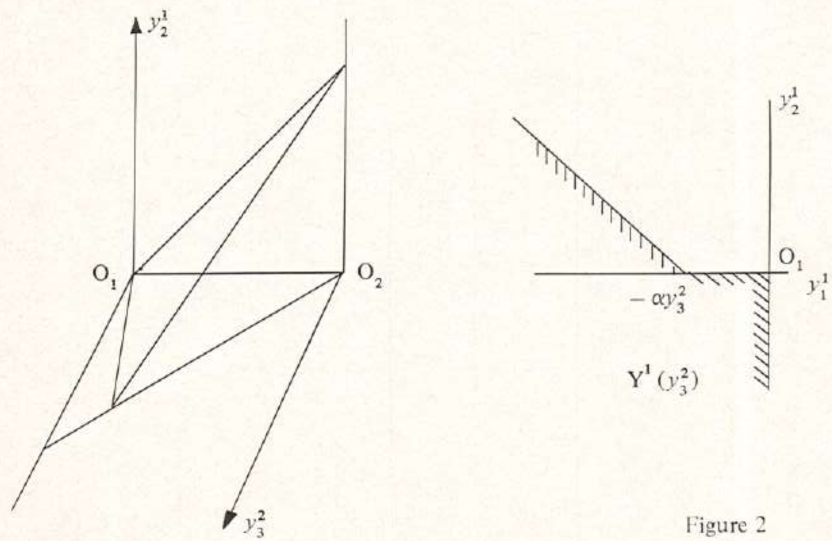

Figure 2

L'entreprise 2 exerce un effet externe négatif sur l'ensemble de production de l'entreprise 1 ; plus son output y_3^2 est important, plus la mise initiale en bien primaire de l'entreprise 1 doit être élevée (augmentation des coûts fixes). Il n'y a évidemment plus dans ce cas de convexité de l'ensemble de production Y^1.

Il n'existe pas d'équilibre concurrentiel dans cette économie. En effet, prenons le bien 1 comme numéraire car un prix nul de ce bien ne peut fournir d'équilibre. Le consommateur demande, étant donné la forme de sa fonction d'utilité, une quantité strictement positive des biens 2 et 3. Or, le profit de l'entreprise 1 est négatif dès que l'entreprise 2 produit, du moins si elle fournit un output non nul en bien 2. Aussi se retirera-t-elle de la production, ce qui empêche la réalisation de l'équilibre sur le marché du bien 2.

C) Non convexité de l'ensemble de production agrégé

Il est intéressant d'observer que le théorème d'existence d'équilibre concurrentiel avec effets externes n'exige pas la convexité de l'ensemble de production agrégé. Nous donnons ci-après un exemple d'une économie où l'ensemble de production global est non-convexe et où il existe un équilibre qui est même un optimum de Pareto.

La structure de l'économie est la même que dans les exemples précédents. Cependant, l'ensemble de production de la première entreprise est défini par :

$$y_2^1 \leqq (-y_1^1) \cdot e^{-y_3^2}, \; y_1^1 \leqq 0$$

l'ensemble de production de la deuxième entreprise est défini par :

$$y_3^2 \leqq (-y_1^2), \; y_1^2 \leqq 0$$

et le consommateur a pour fonction d'utilité :

$$\mathrm{Min}\,(x_2, x_3)$$

L'ensemble des productions réalisables est défini par les contraintes :

$$(-y_1^1) + (-y_1^2) = 1$$

$$y_2^1 \leqq (-y_1^1)\, e^{y_1^2} \qquad y_1^1 \leqq 0$$

$$y_3^2 \leqq (-y_1^2) \qquad y_1^2 \leqq 0$$

C'est une section de l'ensemble de production par le plan

$$(-y_1^1) + (-y_1^2) = 1.$$

Cet ensemble des réalisables est représentable sur une figure à trois dimensions selon un procédé utilisé par Koopmans

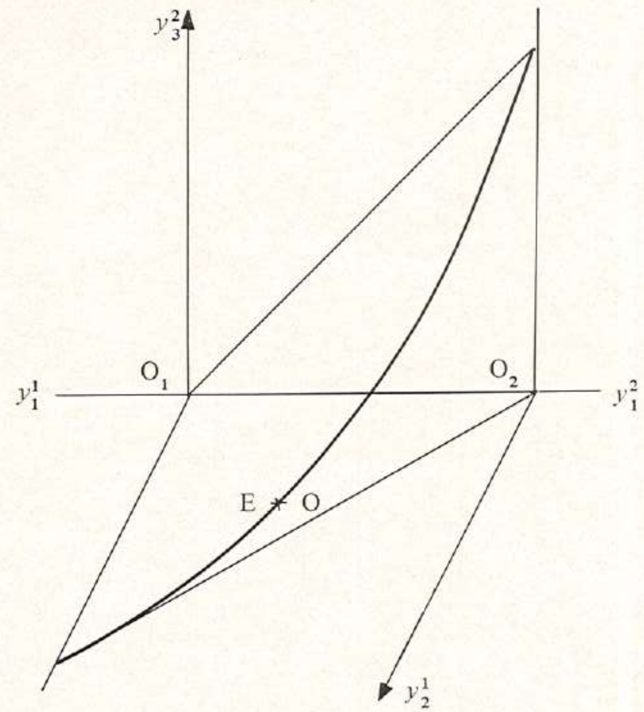

Figure 3

L'axe $O_1 O_2$ représente le bien primaire. Un point sur $O_1 O_2$ définit une partition de l'input entre les deux entreprises. Les productions sont lues sur les axes correspondants ($O_2\, y_2^1$ et $O_1\, y_3^2$) à partir du point de $O_1 O_2$ associé à la partition choisie du bien primaire.

Un calcul rapide montre que le vecteur prix d'équilibre est $(1, p^*, 1)$ où p^* est la racine unique de l'équation :

$$\operatorname{Log} p - \frac{1}{1+p} = 0$$

Les autres caractéristiques de la position d'équilibre sont alors :

$$(-y_1^1) = 1 - \operatorname{Log} p^*$$

$$y_2^1 = \frac{1 - \operatorname{Log} p^*}{p^*} = x_2$$

$$y_3^2 = \operatorname{Log} p^* = x_3$$

L'unique équilibre est représenté sur la figure 3 par le point E. On vérifie aisément que cet équilibre est aussi un optimum de Pareto. On ne peut s'attendre toutefois à des résultats généraux portant sur la relation entre équilibre et optimum (avec la fonction d'utilité $u(x_2, x_3) = x_2 x_3$ l'équilibre n'est plus un optimum).

5. EQUILIBRE ET OPTIMUM

Nous avons vu dans la section précédente que l'équilibre concurrentiel avec effets externes n'est pas en général un optimum de Pareto, bien qu'il puisse l'être dans certains cas particuliers. En effet, nous savons depuis Pigou que l'optimalité de Pareto nécessite (pour des optima intérieurs) l'égalité des coûts et bénéfices marginaux sociaux, alors qu'à l'équilibre le comportement décentralisé des agents économiques n'assure que l'égalité des coûts et bénéfices marginaux privés par l'intermédiaire des prix.

Que peut-on dire des allocations d'équilibre par rapport aux allocations parétiennes ? Est-il correct de dire qu'un bien qui crée des effets externes positifs doit voir sa quantité augmenter lorsqu'on passe d'un équilibre à un optimum ? Ou, inversement, puisque les automobilistes créent des nuisances devrait-il y en avoir moins ?

Il est clair tout d'abord que les réponses à ces questions sont triviales si on n'élimine pas les effets revenus. En effet, lorsqu'on se déplace d'un équilibre à un optimum de Pareto, le revenu réel augmente et l'effet revenu peut modifier l'allocation dans un sens inattendu ; de même, les revenus réels relatifs des différents consommateurs aux élasticités revenu de la demande différentes peuvent changer.

Cependant, Buchanan et Kafoglis (1963) ont donné un exemple dans lequel il n'y a pas d'effet revenu et où, pourtant, la quantité d'un bien qui crée des effets externes positifs décroît lorsqu'on se déplace de l'équilibre à l'optimum. Nous donnons par la suite un exemple de conditions suffisantes qui permettent d'éviter ce résultat peu intuitif. Il n'existe pas toutefois de caractérisation satisfaisante de cette "anomalie".

Nous considérons une économie à deux biens et deux consommateurs dont les fonctions d'utilité sont linéaires dans le deuxième bien ; seule la consommation du premier bien crée une externalité :

$$U^1(x^1, x^2) = A(x_1^1, x_1^2) + x_2^1$$

$$U^2(x^1, x^2) = B(x_1^1, x_1^2) + x_2^2$$

avec

$$A_{11} = \frac{\partial^2 A}{(\partial x_1^1)^2} < 0$$

$$B_{22} = \frac{\partial^2 B}{(\partial x_1^2)^2} < 0$$

pour assurer l'unicité de l'optimum.

Le prix du deuxième bien est normalisé à 1 et le prix du premier bien est fixé à p par une technologie à coefficients fixes.

Si R^1 et R^2 sont les revenus des deux consommateurs, les fonctions d'utilité peuvent être réécrites en utilisant les contraintes budgétaires comme :

$$U^1(x_1^1, x_1^2) = A(x_1^1, x_1^2) + R^1 - p x_1^1$$

$$U^2(x_1^1, x_1^2) = B(x_1^1, x_1^2) + R^2 - p x_1^2$$

Nous sommes essentiellement intéressés par le marché du bien 1. A l'équilibre, chaque consommateur maxime son utilité par rapport à ses variables de choix, d'où les conditions du premier ordre :

$$\frac{\partial U^1}{\partial x_1^1}(x_1^{*1}, x_1^{*2}) \leqq 0 = 0 \quad \text{si} \quad x_1^{*1} > 0$$

$$\frac{\partial U^2}{\partial x_1^2}(x_1^{*1}, x_1^{*2}) \leqq 0 = 0 \quad \text{si} \quad x_1^{*2} > 0$$

Puisque les fonctions d'utilité sont linéaires dans le second bien, les optima de Pareto sont de deux sortes. Ou bien tout le revenu disponible pour le bien 2 est dans les mains d'un seul consommateur (nous ignorerons ce cas) ou bien l'optimum est obtenu en maximant : $U^1(x_1^1, x_1^2) + U^2(x_1^1, x_1^2) = A(x_1^1, x_1^2) + B(x_1^1, x_1^2) + R^1 + R^2 - p x_1^1 - p x_1^2$

ce qui donne :

$$\frac{\partial A}{\partial x_1^1}(\widetilde{x}_1^1, \widetilde{x}_1^2) + \frac{\partial B}{\partial x_1^1}(\widetilde{x}_1^1, \widetilde{x}_1^2) \leqq p = \text{ si } \widetilde{x}_1^1 > 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_1^2}(\widetilde{x}_1^1, \widetilde{x}_1^2) + \frac{\partial B}{\partial x_1^2}(\widetilde{x}_1^1, \widetilde{x}_1^2) \leqq p = \text{ si } \widetilde{x}_1^2 > 0$$

Dans la figure 4, les optima sont représentés par la courbe de contrat YZ, lieu de tangence des courbes d'indifférence des deux agents.

L'équilibre E est obtenu comme intersection des courbes de réactions définies par les équations :

$$\frac{\partial A}{\partial x_1^1}(x_1^{*1}, x_1^{*2}) \leqq p = 0 \quad \text{si} \quad x_1^{*1} > 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_1^2}(x_1^{*1}, x_1^{*2}) \leqq p = 0 \quad \text{si} \quad x_1^{*2} > 0$$

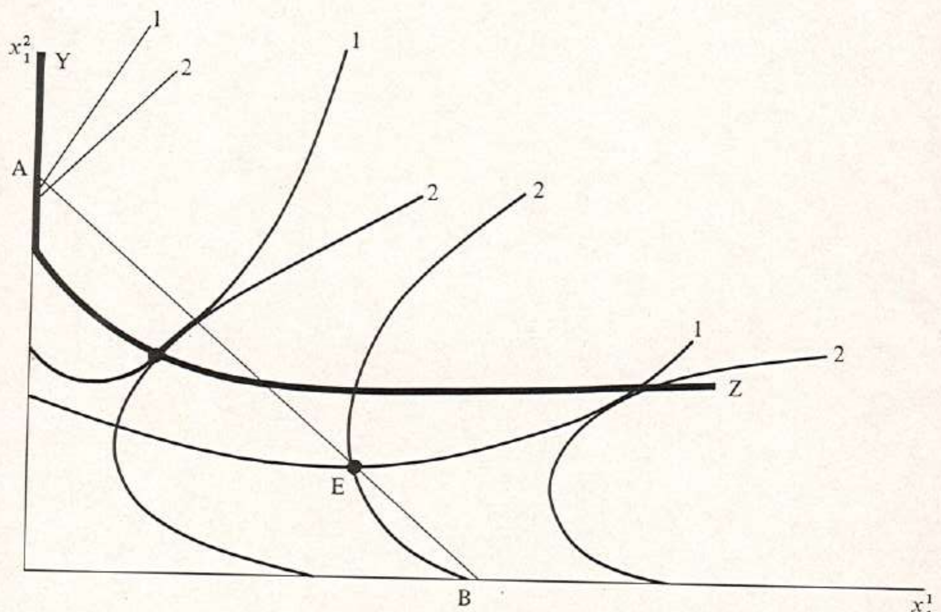

Figure 4

La consommation agrégée de bien 1 est supérieure (inférieure) à celle de l'équilibre pour les points au-dessus (au-dessous) de la droite AB à 45°.

Lorsque les effets externes sont positifs (négatifs), il faut s'assurer, pour éliminer le cas anormal, que tous les points de YZ sont au-dessus de AB (au-dessous).

Diamond et Mirrlees ont obtenu certaines conditions suffisantes qui donnent ce résultat. En voici un exemple :

Si
$$U_{11}^1 \leqslant U_{12}^1 \quad \text{quand} \quad U_1^1 = 0$$
$$U_{22}^2 \leqslant U_{12}^2 \quad \text{quand} \quad U_2^2 = 0$$

le cas anormal ne peut se produire.

Le lecteur intéressé par la démonstration de cette proposition et quelques extensions de cette approche peut se reporter à l'article de Diamond et Mirrlees [1973].

6. OPTIMALITE ET EFFETS EXTERNES

Ainsi, l'existence d'effets externes conduit en général à la non-optimalité de l'équilibre concurrentiel. Nous devons donc nous poser la question de la pertinence d'une intervention de l'Etat pour remédier à l'inefficacité du libre jeu des marchés. Dans le chapitre suivant, nous étudierons les différentes politiques économiques possibles, mais, dans cette section, nous mentionnerons deux cas qui peuvent justifier une politique du "laissez faire".

A) Internalisation des effets externes

Considérons une économie dans laquelle les seuls effets externes sont des effets externes entre deux producteurs. Les deux entreprises peuvent reconnaître l'intérêt d'une harmonisation de leurs actions et décider de maximer leur profit total avec une éventuelle règle de répartition ou, plus radicalement, de se fondre en une seule entreprise, ce qui conduit au même comportement. On dit alors que les effets externes ont été internalisés et l'équilibre concurrentiel redevient un optimum de Pareto.

B) Petits effets externes

Une riposte naturelle des partisans acharnés du laissez faire est de reconnaître l'inefficacité de l'équilibre concurrentiel mais de dire que, si les effets externes sont importants, les agents économiques les reconnaissent et les internalisent, ou que, s'ils sont peu importants, l'inefficacité est légère et les coûts d'une politique économique destinée à y remédier excèderaient les bénéfices.

Nous ne chercherons pas ici à répondre à la question empirique de savoir si les effets externes sont ou non importants. Est-il logiquement cohérent de dire que de petits effets externes conduisent à de "petites inefficacités" ? Cette question a reçu un début de réponse dans Laffont (1972) et fait l'objet d'une note très complète par Fuchs et Laroque (1974). Dans leur article, Fuchs et Laroque démontrent que, pour la plupart des économies, les équilibres concurrentiels avec effets externes convergent, lorsque les effets externes deviennent très petits, vers les équilibres concurrentiels (et donc les optima de Pareto) de l'économie sans effets externes. Une formulation rigoureuse de ce résultat nous entraînerait trop loin, et le lecteur intéressé est renvoyé à l'article de Fuchs et Laroque. Il est donc vrai qu'en général de petits effets externes ne sont pas d'une grande gravité. Cependant, la difficulté avec ce type de résultats est qu'il faut avoir une idée des coûts des éventuelles politiques correctrices pour savoir jusqu'à quel ordre de grandeur des externalités on peut les négliger. De plus, un tel résultat ne fournit pas une mesure de l'inefficacité pour une taille donnée des externalités.

7. COMPATIBILITE ENTRE RENDEMENTS CROISSANTS ET CONCURRENCE PARFAITE

Nous avons vu dans la section 4 qu'un équilibre concurrentiel avec externalités peut exister avec un ensemble de production agrégé non convexe. Nous montrons dans cette section comment une systématisation de ce résultat permet de fournir une formalisation possible de certaines idées de Marshall.

Dans son étude de la production, A. Marshall (1961, p. 262) a introduit la distinction entre économies internes et économies externes.

«Si on examine de près les économies nées d'un accroissement de l'échelle de la production, on en distingue deux sortes : d'une part celles qui dépendent du développement général de l'industrie, d'autre part celles qui dépendent des ressources des entreprises individuelles de cette indutrie et de l'efficacité de leur gestion, c'est-à-dire, les économies externes et internes.»

Une des ambitions profondes de Marshall était, à l'aide de ces concepts, de rendre compatibles la concurrence et les rendements croissants. Ceci lui semblait possible grâce aux économies externes aux entreprises et internes aux industries ; en effet, les entreprises individuelles pouvaient être ainsi à rendements non croissants tandis que les industries étaient à rendements croissants.

Son outil d'analyse, la courbe de prix d'offre d'un bien, l'a empêché de faire la distinction fondamentale entre effets externes pécuniaires et effets externes technologiques de sorte que son concept d'effet externe est resté problématique jusqu'aux clarifications de J. Viner (1931).

Dans le grand débat des années 1920-1930 sur les «boîtes vides», les reproches adressés à Marshall étaient en général relatifs aux effets externes pécuniaires qui semblaient les plus importants et ignoraient la pertinence de ses remarques pour les effets externes technologiques jugés secondaires. Aussi, les conclusions de la controverse furent-elles peu positives. Les sceptiques étaient conduits par Piero Sraffa (1926), qui montre les raisons logiques de l'insuffisance de l'analyse partielle dans la concurrence parfaite avec rendements croissants. Il voit une façon de sortir du dilemme (1926, p. 187) : «Il devient nécessaire d'étendre le domaine d'étude de manière à examiner les conditions d'équilibre simultané dans de nombreuses industries.» Ce passage à la théorie de l'équilibre général lui semble impossible dans l'état des connaissances de l'époque ; il s'oriente vers la concurrence imparfaite et le monopole.

L'incompatibilité de la concurrence parfaite et des rendements croissants est dès lors considérée par tous les économistes comme un lieu commun. En effet, cela est vrai en information parfaite pour les rendements croissants de l'entreprise, c'est-à-dire de l'unité qui maxime son profit. Mais, de la même façon qu'avec un nombre fini d'agents, la théorie de la concurrence parfaite n'est qu'une approximation descriptive en information imparfaite d'une théorie qui ne peut être que monopolistique (cf. Laffont et Laroque (1976)) il est possible de construire en information imparfaite un modèle descriptif du fonctionnement d'une économie concurrentielle avec rendements croissants. De plus, lorsque les rendements croissants sont externes à l'entreprise, le modèle est encore valable avec information parfaite.

Meade (1955) semble être le premier à avoir, dans un contexte d'économie internationale, eu conscience de la solution. Chipman (1970) en a donné un exposé complet dans le cadre d'un modèle particulier. Nous allons présenter à l'aide d'un exemple de Chipman l'argumentation essentielle ; ensuite, nous démontrerons le résultat dans un cadre général en le rattachant à la théorie générale des effets externes.

Dans cet exemple, l'économie est constituée de q industries (indicées $j = 1, \ldots, q$) qui comprennent chacune n^j entreprises. La fonction de production de la i-ième entreprise de l'industrie j s'écrit :

$$y^{ji} = k^j z^{ji} \qquad k^j > 0 \qquad i = 1, \ldots, n^j \tag{a}$$

où z^{ji} et y^{ji} sont respectivement l'input et l'output de la i-ième entreprise de l'industrie j. Si on pose :

$$y^j = \sum_{i=1}^{n^j} y^{ji} \quad \text{et} \quad z^j = \sum_{i=1}^{n^j} z^{ji}$$

on obtient la fonction de production de l'industrie j :

$$y^j = k^j z^j \qquad j = 1, \ldots, q \tag{b}$$

Supposons maintenant que k^j dépend de la production totale de l'industrie j ou plutôt ici de l'input total de l'industrie j :

$$k^j = \alpha^j (z^j)^{\rho_j - 1}, \alpha^j > 0 \ , \ 0 < \rho_j < \infty \tag{c}$$

L'hypothèse importante est que le comportement de l'entreprise i de l'industrie j (issu d'une information imparfaite) est de traiter k^j comme une constante ; elle a vis-à-vis de k^j le même comportement paramétrique que vis-à-vis des prix.

Les rendements d'échelle de l'industrie j dont la fonction de production est $y^j = \alpha^j (z^j)^{\rho_j}$ sont croissants dès que $\rho_j > 1$. De même, pour des inputs des autres entreprises de l'industrie fixés, les rendements d'échelle de l'entreprise i sont aussi croissants dès que $\rho_j > 1$; en effet, sa fonction de production s'écrit :

$$y^{ji} = \alpha^j \Big(z^{ji} + \sum_{\substack{i' \neq i \\ i'=1}}^{n^j} z^{ji'}\Big)^{\rho_j - 1} z^{ji}$$

Une part des rendements croissants est ici interne à l'industrie. Si k^j devient différent pour chaque entreprise i de l'industrie j et ne dépend que de la somme des inputs des autres entreprises de l'industrie,

$$k^{ji} = \alpha^j \Big(\sum_{\substack{i' \neq i \\ i'=1}}^{n^j} z^{ji'} \Big)^{\rho_j - 1}$$

l'industrie est encore à rendements croissants alors qu'une entreprise quelconque est à rendements constants pour des inputs des autres donnés. Les économies externes sont bien, dans ce cas, purement internes à l'industrie et externes à l'entreprise.

Dans le cadre (a), (b), (c) Chipman montre l'existence d'un équilibre concurrentiel dont nous donnons ci-après la généralisation.

Soit une économie constituée de J entreprises, I consommateurs et L biens. Les entreprises sont classées en industries, c'est-à-dire, regroupées en entreprises qui produisent les mêmes biens. Il y a q industries. Chaque industrie j est constituée de n^j entreprises avec :

$$\sum_{j=1}^{q} n^j = \mathrm{J}$$

$\mathrm{B}(j)$ désigne les indices des biens produits par l'industrie j. Pour simplifier quelque peu l'exposé, nous supposerons que $\mathrm{B}(j) \cap \mathrm{B}(j') = \phi$ si $j \neq j'$. Le lecteur verra de lui-même comment cette hypothèse peut être supprimée. Soit y^{ji} le vecteur d'activité de l'entreprise i de l'industrie j et y_0^{ji} son vecteur d'outputs.

$$y_0^j = \sum_{i=1}^{n^j} y_0^{ji}$$

sera la production totale de l'industrie j. Notre hypothèse technologique qui décrit les possibilités de production des différentes entreprises s'écrit :

Hypothèse 8 :

$$\forall j = 1, \ldots, q \ ; \forall i = 1, \ldots, n^j, \quad \mathrm{Y}^{ji}\Big(\sum_{i'=1}^{n^j} y_0^{ji'}\Big) \ (^3)$$

est une correspondance semi-continue inférieurement, à graphe fermé, à valeurs convexes non vides contenant 0 de $\mathrm{R}^{|\mathrm{B}(j)|}$ dans R^{L}.

Pour des productions de l'industrie j fixées, les rendements de l'entreprise i de l'industrie j sont non croissants (Y^{ji} à valeurs convexes). Cepen-

(3) La forme particulière de l'argument (somme d'outputs) illustre l'idée «marshallienne» que la production de l'entreprise i de l'industrie j dépend de la «production» de l'industrie j. Elle peut évidemment être généralisée pour comprendre les inputs et outputs des entreprises de l'industrie j sous forme non additive.

dant, l'ensemble de production de l'industrie j,

$$Y^j = \left\{ \sum_{i=1}^{n^j} y^{ji} \in Y^{ji} \left(\sum_{i=1}^{n^j} y_0^{ji} \right) \quad , \quad \forall i = 1, \ldots, n^j \right\}$$

peut ne pas être convexe, c'est-à-dire que l'industrie peut globalement avoir des rendements croissants. L'ensemble de production global de l'économie est :

$$Y = \sum_{j=1}^{q} Y^j$$

L'entreprise i de l'industrie j maxime son profit dans son ensemble de production en considérant la production globale de l'industrie j comme fixée, c'est-à-dire, en ayant un comportement paramétrique vis-à-vis des rendements croissants de l'industrie j :

$$(1) \qquad p^* y^{*ji} = \text{Max } \{p^* y^{ji} / y^{ji} \in Y^{ji} (y_0^{*j})\} \quad \begin{array}{l} \forall j = 1, \ldots, q \\ \forall i = 1, \ldots, n^j \end{array}$$

Nous faisons une hypothèse technique peu gênante qui assure l'impossibilité de la production libre et l'irréversibilité de la production (cf. Hypothèse 3).

Soit :

$$z = \left\{ (y^{11}, \ldots, y^{qn^q}) / y^{ji} \in Y^{ji} \left(\sum_{i=1}^{n^j} y_0^{ji} \right) \begin{array}{l} \forall j = 1, \ldots, q \\ \forall i = 1, \ldots, n^j \end{array} \right\}$$

Hypothèse 9 :

$$\left. \begin{array}{l} (y^{11}, \ldots, y^{qn^q}) \in AZ \\ \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{n^j} y^{ji} \geqslant 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y^{ji} = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, q \; ; \forall i = 1, \ldots, n^j$$

Les hypothèses sur la consommation dont identiques à celles de la section 2, mais il n'y a pas ici d'externalités sur les consommateurs.

Le consommateur i choisit dans son ensemble de budget l'élément maximal pour son préordre de préférences :

(2) x^{*i} est maximal pour $\underset{i}{\succsim}$ dans :

$$\{x^i / p^* x^i \leqslant p^* w^i + \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{n^j} \alpha^{ijk} p^* y^{*jk} \quad \text{et} \quad x^i \in X^i\} \text{ (4)}$$

(4) α^{ijk} est la part de l'entreprise k de l'industrie j détenue par l'agent i.

Soit z le vecteur d'excédent de demande :

$$z = \sum_{i=1}^{I} x^i - \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{n^j} y^{ji} - \sum_{i=1}^{I} w^i$$

Enfin,

$$(3) \qquad p^* \in P = \{p/p \in R^L \quad , \quad p \geqslant 0, \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell = 1\}$$

Définition 3 :

On appelle *équilibre concurrentiel marshallien*, un $(I + J + 1)$ – uple de vecteurs $(x^{*1} \ldots x^{*I}, y^{*11} \ldots\ldots\ldots y^{*qn^q}, p^*)$ qui satisfont (1) (2) (3) et tels que : $z^* \leqslant 0$ et $p^* z^* = 0$.

Il est facile de voir que la démonstration qui assure cette existence est un cas particulier de la démonstration d'existence d'un équilibre concurrentiel non coopératif avec effets externes (cf. section 3).

Théorème 2 :

Sous H4-H5-H8-H9, il existe un équilibre concurrentiel marshallien.

Sauf cas particulier, cet équilibre n'est pas un optimum de Pareto.

On obtient ainsi un modèle logiquement cohérent qui donne aux idées de Marshall la formulation précise qui leur manquait dans un cadre *statique*. On peut néanmoins s'interroger sur la valeur descriptive d'un tel modèle.

Il semble peu réaliste, *a priori*, que les entreprises ne soient pas conscientes de l'existence de rendements croissants dans leur propre ensemble de production (l'exemple de Chipman montre comment cela est possible). Seule une information imparfaite peut justifier une telle attitude. Lorsque les rendements croissants proviennent d'une interaction mutuelle entre les entreprises, le réalisme du comportement non coopératif est beaucoup plus grand. Il est évident que ce type de comportement peut parfois être dépassé et conduire à une coopération partielle et à une internalisation de ces rendements croissants. Dans cette économie nouvelle où nécessairement les agents ont conscience de la technologie à rendements croissants, le modèle n'est plus descriptif et on est à nouveau confronté au problème classique. Cependant, l'importance des externalités diffuses rend difficile, voire impossible, une telle coopération. Aussi, le modèle proposé permet dans bien des cas de rendre compatibles les rendements croissants issus d'externalités technologiques et la concurrence, avec, en général, la non-optimalité de l'état obtenu.

CHAPITRE III

DÉCENTRALISATION DES OPTIMA PARETIENS [1]

1. INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre est d'expliquer les difficultés d'une décentralisation des optima parétiens dans une économie avec effets externes technologiques trés variés. Dans une contribution importante, Starrett (1972), travaillant à partir du modèle d'Arrow[2], a donné une grande partie des résultats de ce chapitre dans le cas d'externalités entre producteurs. Il met en évidence l'existence d'une non convexité fondamentale qui élimine l'approche «marchés artificiels» pour des externalités négatives dans la production. Il montre aussi pourquoi l'approche taxation n'est pas affectée par cette non-convexité fondamentale et pourquoi les deux approches sont équivalentes sous des hypothèses fortes de convexité. Notre but est de présenter ces différents points dans un cadre plus général et si possible d'une façon plus simple. Une bonne compréhension de ces résultats est indispensable pour une discussion des solutions à apporter à l'inefficacité de l'équilibre concurrentiel avec externalités[3] mise en évidence au chapitre II.

---

(1) Ce chapitre est basé sur «*Decentralization with Externalities*», *European Economic Review*, 1976.

(2) Arrow (1969) a esquissé une formulation générale pour la création de marchés artificiels dans le cas d'externalités entre consommateurs ; il associe un prix à chaque agent même pour les biens ordinaires. Ce point de détail contribue à rendre l'interprétation des prix obtenus par Arrow (1969) et Starrett (1972) quelque peu délicate. Ici nous n'introduisons que les prix nécessaires pour la décentralisation.

(3) Sidgwick (1887) and Pigou (1920) ont reconnu intuitivement que cette inefficacité vient d'une divergence entre coûts privés et sociaux ou bénéfices privés et sociaux et ont suggéré la taxation comme mesure corrective. Coase (1960) a défendu la solution de négociation entre «pollueur» et «pollué», qui peut être vue comme la création d'un marché artificiel entre les deux parties.

Dans la section 2, nous rappelons la définition d'une économie avec externalités. La section 3 montre comment une décentralisation avec des marchés artificiels est obtenue sous des hypothèses fortes de convexité. Un nouvel exemple est donné pour expliquer la nécessité d'une hypothèse de «non-intériorité» mise en évidence pour la première fois par Murakami et Negishi (1964). On obtient dans la section 4 une décentralisation par taxation sous des hypothèses de convexité plus faibles. Dans les deux cas, on montre que les démonstrations sont des cas particuliers de Debreu (1959) et l'équivalence des deux types de décentralisation est discutée. Enfin, la discussion des hypothèses est poursuivie dans la section 5.

2. UNE ECONOMIE AVEC EXTERNALITES

Nous considérons une économie avec I consommateurs (indicés $i = 1, \ldots, \mathrm{I}$), J producteurs ($j = 1, \ldots, \mathrm{J}$) et L biens ($\ell = 1, \ldots, \mathrm{L}$).

Soit $x^i_\ell \in \mathbf{R}$, la consommation en bien ℓ du consommateur i, $i = 1, \ldots, \mathrm{I}$, $\ell = 1, \ldots, \mathrm{L}$. Une consommation négative correspond à un output du consommateur comme le travail. Nous notons

$$x^i = (x^i_1, \ldots, x^i_{\mathrm{L}}), i = 1, \ldots, \mathrm{I} \quad \text{et} \quad x = (x^1, \ldots, x^{\mathrm{I}})$$

Soit $y^j_\ell \in \mathbf{R}$, l'input (si négatif), l'output (si positif)(4) en bien ℓ du producteur j, $j = 1, \ldots, \mathrm{J}$, $\ell = 1, \ldots, \mathrm{L}$. Nous notons

$$y^j = (y^j_1, \ldots, y^j_{\mathrm{L}}), j = 1, \ldots, \mathrm{J} \quad \text{et} \quad y = (y^1, \ldots, y^{\mathrm{J}})$$

De plus, il y a des effets externes très généraux entre producteurs et consommateurs.

Considérons tout d'abord les externalités de consommation et de production sur les consommateurs. Soit $\bar{x}^i = (x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^{\mathrm{I}})$. La correspondance ensemble de consommation $\mathrm{X}^i(\bar{x}^i, y)$ de $\mathbf{R}^{\mathrm{L(I-1)+LJ}}$ dans $\mathbf{R}^{\mathrm{L}}$ définit l'ensemble de consommation du consommateur i pour chaque valeur $(\bar{x}^i, y)$ de son environnement. Soit $\mathrm{GX}^i \subset \mathbf{R}^{\mathrm{L(I+J)}}$ le graphe de cette correspondance. Les préférences du consommateur i sont définies par un préordre $\underset{i}{\succsim}$ sur GX^i ; il y a donc aussi des externalités sur les préférences. Enfin, soit $w^i \in \mathbf{R}^{\mathrm{L}}$ le vecteur de ressources initiales du consommateur i, $i = 1, \ldots, \mathrm{I}$.

(4) Pour simplifier les notations nous supposons que pour chaque agent un bien ne peut être simultanément un input et un output.

Les effets externes de consommation et de production sur les producteurs sont aussi possibles. Soit $\bar{y}^j = (y^1, \ldots, y^{j-1}, y^{j+1}, \ldots, y^{\mathrm{J}})$. La correspondance ensemble de production $\mathrm{Y}^j(\bar{y}^j, x)$ de $\mathbf{R}^{\mathrm{L(J-1)+LI}}$ dans $\mathbf{R}^{\mathrm{L}}$ définit l'ensemble de production du producteur i pour chaque valeur $(\bar{y}^j, x)$ de son environnement. Soit $\mathrm{GY}^j \subset \mathbf{R}^{\mathrm{L(I+J)}}$ le graphe de cette correspondance.

Nous noterons $\mathcal{E}$ l'économie décrite ci-dessus.

Un état de l'économie $\mathcal{E}$, c'est-à-dire un vecteur $(x, y) \in \mathbf{R}^{\mathrm{L(I+J)}}$ est dit réalisable si et seulement si :

a) $x^i \in \mathrm{X}^i(\bar{x}^i, y)$, $i = 1, \ldots, \mathrm{I}$

b) $y^j \in \mathrm{Y}^j(\bar{y}^j, x)$, $j = 1, \ldots, \mathrm{J}$

c) $\sum_{i=1}^{\mathrm{I}} x^i = \sum_{j=1}^{\mathrm{J}} y^j + \sum_{i=1}^{\mathrm{I}} w^i$.

3. UNE ECONOMIE AUXILIAIRE $\tilde{\mathcal{E}}$

Pour faciliter les notations, nous allons ranger les (I + J) agents économiques comme suit : l'indice k va de 1 à I pour les I consommateurs et de I + 1 à I + J pour les J producteurs. Il nous faut maintenant définir avec soins quelques nouvelles notations. Nous supposons que chaque composante de chaque vecteur de consommation ou de production a un effet externe sur tous les autres agents. Ce n'est qu'une potentialité (commode pour la symétrie des notations) qui ne se matérialisera que si les ensembles de consommation, les préordres de préférences et les ensembles de production dépendent réellement de ces variables externes. Lorsqu'ils n'en dépendront pas les prix associés dans la décentralisation seront nuls.

Soit x^{ik}_ℓ la consommation de bien ℓ par le consommateur i telle qu'elle est perçue par l'agent k (pour $k \neq i$), c'est-à-dire l'effet externe de la consommation de bien ℓ par le consommateur i sur l'agent k. Par définition, x^{ik}_ℓ sera la demande pour ce bien artificiel associé à l'effet externe. De plus, posons : (1)

$$x^{ik} = (x^{ik}_1, \ldots, x^{ik}_{\mathrm{L}}) \quad i = 1, \ldots, \mathrm{I}\ ;\ k = 1, \ldots, \mathrm{I+J},\ k \neq i.$$

$$x^{i\cdot} = (x^{i1}, \ldots, x^{i(i-1)}, x^{i(i+1)}, \ldots, x^{i\mathrm{I}}, x^{i(\mathrm{I}+1)}, \ldots, x^{i(\mathrm{I+J})})$$

$$i = 1, \ldots, \mathrm{I}.$$

$$x^{\cdot k} = (x^{1k}, \ldots, x^{(k-1)k}, x^{(k+1)k}, \ldots, x^{Ik}) \text{ si } k = 1, \ldots, I.$$
$$= (x^{1k}, \ldots, x^{Ik}) \text{ si } k = I+1, \ldots, I+J.$$

Soit y_ℓ^{jk} l'input (si négatif), l'output (si positif) de bien ℓ par le producteur j tel qu'il est perçu par l'agent k pour $k \neq I + j$, c'est-à-dire, l'effet externe de l'input ou de l'output de bien ℓ par le producteur j sur l'agent k. Par définition, y_ℓ^{jk} sera la demande pour le bien artificiel associé à cét effet externe. De plus, posons : (2)

$$y^{jk} = (y_1^{jk}, \ldots, y_L^{jk}), \; j = 1, \ldots, J; \; k = 1, \ldots, I+J; \; k \neq I + j.$$
$$y^{j\cdot} = (y^{j1}, \ldots, y^{jI}, y^{j(I+1)}, \ldots, y^{j(I+j-1)}, y^{j(I+j+1)}, \ldots, y^{j(I+J)}) \qquad j = 1, \ldots J.$$
$$y^{\cdot k} = (y^{1k}, \ldots, y^{Jk}) \qquad k = 1, \ldots, I.$$
$$= (y^{1k}, \ldots, y^{(k-I-1)k}, y^{(k-I+1)k}, \ldots, y^{Jk}) \qquad k = I+1, \ldots, I+J.$$

Dans l'économie $\widetilde{\mathscr{E}}$, nous dénombrons $L + L(I+J)(I+J-1)$ biens, les L biens de l'économie $\mathscr{E}$ et les $L(I+J)(I+J-1)$ biens artificiels associés aux effets externes. Nous pouvons définir les éléments de l'économie auxiliaire.

Les ensembles de consommation sont :

$$\widetilde{X}^i = \{x^i, -\mathring{x}^{\cdot i}, -\mathring{y}^{\cdot i}, x^{i\cdot} / x^i \in X^i(\mathring{x}^{\cdot i}, \mathring{y}^{\cdot i}), \; x^{ik} = x^i, \forall k \neq i\} \; (5) \qquad i = 1, \ldots, I.$$

où $-\mathring{x}_\ell^{ik}$ $(-\mathring{y}^{ik})$ est l'offre par l'agent k du bien artificiel associé à l'effet externe créé par la consommation (production) de bien ℓ par l'agent i sur l'agent k. Dans l'économie $\widetilde{\mathscr{E}}$, ce bien est demandé en quantité $|x_\ell^{ik}|$ par l'agent i. Des notations telles que (1) et (2) utilisées avec un $\circ$ ont donc une interprétation immédiate.

Nous avons évidemment :

$$\widetilde{X}^i \subset R^{L+2L(I+J-1)}$$

Soit $\widetilde{\underset{i}{\gtrsim}}$ l'extension canonique du préordre $\underset{i}{\gtrsim}$ à $\widetilde{X}^i$ pour $i = 1, \ldots, I$.

(5) Dans l'ensemble de consommation $\widetilde{X}^i$, il y a une contrainte "technologique" selon laquelle la consommation de bien ℓ par la consommateur i, x_ℓ^i, exige la consommation de $(I + J - 1)$ biens artificiels en égales quantités. Cependant, ces biens artificiels n'affectent pas les préférences.

Les ensembles de production sont :

$$Y^j = \{y^j, -\mathring{x}^{\cdot(I+j)}, -\mathring{y}^{\cdot(I+j)}, y^{j\cdot} / y^j \in Y^j(\mathring{x}^{\cdot(I+j)}, \mathring{y}^{\cdot(I+j)}), \; (6) \quad y^{jk} = y^j, \forall k \neq j\}$$

Nous avons :

$$\widetilde{Y}^j \subset R^{L+2L(I+J-1)}$$

Nous pouvons maintenant formuler les hypothèses sur l'économie $\mathscr{E}$ qui vont nous permettre de démontrer le premier théorème de décentralisation.

Hypothèse 1 : GX^i est convexe, $i = 1, \ldots, I$.

Hypothèse 2 : Pour tout $(x'^i, \bar{x}'^i, y') \in GX^i$, les ensembles

$$\{(x^i, \bar{x}^i, y) \in GX^i / (x^i, \bar{x}^i, y) \underset{i}{\gtrsim} (x'^i, \bar{x}'^i, y')\}$$

et

$$\{(x^i, \bar{x}^i, y) \in GX^i / (x'^i, \bar{x}'^i, y') \underset{i}{\gtrsim} (x^i, \bar{x}^i, y)\}$$

sont fermés, $i = 1, \ldots, I$.

Hypothèse 3 : Le préordre $\underset{i}{\gtrsim}$ est convexe, $i = 1, \ldots, I$.

Hypothèse 4 : GY^j est convexe, $j = 1, \ldots, J$.

Lemme 1 : Sous les hypothèses A1 à A4, $\widetilde{X}^i$ est convexe, $\widetilde{\underset{i}{\gtrsim}}$ est convexe et fermé dans $\widetilde{X}^i$, $i = 1, \ldots, I$, $\widetilde{Y}^j$ est convexe pour $j = 1, \ldots, J$.

Démonstration : évidente.

Un état de l'économie $\widetilde{\mathscr{E}}$, c'est-à-dire, un vecteur

$$(x, y, x^{1\cdot}, \ldots, x^{I\cdot}, y^{1\cdot}, \ldots, y^{J\cdot}, \mathring{x}^{1\cdot}, \ldots, \mathring{x}^{I\cdot}, \mathring{y}^{1\cdot}, \ldots, \mathring{y}^{J\cdot}) \in R^{L(I+J)+2L(I+J)(I+J-1)}$$

est réalisable si et seulement si :

a) $(x^i, -\mathring{x}^{\cdot i}, -\mathring{y}^{\cdot i}, x^{i\cdot}) \in \widetilde{X}^i$, $i = 1, \ldots, I$

b) $(y^j, -\mathring{x}^{\cdot(I+j)}, -\mathring{y}^{\cdot(I+j)}, y^{j\cdot}) \in \widetilde{Y}^j$, $j = 1, \ldots, J$

(6) Dans l'ensemble de production $\widetilde{Y}^j$, il y a une contrainte "technologique" qui impose pour l'utilisation ou production du bien ℓ par le producteur j une utilisation de $(I + J - 1)$ biens artificiels en égales quantités.

c) $\overset{\circ}{x}^{ik} = x^{ik}$ $\qquad i = 1, \ldots, \mathrm{I}, \ \forall k \neq i$

d) $\overset{\circ}{y}^{jk} = y^{jk}$ $\qquad j = 1, \ldots, \mathrm{J}, \ \forall k \neq j$

e) $\sum_{i=1}^{\mathrm{I}} x^i = \sum_{j=1}^{\mathrm{J}} y^j + \sum_{i=1}^{\mathrm{I}} w^i$

(c) et (d) expriment l'égalité de l'offre et de la demande pour les biens artificiels(7), (e) pour les biens ordinaires.

A partir de la définition de $\widetilde{\mathcal{E}}$, il est immédiat de voir qu'il y a une correspondance biunivoque entre les optima de Pareto de $\mathcal{E}$ et de $\widetilde{\mathcal{E}}$.

Soit :

$$\mathrm{P}^i(x^*, y^*) = \{(x, y)/(x^i, \overline{x}^i, y) \underset{i}{\gtrsim} (x^{*i}, \overline{x}^{*i}, y^*) \ \text{ et } \ x^i \in \mathrm{X}^i(\overline{x}^i, y)\} \qquad i = 1, \ldots, \mathrm{I}.$$

$$\mathrm{B}^j = \{(x, y)/y^j \in \mathrm{Y}^j(\overline{y}^j, x)\} \qquad j = 1, \ldots, \mathrm{J}.$$

Théorème 1 : Sous les hypothèses A1 à A4, si (x^*, y^*) est un optimum de Pareto de $\mathcal{E}$ tel qu'il existe un consommateur i pour lequel x^{*i} n'est pas une consommation de saturation et tel que (x^*, y^*) appartient à la frontière de $\mathrm{P}^i(x^*, y^*)$, $i = 1, \ldots, \mathrm{I}$, et à la frontière de B^j, $j = 1, \ldots, \mathrm{J}$, alors il existe un système de prix non trivial :

$$\widetilde{p} = (p, p^{1\cdot}, \ldots, p^{\mathrm{I}\cdot}, q^{1\cdot}, \ldots, q^{\mathrm{J}\cdot}) \in \mathrm{R}^{\mathrm{L}+(\mathrm{I}+\mathrm{J}-1)(\mathrm{I}+\mathrm{J})\mathrm{L}}$$

tel que :

a) $\widetilde{x}^{*i} = (x^{*i}, -\overset{\circ}{x}^{*\cdot i}, -\overset{\circ}{y}^{*\cdot i}, x^{*i\cdot})$ minime $\widetilde{p}\,\widetilde{x}^i$ dans

$$\mathrm{P}^i(\widetilde{x}^{*i}) = \{\widetilde{x}^i/\widetilde{x}^i \in \widetilde{\mathrm{X}}^i, \widetilde{x}^i \underset{i}{\widetilde{\gtrsim}} \widetilde{x}^{*i}\}$$

pour $i = 1, \ldots, \mathrm{I}$ et

b) $\widetilde{y}^{*j} = (y^{*j}, -\overset{\circ}{x}^{*\cdot(\mathrm{I}+j)}, -\overset{\circ}{y}^{*\cdot(\mathrm{I}+j)}, y^{*j\cdot})$ maxime $\widetilde{p}\,\widetilde{y}^j$ dans $\widetilde{\mathrm{Y}}^j$, $j = 1, \ldots, \mathrm{J}$.

Démonstration : Un optimum de Pareto de $\mathcal{E}$ est un optimum de Pareto de $\widetilde{\mathcal{E}}$. Dans $\widetilde{\mathcal{E}}$, nous pouvons appliquer le théorème de Debreu (1959, th. 6.4) qui nous donne le résultat excepté que nous savons seulement que $p \neq 0$. D'après la construction des ensembles de consommation $\widetilde{\mathrm{X}}^i$ et des ensembles de production $\widetilde{\mathrm{Y}}^j$, il est clair que ces ensembles sont inclus dans des sous espaces linéaires de $\mathrm{R}^{\mathrm{L}+(\mathrm{I}+\mathrm{J})(\mathrm{I}+\mathrm{J}-1)\mathrm{L}}$.

(7) La définition de l'offre et de la demande des biens artificiels est quelque peu arbitraire exante. Voir les commentaires sur l'interprétation des prix, ci-dessous.

Pour obtenir une décentralisation authentique nous voulons que $\widetilde{p}$ soit non trivial, c'est-à-dire ici, que l'hyperplan associé à $\widetilde{p}$ ne doit pas contenir un ensemble $\widetilde{\mathrm{P}}^i(\widetilde{x}^{*i})$ ou $\widetilde{\mathrm{Y}}^j$.

D'après Rockafellar (1970 th. 11.6) ceci exige que $\widetilde{x}^{*i}$ ne soit pas dans l'intérieur relatif de $\widetilde{\mathrm{P}}^i(\widetilde{x}^{*i})$ ou $\widetilde{y}^{*j}$ dans l'intérieur relatif de $\widetilde{\mathrm{Y}}^j$. Ceci est assuré si :

$$(x^*, y^*) \in \text{front. } \mathrm{P}^i(x^*, y^*) \qquad i = 1, \ldots, \mathrm{I}$$

$$(x^*, y^*) \in \text{front. } \mathrm{B}^j \qquad j = 1, \ldots, \mathrm{J}$$

Q.E.D.

Il est bien connu [voir Debreu (1959)] que, si $\widetilde{p}\,x^{*i} > \mathrm{Min}\ \widetilde{p}\,\widetilde{\mathrm{X}}^i$, (a) peut être remplacé par (a') $\widetilde{x}^{*i}$ est un élément maximal pour $\underset{i}{\widetilde{\gtrsim}}$ dans $\widetilde{\mathrm{P}}^i(\widetilde{x}^{*i})$. Si les revenus $\widetilde{\mathrm{R}}^i = \widetilde{p}\,\widetilde{x}^{*i}$, $i = 1, \ldots, \mathrm{I}$, sont distribués aux consommateurs, la conclusion du théorème 1 peut être reformulée en disant qu'à tout optimum de Pareto correspond un système de prix et de revenus dans $\widetilde{\mathcal{E}}$, tels que cette allocation est réalisée comme équilibre concurrentiel dans $\widetilde{\mathcal{E}}$ (appelé parfois pseudo équilibre).

Il est nécessaire de réfléchir maintenant à la signification de ce résultat. La définition de l'offre et de la demande pour les biens artificiels est quelque peu arbitraire parce que, ex ante, on ne sait pas exactement quelles vont être les formes des interdépendances hors marchés. Le plus simple est de dire qu'il y a deux parties sur chaque marché artificiel(8).

Si x^{*ik} est positif, p_{ℓ}^{ik} est le prix unitaire payé par le consommateur i à l'agent k pour l'externalité créée par le consommateur i sur l'agent k ; p_{ℓ}^{ik} est positif pour une externalité négative et négatif pour une externalité positive. Parfois, ex ante, on ne connaît pas le signe d'une externalité ; le signe de p_{ℓ}^{ik} permet alors de donner un signe local à l'externalité. Si au contraire x_{ℓ}^{*ik} est négatif, $-p_{\ell}^{ik}$ est le prix unitaire payé par le consommateur i à l'agent k pour l'externalité créée par le consommateur i sur l'agent k ; alors $-p_{\ell}^{ik}$ est positif pour une externalité négative, négatif pour une externalité positive. Une interprétation analogue peut être donnée aux prix associés aux externalités de production, (q^{jk}).

La décomposition de $\widetilde{p}\,\widetilde{x}^{*i}$ va nous permettre de comprendre la signification de chaque prix :

$$\widetilde{p}\,\widetilde{x}^{*i} = p\,x^{*i} - \sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^{\mathrm{I}} p^{i'i}\, x^{*i'i} - \sum_{j=1}^{\mathrm{J}} q^{ji}\, y^{*ji} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{\mathrm{I}+\mathrm{J}} p^{ik}\, x^{*ik}$$

(8) L'«étroitesse» du marché qui met en cause l'hypothèse de comportement concurrentiel a été soulignée par Wellisz (1964) et Arrow (1969).

$p x^{*i}$ est la dépense du consommateur i sur les marchés des biens

$$\ell = 1, \dots, L.$$

$\sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^{I} p^{i'i} x^{*i'i}$ est la dépense (ou recette) du consommateur i sur les marchés artificiels dus aux externalités de consommation des autres consommateurs sur lui.

$\sum_{j=1}^{J} q^{ji} y^{*ji}$ est la dépense (ou recette) du consommateur i sur les marchés artificiels dus aux externalités de production des producteurs sur lui.

$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{I+J} p^{ik} x^{*ik}$ est la dépense (ou recette) du consommateur i sur les marchés artificiels dus aux externalités de consommation qu'il crée sur les autres agents.

De façon analogue :

$$\widetilde{p}\,\widetilde{y}^{*j} = p y^j - \sum_{i=1}^{I} p^{i(I+j)} x^{*i(I+j)} - \sum_{\substack{j'=1 \\ j' \neq j}}^{J} q^{j'(I+j)} y^{*j'(I+j)} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq I+j}}^{I+J} q^{jk} y^{*jk}$$

dont l'interprétation est laissée au lecteur.

En plus des hypothèses de convexité auxquelles nous reviendrons dans la dernière section, la seule hypothèse notable concerne l'appartenance de l'optimum de Pareto aux frontières des ensembles $P^i(x^*, y^*)$, $i = 1, \dots, I$ et B^j, $j = 1, \dots, J$. Comme l'a observé Starrett (1972), cette hypothèse est satisfaite en l'absence d'externalités par une simple hypothèse de non satiété. Avec des effets externes la situation est plus délicate comme l'ont noté Murakami et Negishi (1964) qui ont donné l'exemple d'un optimum de Pareto dans lequel une entreprise est inefficace. Starrett (1972) a mentionné l'exemple de jalousie réciproque qui peut aussi conduire à un optimum de Pareto intérieur à l'ensemble des réalisables. Nous donnons ci-dessous un nouvel exemple plus simple que celui de Negishi et Murakami qui devrait clarifier ce point.

Considérons une économie à trois biens avec un seul consommateur dont la fonction d'utilité est $x_1 (x_2)^3$ et deux entreprises qui produisent les biens 1 et 2 à partir du bien 3 disponible en quantité 1. Les ensembles de production de ces entreprises sont :

$$Y^1 = \{(y_1^1, y_3^1) / y_1^1 \leqslant -y_3^1, -y_3^1 \geqslant 0\}$$

et : $$Y^2(y_3^1, y_1^1) = \left\{ (y_2^2, y_3^2) / y_2^2 \leqslant -y_3^2 \left[1 + \mathrm{Min}\left(\frac{1}{2}, \left(-\frac{y_3^1}{y_1^1}\right) - 1\right) \right], -y_3^2 \geqslant 0 \right\}$$

L'optimum de Pareto est obtenu comme solution du programme :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Max}\; x_1 (x_2)^3 \\ &y_1^1 \leqslant -y_3^1 \\ &y_2^2 \leqslant -y_3^2 \left[1 + \mathrm{Min}\left(\frac{1}{2}, \left(-\frac{y_3^1}{y_1^1}\right) - 1\right) \right] \\ &x_1 = y_1^1 \\ &x_2 = y_2^2 \\ &y_3^1, y_3^2 \leqslant 0 \\ &-y_3^1 - y_3^2 = 1 \end{aligned}$$

L'optimum (E_1, E_2) sur la figure 1 est défini par :

$$-y_3^1 = \frac{1}{4} \;;\; -y_3^2 = \frac{3}{4}$$

$$x_1 = y_1^1 = \frac{1}{6} \;;\; x_2 = y_2^2 = 3^2/2^3$$

L'entreprise 1 est inefficace. Il est facile de le comprendre si l'on inspecte les ensembles de production. L'entreprise 1 créé par son input

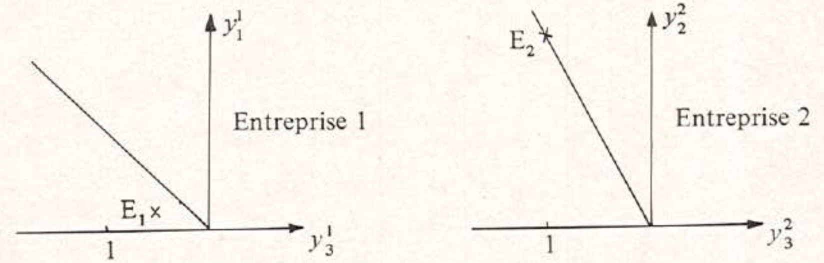

Fig. 1

y_3^1 une externalité négative sur l'entreprise 2 et une externalité négative par son output. Puisque le bien 2 est le plus apprécié il est préférable de détruire une partie du bien 1. Une autre interprétation peut être que cette part de l'input y_3^1 est utilisée pour diminuer l'impact de l'externalité négative (construction d'une cheminée plus haute).

Sur la figure 1, on voit clairement que le vecteur de production E^1 de l'entreprise 1 est intérieur à son ensemble de production. Il n'existe donc pas de système de prix non trivial qui permette d'atteindre E^1. Il n'y a pas de décentralisation possible.

4. UNE AUTRE ECONOMIE AUXILIAIRE $\hat{\mathcal{E}}$

La décentralisation réalisée dans la section 3 a deux inconvénients majeurs. D'abord, elle exige des hypothèses de convexité très fortes ; ensuite, elle nécessite des marchés artificiels concurrentiels alors que l'hypothèse de comportement concurrentiel sur ces marchés est très douteuse.

Dans cette section, nous démontrons l'existence d'une décentralisation plus faible qui nécessite des hypothèses de convexité moins fortes et qui n'a pas recours aux marchés artificiels. Les deux formes de décentralisation sont ensuite comparées.

Hypothèse 5 : La correspondance ensemble de consommation $X^i(.)$ est à valeurs convexes, $i = 1, \dots, I$.

Hypothèse 6 : Pour tout $(x'^i, \bar{x}'^i, y') \in GX^i$, les ensembles :

$$\{x^i / x^i \in X^i(\bar{x}'^i, y') \quad \text{et} \quad (x^i, \bar{x}'^i, y') \underset{i}{\gtrsim} (x'^i, \bar{x}'^i, y')\}$$

et :

$$\{x^i / x^i \in X^i(\bar{x}'^i, y') \quad \text{et} \quad (x'^i, \bar{x}'^i, y') \underset{i}{\gtrsim} (x^i, x'^i, y')\}$$

sont fermés.

Hypothèse 7 : Pour tout $(\bar{x}^i, y)$, la restriction de $\underset{i}{\gtrsim}$ à $X^i(\bar{x}^i, y)$ est convexe.

Hypothèse 8 : La correspondance ensemble de production $Y^j(.)$ est à valeurs convexes, $j = 1, \dots, J$.

En utilisant les mêmes principes de notations qu'à la section 3, nous pouvons maintenant définir les éléments de l'économie $\hat{\mathcal{E}}$.

La correspondance ensemble de consommation est :

$$\hat{X}^i(x^{\cdot i}, y^{\cdot i}) = \{(x^i, x^{i\cdot}) / x^i \in X^i(x^{\cdot i}, y^{\cdot i}) \ , \quad x^{ik} = x^i \ , \ \forall k \neq i\} \ , \ i = 1, \dots, I.$$

$\hat{X}^i(.)$ est une correspondance de $\mathbf{R}^{L(I-1)+LJ}$ dans $\mathbf{R}^{L(I+J)}$ et $\underset{i}{\hat{\gtrsim}}$ est l'extension canonique à $\hat{X}^i(.)$ de la restriction de $\underset{i}{\gtrsim}$ définie dans l'hypothèse 7.

La correspondance de production est :

$$\hat{Y}^j(x^{\cdot(I+j)}, y^{\cdot(I+j)}) = \{(y^j, y^{j\cdot}) / y^j \in Y^j(x^{\cdot(I+j)}, y^{\cdot(I+j)}) \ , \ y^{jk} = y^j \ , \ \forall k \neq j\} \ , \ j = 1, \dots, J.$$

$\hat{Y}^j$ est une correspondance de $\mathbf{R}^{LI+L(J-1)}$ dans $\mathbf{R}^{L(I+J)}$.

Lemme 2 : Sous les hypothèses A5 à A8, $\hat{X}^i(.)$ est à valeurs convexes, $\underset{i}{\hat{\gtrsim}}(.)$ est à valeurs convexes et fermées dans $\hat{X}^i(.)$, $i = 1, \dots, I$ et $\hat{Y}^j(.)$ est à valeurs convexes, $j = 1, \dots, J$.

Démonstration évidente.

Un état réalisable de $\hat{\mathcal{E}}$ est un vecteur

$$(x, y, x^{1\cdot}, \dots, x^{I\cdot}, y^{1\cdot}, \dots, y^{J\cdot}) \in \mathbf{R}^{L(I+J)+(I+J-1)(I+J)L}$$

tel que :

a) $(x^i, x^{i\cdot}) \in \hat{X}^i(x^{\cdot i}, y^{\cdot i})$, $i = 1, \dots, I$

b) $(y^j, y^{j\cdot}) \in \hat{Y}^j(x^{\cdot(I+j)}, y^{\cdot(I+j)})$, $j = 1, \dots, J$

c) $\sum_{i=1}^{I} x^i = \sum_{j=1}^{J} y^j + \sum_{i=1}^{I} w^i$

Il est immédiat de voir qu'il existe une correspondance biunivoque entre les optima de $\mathcal{E}$ et de $\hat{\mathcal{E}}$.

Théorème 2 : Sous les hypothèses A5 à A8, si (x^*, y^*) est un optimum de Pareto de $\mathcal{E}$, tel qu'il existe un consommateur i pour lequel x^{*i} n'est pas une consommation de saturation et tel que $(x^*, y^*) \in \text{front } P^i(x^*, y^*)$, $i = 1, \ldots, I$ et $(x^*, y^*) \in \text{front } B^j, j = 1, \ldots, J$, alors il existe un système de prix non trivial,

$$\hat{p} = (p, p^{1\cdot}, \ldots, p^{I\cdot}, q^{1\cdot}, \ldots, q^{J\cdot}) \in R^{L+(I+J-1)(I+J)L}$$

tel que :

(1) $\hat{x}^{*i} = (x^{*i}, x^{*i\cdot})$ minime $\hat{p}\,\hat{x}^i$ dans

$$\{\hat{x}^i / \hat{x}^i \in \hat{X}^i(x^{*.i}, y^{*.i}) \ , \ \hat{x}^i \underset{i}{\gtrsim} \hat{x}^{*i}\} \ , \ i = 1, \ldots, I.$$

(2) $\hat{y}^{*j} = (y^{*j}, y^{*j\cdot})$ maxime $\hat{p}\,\hat{y}^j$ dans

$$\{\hat{y}^j / \hat{y}^j \in \hat{Y}^j(x^{*.(I+j)}, y^{*.(I+j)})\} \ , \ j = 1, \ldots, J.$$

La démonstration est analogue à la démonstration du théorème 1.

Par rapport au théorème 1, chaque agent maxime sa «fonction objectif» dans la section de l'ensemble considéré dans l'économie $\widetilde{\mathcal{E}}$. Par exemple,

$$\hat{x}^i \in \hat{X}^i(x^{*.i}, y^{*.i}) = \widetilde{X}^i \cap \Delta^i$$

où $$\Delta^i = \{\widetilde{x}^i = (x^i, x^{\cdot i}, y^{\cdot i}, x^{i\cdot}) / x^{\cdot i} = -x^{*.i}, y^{\cdot i} = -y^{*.i}\}$$

Il suffit que cette section soit convexe pour avoir cette deuxième forme (affaiblie) de décentralisation. Interprétons le système de prix :

$$\hat{p}\,\hat{x}^{*i} = p\,x^{*i} + \sum_{\substack{k \neq i \\ k=1}}^{I+J} p^{ik}\,x^{*ik}$$

Mais, $x^{*ik} = x^{*i}$, $k = 1, \ldots, I + J$, $k \neq i$, donc

$$\hat{p}\,\hat{x}^{*i} = \Big(p + \sum_{\substack{k \neq i \\ k=1}}^{I+J} p^{ik}\Big)\,x^{*i}$$

Il n'y a plus maintenant de marchés artificiels sur lesquels les prix p^{ik} pourraient émerger. p^{ik}_ℓ doit donc être interprété comme une taxe (ou une subvention) imposée à l'agent i pour l'externalité qu'il cause sur l'agent k par son utilisation du bien ℓ. Il suffit que l'agent connaisse en fait $t^i_\ell = \sum_{\substack{k \neq i \\ k=1}}^{I+J} p^{ik}_\ell$ pour définir son comportement.

Si $\hat{p}\,\hat{x}^{*i} > \text{Min } \hat{p}\,\hat{X}^i(x^{*.i}, y^{*.i})$, $i = 1, \ldots, I$, la conclusion du théorème 2 peut être reprise en disant qu'à chaque optimum de Pareto correspond un système de prix pour les biens $(1, \ldots, L)$, des taxes personnalisées t^i_ℓ et des revenus $\hat{R}^i = \hat{p}\,\hat{x}^{*i}$ tels que cette allocation peut être réalisée comme équilibre non-coopératif avec taxes (nous disons non coopératif parce que les agents doivent considérer les actions des autres comme fixées).

Des taxes (ou subventions) doivent être imposées aux agents qui créent les externalités. C'est en ce sens que la décentralisation est seulement partielle.

Puisque les hypothèses 1 à 4 impliquent les hypothèses 5 à 8, il est clair que lorsque une décentralisation totale est possible avec des marchés artificiels, une décentralisation partielle avec taxes (qui peuvent être obtenues à partir des prix sur les marchés artificiels) est aussi possible[9]. Le contraire n'est pas vrai. De plus, pour atteindre le même optimum de Pareto, les revenus des deux procédures doivent être liés par :

$$\hat{R}^i = \widetilde{R}^i + \sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^{I} p^{i'i}\,x^{*i'i} + \sum_{j=1}^{J} q^{ji}\,y^{*ji} \ , \ i = 1, \ldots, I.$$

Dans le premier type de décentralisation, les agents qui subissent des externalités sont automatiquement compensés, mais ce n'est pas nécessairement le cas dans la décentralisation avec taxes.

5. COMMENTAIRES SUR LES HYPOTHESES

A) Convexité

Les hypothèses de convexité de la section 3 sont très fortes. Considérons tout d'abord les producteurs et l'hypothèse GY^j convexe. Il sera plus facile d'interpréter cette hypothèse sur un exemple.

(9) Nous utilisons le résultat élémentaire selon lequel si

$$f(x^*, y^*) \geqslant f(x, y) \ , \ \forall (x, y) \in Z,$$

alors $$f(x^*, y^*) \geqslant f(x, y^*) \ , \forall (x, y^*) \in Z.$$

Soit une entreprise qui produit le bien 1 avec un input en bien 2 et qui reçoit une externalité. Supposons tout d'abord que l'externalité est positive ; elle peut alors être considérée comme un input supplémentaire (voir figure 2). L'hypothèse de convexité nous dit simplement que tous les inputs (input classique et externalité) doivent avoir des rendements décroissants, une hypothèse très usuelle. Au contraire lorsque l'externalité est négative, il y a un non convexité fondamentale. Une externalité négative décroît l'ensemble de production de l'entreprise, mais il y a une limite à cet effet destructif puisque le pire qui puisse arriver est que l'entreprise soit incapable de produire (fig. 3, 4). Notons qu'il existe un cas analogue pour les effets positifs, qui se produit lorsqu'un niveau minimum d'externalité positive est nécessaire pour qu'une entreprise soit en mesure de produire (fig. 5). Il est facile maintenant de comprendre pourquoi une décentralisation complète est impossible en présence d'externalités négatives.

Supposons que le point A (fig. 3) et le point B (fig. 4b) représentent des optima. Le prix d'externalité qui supporte ces points est positif. Le comportement optimal de l'entreprise est donc de demander une quantité infinie d'externalité et de ne rien produire, ce qui lui assure un profit

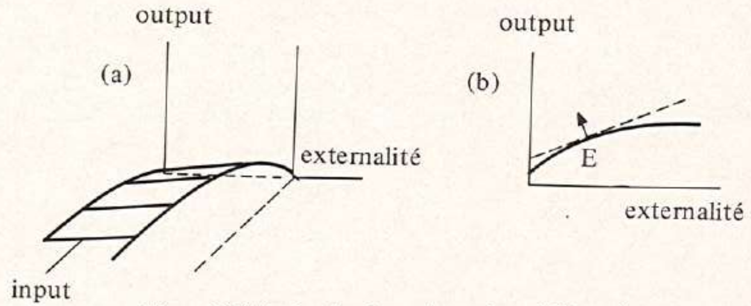

Figure 2 [(b) : Section à un niveau donné d'input].

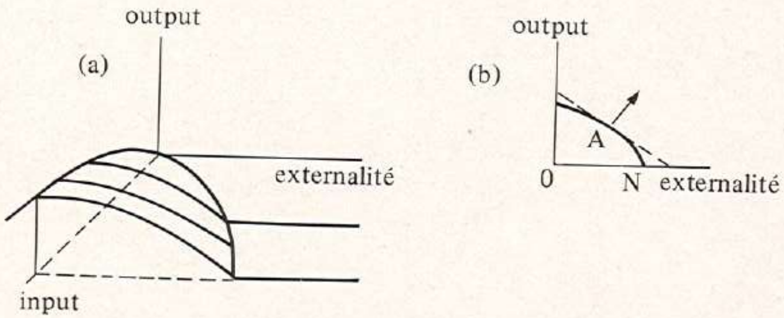

Figure 3 [(b) : Section à un niveau donné d'input].

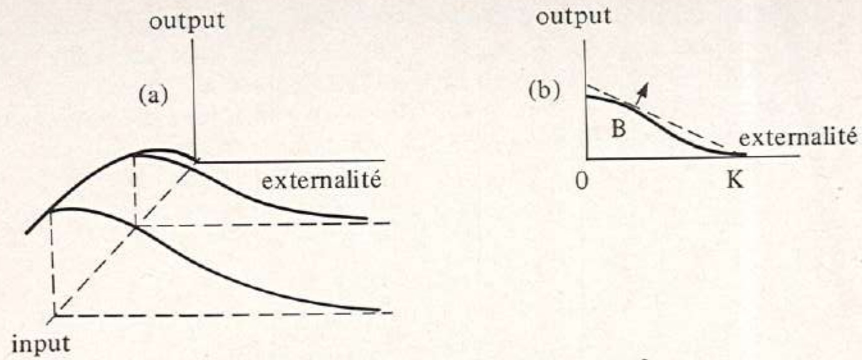

Figure 4 [(b) : Section à un niveau donné d'input].

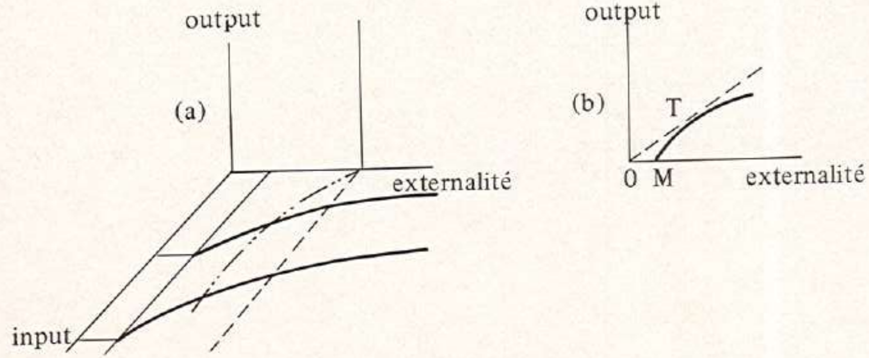

Figure 5 [(b) : Section à un niveau donné d'input].

infini. Une solution de court terme serait (fig. 3b) d'imposer sur la demande d'externalité du producteur une limite supérieure qui soit inférieure à ON.

Dans le cas de non-convexité avec des externalités positives (fig. 5b), les points entre M et T ne peuvent être supportés, mais les points au-delà de T le peuvent. Au contraire, nous voyons que le point E (fig. 2b) peut être supporté sous l'hypothèse de convexité.

Considérons maintenant le cas des consommateurs ; ils peuvent être affectés par des externalités de deux façons, par l'intermédiaire de leurs ensembles de consommation ou de leurs préférences. En général, un ensemble de consommation est borné inférieurement mais pas supérieurement. Les effets externes vont donc affecter les bornes inférieures. Même avec des externalités négatives on n'a pas nécessairement une non-convexité ; c'est aussi le cas pour les effets externes sur les préférences.

Cependant, Starrett et Zeckhauser (1971) ont souligné la possibilité d'une non-convexité si le consommateur peut échapper à une externalité négative. Supposons qu'une externalité ne soit imposée sur l'agent i que s'il consomme le bien 1. Or le bien 1 n'est pas un bien essentiel et peut être substitué par du bien 2, par exemple si :

$$U^i = x_1^i + \frac{1}{1 + x^{ji}} f(x_2^i)$$

où x^{ji} est la variable représentant l'externalité.

Considérons la figure 6. Les points J, I, K, L, M, N sont tous sur la même courbe d'indifférence. Soit OM le niveau de bien 2 qui compense l'agent i pour sa consommation OI de bien 1 sans externalité. Puisque nous pouvons nous déplacer indéfiniment dans la direction MN, la surface d'indifférence ne peut être globalement concave. Ceci empêche de décentraliser dans la plupart des cas puisque pour tout prix positif de l'externalité le consommateur i voudra vendre une quantité infinie d'«externalité» en utilisant les recettes pour acheter du bien 2. Cependant, cette non convexité n'apparaît pas comme aussi fondamentale que la non convexité créée par les effets externes négatifs dans la production.

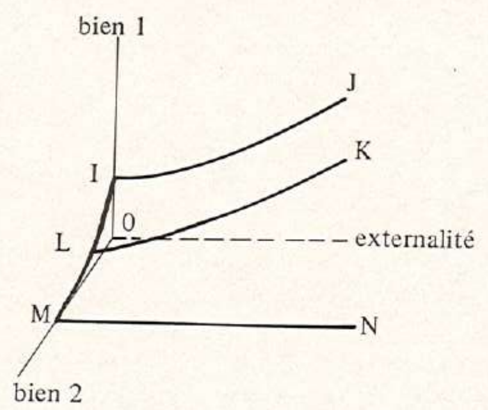

Figure 6

Rappelons enfin que nous avons donné au Chapitre II, section 4, un exemple où une externalité cause la non convexité des valeurs de la correspondance de production $X^j(.)$ de l'économie $\hat{\mathcal{E}}$, ce qui empêche les deux formes de décentralisation (seules des décentralisations locales sont alors possibles).

B) Ressources initiales dans les économies auxiliaires

Jusqu'à la contribution de Coase (1960) il était naturel, à la suite de Pigou (1920), de considérer la situation sans externalités comme la situation de référence. Par conséquent, on supposait que le pollué avait le *droit* à un environnement propre et le pollueur était taxé. Symétriquement, les créateurs d'externalités positives devaient être subventionnés. Dans les sections précédentes, nous avons adopté ce point de vue puisque les quantités échangées sur les marchés artificiels étaient définies par :

$$x_\ell^{ik} = x_\ell^i \,, \; i = 1, \ldots, I \,, \quad k = 1, \ldots, I + J \,, k \neq i \,;$$
$$\ell = 1, \ldots, L$$

On peut évidemment mesurer l'externalité à partir d'une autre situation de référence, par exemple N_ℓ^{ik} ; alors $x_\ell^{ik} = x_\ell^i - N_\ell^{ik}$. (voir Coase (1960) pour des exemples concrets qui justifient parfois ce point de vue).

Si l'externalité de l'agent i sur l'agent k est négative, cette démarche signifie que l'agent i a le droit à une externalité N_ℓ^{ik}. Au-dessous de ce niveau, il doit être subventionné par l'agent k pour ne pas avoir pollué autant qu'il le pourrait ; au-delà de N_ℓ^{ik} il doit acheter à l'agent k le droit de produire davantage d'effet externe.

Notons que la distribution de droits $N_\ell^{ik} \neq 0$ ne résout pas les non-convexités mentionnées ci-dessus.

Avec des externalités positives, il est possible de décentraliser les optima parétiens avec des niveaux de droits N_ℓ^{ik} différents de zéro. Supposons que la consommation de bien ℓ par l'agent i affecte positivement l'agent k. Avec des droits nuls, l'agent k doit payer $p_\ell^{ik} x_\ell^{*ik}$. Maintenant, il doit payer seulement $p_\ell^{ik} (x_\ell^{*ik} - N_\ell^{ik})$. Si $x_\ell^{*ik} < N_\ell^{ik}$ l'agent i doit subventionner l'agent j d'un montant $p_\ell^{ik} (x_\ell^{*ik} - N_\ell^{ik})$ pour ne pas avoir produit suffisamment d'externalité positive. Au contraire, si $x_\ell^{*ik} > N_\ell^{ik}$, l'agent i reçoit $p_\ell^{ik} (x_\ell^{*ik} - N_\ell^{ik})$ à l'équilibre.

L'attribution de droits est politique et ne compromet pas l'optimalité parétienne ; elle a seulement des effets distributifs. L'attribution de droits aux entreprises pourrait ne pas changer l'équilibre(10) puisqu'elle ne fait que translater les fonctions objectifs des entrepreneurs ; cependant, elle a un impact sur les revenus des consommateurs par la distribution des profits et donc peut changer l'équilibre. De même, l'attribution de droits aux consommateurs change l'équilibre. Dans le court terme, lorsque la décision d'être un producteur ou un consommateur dans une zone

(10) Par équilibre, nous entendons ici le pseudo équilibre concurrentiel qui est l'équilibre concurrentiel de l'économie $\tilde{\mathcal{E}}$.

juridique donnée n'est pas en jeu, l'effet est purement redistributif. Cependant, l'attribution de droits peut affecter le comportement de long terme, puisque une distribution de droits peut transformer des profits positifs en profits négatifs, ce qui conduit à la disparition d'entreprises ; de même, cela peut conduire à la fuite de certains consommateurs.

CHAPITRE IV

EXTERNALITÉS ET SECOND RANG

1. INTRODUCTION

Nous avons vu au Chapitre III comment on peut décentraliser les optima parétiens d'une économie avec effets externes, sous des hypothèses appropriées de convexité et lorsqu'on dispose d'outils très étendus de politique économique. Dans la décentralisation du premier type (Ch. III, section 3), les hypothèses de convexité sont particulièrement fortes et de plus on suppose un comportement concurrentiel sur les marchés de droits associés aux effets externes qui ne comportent qu'un acheteur et qu'un vendeur. Dans la décentralisation du deuxième type, les hypothèses de convexité sont moins fortes mais il faut disposer de taxes personnalisées dont le calcul pose de délicats problèmes sauf si l'on réintroduit les hypothèses fortes de convexité associées au premier type de décentralisation. Dans les deux cas on suppose que des transferts forfaitaires sont possibles et qu'il est facile d'établir une relation bien définie entre l'effet externe et un input ou un output d'une entreprise ou une consommation d'un agent. Enfin, l'hypothèse de comportement concurrentiel sur tous les marchés ordinaires est bien sûr conservée.

Il faut donc être très prudent dans l'interprétation des résultats du Chapitre III, et ne pas se lancer dans la formulation de politiques économiques trop hâtives. L'objectif de ce chapitre n'est pas de parvenir à un corps de doctrines de politiques économiques directement applicables mais d'étudier avec un modèle simplifié l'impact, sur les politiques «pigouviennes» dégagées au Chapitre III, de certaines contraintes qui limitent les moyens d'intervention de l'Etat.

A partir de solutions de premier rang développées au Chapitre III, nous allons formuler un certain nombre de modèles de second rang associés à diverses contraintes. Deux approches sont possibles lorsqu'on aborde des problèmes de second rang. Ou bien on adopte une formulation très générale du problème et dans ce cas on ne parvient qu'à un nombre limité de résultats de portée générale ; ou bien on étudie des exemples pour acquérir une intuition des forces qualitatives en jeu, mais alors on risque de ne parvenir qu'à des résultats très spécifiques voire trompeurs. Nous utiliserons ici les deux approches.

Dans la section 2 nous présentons un modèle inspiré de Sandmo [1975] qui est un cas particulier de notre modèle général pour simplifier quelque peu l'exposé. Seuls les effets externes de consommation y seront représentés ; toutefois la méthodologie adoptée dans ce chapitre est tout à fait générale. La section 3 nous permet de retrouver selon une méthode différente les résultats du Chapitre III, section 4, à savoir la possibilité d'atteindre l'optimalité parétienne de premier rang sous des hypothèses appropriées. Dans la section 4 nous supposons qu'il est impossible de mettre en œuvre des taxes indirectes personnalisées et nous en étudions les conséquences. La section 5 expose un cas particulier où la taxe uniforme optimale peut être calculée et comparée aux taxes personnalisées optimales. La section 6 étudie le cas où le système de taxes indirectes doit permettre à l'Etat de dégager des fonds pour financer une activité quelconque. Enfin, l'hypothèse de comportement concurrentiel est supprimée dans la section 7.

2. LE MODELE

Nous considérons une économie à L + 2 biens et I consommateurs. Le bien 0, le travail, est fourni par les consommateurs à un secteur productif concurrentiel qui produit les L + 1 autres biens, et qui est représenté par souci de simplification par une technologie de Léontief à coefficients constants a_ℓ, $\ell = 1, \ldots, L+1$.

Soit, X_ℓ, $\ell = 1, \ldots, L+1$ la production de bien ℓ.

Seule la consommation du bien L + 1 crée des effets externes sur les préférences des consommateurs.

Soit x^i_ℓ la consommation du bien ℓ par le consommateur i,

$$\ell = 1, \ldots, L+1\ ,\ i = 1, \ldots, I.$$

On suppose que chaque consommateur dispose d'une unité de travail et soit $1 - x^i_0$ sa consommation de loisir.

La fonction d'utilité de l'agent i s'écrit par suite :

$$U^i(1 - x^i_0\,, x^i\,, x^i_{L+1}\,, \overline{x}^i_{L+1})$$

où :

$$x^i = (x^i_1\,, \ldots, x^i_L)$$

$$\overline{x}^i_{L+1} = (x^1_{L+1}\,, \ldots, x^{i-1}_{L+1}\,, x^{i+1}_{L+1}\,, \ldots, x^I_{L+1})$$

Hypothèse 1 : La fonction d'utilité U^i est croissante, strictement concave et définie sur un ensemble de consommation convexe, $i = 1, \ldots, I$.

Un mot d'explication est nécessaire pour justifier la forme de la fonction d'utilité indirecte que nous allons utiliser.

Le comportement primal du consommateur est défini par :

$$\text{Max } U^i(1 - x^i_0, x^i\,, x^i_{L+1}\,, \overline{x}^i_{L+1})$$

tel que :

$$\pi x^i + \pi_{L+1}\, x^i_{L+1} = x^i_0 + R^i$$

où :

$$(-1\,, \pi_1\,, \ldots, \pi_L\,, \pi_{L+1}) = (-1\,, \pi\,, \pi_{L+1})$$

est le système de prix à la consommation, le prix du bien 0 ayant été normalisé à -1 et R^i est le revenu forfaitaire du consommateur i.

Soit $\xi^i_\ell(\pi\,, \pi_{L+1}\,, R^i\,, \overline{x}^i_{L+1})$, $\ell = 0, \ldots, L+1$, le vecteur de fonctions de demande du consommateur i lorsqu'il a un comportement paramétrique vis-à-vis des prix et des effets externes. En substituant ces fonctions dans la fonction d'utilité directe, on obtient la fonction d'utilité indirecte :

$$U^i(1 - \xi^i_0(\pi\,, \pi_{L+1}\,, R^i\,, \overline{x}^i_{L+1})\ ,\ \xi^i(\pi\,, \pi_{L+1}\,, R^i\,, \overline{x}^i_{L+1})\ ,\ \overline{x}^i_{L+1})$$

que l'on peut réécrire :

$$V^i(\pi\,, \pi_{L+1}\,, R^i\,, \overline{x}^i_{L+1})$$

Hypothèse 2 : La fonction d'utilité indirecte $V^i(.)$ et les fonctions de demande $\xi^i_\ell(.)$, $\ell = 0, \ldots, L+1$, du consommateur i sont différentiables, $i = 1, \ldots, I$, à l'intérieur de leurs domaines.

Une autre notion de fonction d'utilité indirecte est en général utilisée dans la littérature ; le programme de maximation individuel ci-dessus conduit aux conditions du premier ordre pour chaque consommateur i :

$$-\frac{\dfrac{\partial U^i}{\partial x^i_\ell}(1 - x^i_0\,, x^i\,, x^i_{L+1}\,, \overline{x}^i_{L+1})}{\dfrac{\partial U^i}{\partial x^i_0}(1 - x^i_0\,, x^i\,, x^i_{L+1}\,, \overline{x}^i_{L+1})} = \pi_\ell \qquad \ell = 1, \ldots, L$$

$$-\frac{\dfrac{\partial U^i}{\partial x^i_{L+1}}(1 - x^i_0, x^i, x^i_{L+1}, \bar{x}^i_{L+1})}{\dfrac{\partial U^i}{\partial x^i_0}(1 - x^i_0, x^i, x^i_{L+1}, \bar{x}^i_{L+1})} = \pi_{L+1} \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, I$$

Ce système d'équations, avec les contraintes budgétaires, est alors résolu *simultanément* pour obtenir des fonctions de demande $\xi^i(\pi, \pi_{L+1}, R^i)$ qui ne dépendent plus des effets externes. Nous donnerons un exemple de cette approche dans la section 7.

Hypothèse 3 : Les matrices (L + 2 , L + 2) suivantes, qui sont les matrices des effets prix compensés sur les demandes individuelles et agrégées sont de rang L + 1.

$$s^i_{\ell k} = \frac{\partial \xi^i_\ell}{\partial t_k} + \xi^i_k \frac{\partial \xi^i_\ell}{\partial R^i} \qquad i = 1, \ldots, I$$

$$S_{\ell k} = \sum_{i=1}^{I} s^i_{\ell k}$$

où $(t_0, t_1, \ldots, t_{L+1})$ est le système de taxes indirectes.

3. DECENTRALISATION DES OPTIMA DE PREMIER RANG

Dans cette section, nous allons retrouver un résultat du chapitre III, à savoir, la possibilité, sous des hypothèses appropriées de convexité, de décentraliser les optima parétiens lorsqu'on dispose de taxes indirectes personnalisées et de transferts forfaitaires dans une économie où les agents ont un comportement concurrentiel. La formulation adoptée ici nous permettra ensuite d'envisager les conséquences d'une limitation des outils de politique économique ainsi que de l'imposition de contraintes diverses.

Les optima parétiens(1) de l'économie décrite dans la section précédente sont caractérisés par le programme suivant :

(1) Nous nous intéressons seulement aux optima intérieurs. De plus, nous supposons dans tout le chapitre que les conditions de régularité du théorème de Kuhn et Tucker sont remplies.

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{I} \alpha^i U^i(1 - x^i_0, x^i, x^i_{L+1}, \bar{x}^i_{L+1})$$

(1) $$\sum_{i=1}^{I} x^i_0 = \sum_{\ell=1}^{L} a_\ell X_\ell + a_{L+1} X_{L+1}$$

(2) $$\sum_{i=1}^{I} x^i_\ell = X_\ell \qquad \ell = 1, \ldots, L$$

(3) $$\sum_{i=1}^{I} x^i_{L+1} = X_{L+1}$$

Soit $\lambda_0, \lambda_\ell, \ell = 1, \ldots, L, \lambda_{L+1}$, les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes (1) (2) (3)

Les conditions du premier ordre d'optimalité du programme ci-dessus, qui sont suffisantes sous les hypothèses de la section 2, s'écrivent :

(4) $$\alpha^i \frac{\partial U^i}{\partial x^i_0} + \lambda_0 = 0 \ , \ i = 1, \ldots, I$$

(5) $$\alpha^i \frac{\partial U^i}{\partial x^i_\ell} - \lambda_\ell = 0 \ , \ i = 1, \ldots, I \ ; \ \ell = 1, \ldots, L$$

(6) $$\alpha^i \frac{\partial U^i}{\partial x^i_{L+1}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{I} \alpha^j \frac{\partial U^j}{\partial x^i_{L+1}} - \lambda_{L+1} = 0 \ , \ i = 1, \ldots, I$$

(7) $$-a_\ell \lambda_0 + \lambda_\ell = 0 \ , \ \ell = 1, \ldots, L$$

(8) $$-a_{L+1} \lambda_0 + \lambda_{L+1} = 0$$

En combinant (1) (2) avec (4) et (3) avec (5), on obtient immédiatement les conditions d'optimalité parétienne de premier rang :

(9) $$a_\ell = -\frac{\partial U^i/\partial x^i_\ell}{\partial U^i/\partial x^i_0} \ , \ \ell = 1, \ldots, L \ ; \ i = 1, \ldots, I$$

(10) $$a_{L+1} = \sum_{i=1}^{I} -\frac{\partial U^i/\partial x^j_{L+1}}{\partial U^i/\partial x^i_0} \ , \ j = 1, \ldots, I$$

Considérons maintenant le programme de maximation de l'Etat qui désire choisir un système de prix, des taxes personnalisées, des transferts forfaitaires et désire annoncer à chaque agent qui subit une externalité, ou en bénéficie, le niveau de cette variable externe de façon à pouvoir décentraliser les optima parétiens(2). En formulant ce programme, le centre suppose que les agents ont un comportement concurrentiel sur tous les marchés et un comportement paramétrique vis-à-vis des taxes indirectes.

Dans le programme général, nous nous accordons a priori la possibilité d'avoir des taxes personnalisées sur tous les biens :

$$\operatorname{Max} \sum_{i=1}^{I} \alpha^i V^i (p + t^i, p_{L+1} + t^i_{L+1}, \bar{x}^i_{L+1}, R^i)$$

$$(11) \quad \sum_{i=1}^{I} \xi^i_\ell (p + t^i, p_{L+1} + t^i_{L+1}, \bar{x}^i_{L+1}, R^i) = X_\ell \quad , \quad \ell = 1, \dots, L$$

$$(12) \quad \sum_{i=1}^{I} \xi^i_{L+1} (p + t^i, p_{L+1} + t^i_{L+1}, \bar{x}^i_{L+1}, R^i) = X_{L+1}$$

$$(13) \quad \sum_{i=1}^{I} \xi^i_0 (p + t^i, p_{L+1} + t^i_{L+1}, \bar{x}^i_{L+1}, R^i) = \sum_{\ell=1}^{L} a_\ell X_\ell + a_{L+1} X_{L+1}$$

$$(14) \quad x^i_{L+1} - \xi^i_{L+1} (p + t^i, p_{L+1} + t^i_{L+1}, \bar{x}^i_{L+1}, R^i) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, I$$

Soit $\rho_\ell, \ell = 1, \dots, L, \rho_{L+1}, \rho_0, \rho^i_{L+1}, i = 1, \dots, I$, les multiplicateurs de Lagrange associés respectivement aux contraintes (11) (12) (13) (14). Les conditions du premier ordre d'optimalité de ce programme s'écrivent :

$$(15) \quad \sum_{i=1}^{I} \alpha^i \frac{\partial V^i}{\partial p_\ell} - \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=0}^{L+1} \rho_k \frac{\partial \xi^i_k}{\partial p_\ell} - \sum_{i=1}^{I} \rho^i_{L+1} \frac{\partial \xi^i_{L+1}}{\partial p_\ell} = 0, \qquad \ell = 1, \dots, L+1$$

$$(16) \quad \alpha^i \frac{\partial V^i}{\partial t^i_\ell} - \sum_{k=0}^{L+1} \rho_k \frac{\partial \xi^i_k}{\partial t^i_\ell} - \rho^i_{L+1} \frac{\partial \xi^i_{L+1}}{\partial t^i_\ell} = 0, \quad i = 1, \dots, I \quad \ell = 1, \dots, L+1$$

$$(17) \quad \rho_\ell + \rho_0 a_\ell = 0, \quad \ell = 1, \dots, L+1$$

$$(18) \quad \alpha^i \frac{\partial V^i}{\partial R^i} - \sum_{k=0}^{L+1} \rho_k \frac{\partial \xi^i_k}{\partial R^i} - \rho^i_{L+1} \frac{\partial \xi^i_{L+1}}{\partial R^i} = 0, \quad i = 1, \dots, I$$

$$(19) \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{I} \alpha^j \frac{\partial V^j}{\partial x^i_{L+1}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{I} \sum_{k=0}^{L+1} \rho_k \frac{\partial \xi^j_k}{\partial x^i_{L+1}} = -\rho^i_{L+1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{I} \rho^j_{L+1} \cdot \frac{\partial \xi^j_{L+1}}{\partial x^i_{L+1}}, \qquad i = 1, \dots, I$$

(2) Il s'agit d'une décentralisation du deuxième type au sens du Chapitre III ; sous des hypothèses fortes de convexité on sait qu'elle est équivalente à une décentralisation du premier type.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer que les conditions (15) (16) (17) (18) (19) impliquent les conditions d'optimalité de premier rang (9) (10) qui sont sous nos hypothèses des conditions suffisantes, d'où la possibilité de décentraliser les optima de premier rang.

En multipliant chaque équation (18) par ξ^i_ℓ et en ajoutant à (16) nous obtenons :

$$(20) \quad \alpha^i \left(\frac{\partial V^i}{\partial t^i_\ell} + \xi^i_\ell \frac{\partial V^i}{\partial R^i}\right) - \sum_{k=0}^{L+1} \rho_k \left(\frac{\partial \xi^i_k}{\partial t^i_\ell} + \xi^i_\ell \frac{\partial \xi^i_k}{\partial R^i}\right) - \rho^i_{L+1} \left(\frac{\partial \xi^i_{L+1}}{\partial t^i_\ell} + \xi^i_\ell \frac{\partial \xi^i_{L+1}}{\partial R^i}\right) = 0 \qquad \ell = 1, \dots, L+1 \quad i = 1, \dots, I$$

D'après l'identité de Roy :

$$(21) \qquad \frac{\partial V^i}{\partial p_\ell} = -\xi^i_\ell \frac{\partial V^i}{\partial R^i}$$

Comme $\frac{\partial V^i}{\partial p_\ell} = \frac{\partial V^i}{\partial t^i_\ell}$, le premier membre de (20) disparaît et les autres membres peuvent être réécrits :

$$(22) \quad \left[\sum_{k=0}^{L} \rho_k \left(\frac{\partial \xi^i_k}{\partial p_\ell} + \xi^i_\ell \frac{\partial \xi^i_k}{\partial R^i}\right) + (\rho_{L+1} + \rho^i_{L+1}) \left(\frac{\partial \xi^i_{L+1}}{\partial p_\ell} + \xi^i_\ell \frac{\partial \xi^i_{L+1}}{\partial R^i}\right)\right] = 0 \qquad \ell = 1, \dots, L+1 ; \quad i = 1, \dots, I$$

Le vecteur de prix à la consommation du consommateur i est :

$$p_\ell + t^i_\ell, \ell = 1, \dots, L ; p_{L+1} + t^i_{L+1}$$

Comme $\frac{\partial \xi^i_k}{\partial p_\ell} + \xi^i_\ell \frac{\partial \xi^i_k}{\partial R^i}$ est, d'après les équations de Slutsky, la dérivée de la fonction de demande compensée pour le vecteur de prix à la consommation défini ci-dessus :

$$(23) \quad \sum_{k=0}^{L} (p_k + t^i_k) \left[\frac{\partial \xi^i_k}{\partial p_\ell} + \xi^i_\ell \frac{\partial \xi^i_k}{\partial R^i}\right] + (p_{L+1} + t^i_{L+1}) \left[\frac{\partial \xi^i_{L+1}}{\partial p_\ell} + \xi^i_\ell \frac{\partial \xi^i_{L+1}}{\partial R^i}\right] = 0 \quad , \ell = 1, \dots, L+1 \quad i = 1, \dots, I$$

Avec l'hypothèse H3, (22) et (23) impliquent :

$$\rho_\ell = \kappa(p_\ell + t^i_\ell)\,, \quad \ell = 0, \ldots, \mathrm{L} \tag{24}$$

$$\rho_{\mathrm{L}+1} + \rho^i_{\mathrm{L}+1} = \kappa(p_{\mathrm{L}+1} + t^i_{\mathrm{L}+1}) \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, \mathrm{I} \tag{25}$$

Des équations (24), on déduit tout d'abord l'uniformité entre les agents des taxes sur les biens $\ell = 0, \ldots, \mathrm{L}$. On peut par ailleurs choisir la normalisation des taxes de façon à avoir $t_0 = 0$, d'où, en utilisant (17) et le fait que les prix à la production ont été par la normalisation égalés à $(1, a_1, \ldots, a_{\mathrm{L}+1})$:

$$t^i_\ell = 0 \qquad i = 1, \ldots, \mathrm{I}, \ \ell = 1, \ldots, \mathrm{L}$$

Par définition, nous avons :

$$\mathrm{V}^j(p, p_{\mathrm{L}+1} + t^j_{\mathrm{L}+1}, \bar{x}^j_{\mathrm{L}+1}, \mathrm{R}^j) = \tag{26}$$

$$\mathrm{U}^j(1 - \xi^j_0(p, p_{\mathrm{L}+1} + t^j_{\mathrm{L}+1}, \bar{x}^j_{\mathrm{L}+1}, \mathrm{R}^j), \xi^j(p, p_{\mathrm{L}+1} + t^j_{\mathrm{L}+1}, \bar{x}^j_{\mathrm{L}+1}, \mathrm{R}^j), \bar{x}^j_{\mathrm{L}+1})$$

D'où :

$$\frac{\partial \mathrm{V}^j}{\partial x^i_{\mathrm{L}+1}} = \sum_{\ell=0}^{\mathrm{L}+1} \frac{\partial \mathrm{U}^j}{\partial x^j_\ell} \cdot \frac{\partial \xi^j_\ell}{\partial x^i_{\mathrm{L}+1}} + \frac{\partial \mathrm{U}^j}{\partial x^i_{\mathrm{L}+1}} \tag{27}$$

soit, en multipliant par α^j et en sommant pour $j \neq i$:

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\mathrm{I}} \alpha^j \frac{\partial \mathrm{V}^j}{\partial x^i_{\mathrm{L}+1}} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\mathrm{I}} \alpha^j \sum_{\ell=0}^{\mathrm{L}+1} \frac{\partial \mathrm{U}^j}{\partial x^j_\ell} \cdot \frac{\partial \xi^j_\ell}{\partial x^i_{\mathrm{L}+1}} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\mathrm{I}} \alpha^j \frac{\partial \mathrm{U}^j}{\partial x^i_{\mathrm{L}+1}} \tag{28}$$

D'après les conditions du premier ordre de la maximation de l'utilité sous la contrainte budgétaire :

$$\frac{\partial \mathrm{U}^i}{\partial x^i_\ell} = \delta^i p_\ell \qquad \ell = 0, \ldots, \mathrm{L} \tag{29}$$

$$\frac{\partial \mathrm{U}^i}{\partial x^i_{\mathrm{L}+1}} = \delta^i (p_{\mathrm{L}+1} + t^i_{\mathrm{L}+1}) \tag{30}$$

où δ^i est l'utilité marginale du revenu, c'est-à-dire, $\dfrac{\partial \mathrm{V}^i}{\partial \mathrm{R}^i}$.

En substituant (29 (30) dans (28), on obtient :

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\mathrm{I}} \alpha^j \frac{\partial \mathrm{V}^j}{\partial x^i_{\mathrm{L}+1}} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\mathrm{I}} \alpha^j \delta^j \left[\sum_{\ell=0}^{\mathrm{L}} p_\ell \frac{\partial \xi^j_\ell}{\partial x^i_{\mathrm{L}+1}} + (p_{\mathrm{L}+1} + t^j_{\mathrm{L}+1}) \frac{\partial \xi^j_{\mathrm{L}+1}}{\partial x^i_{\mathrm{L}+1}}\right] + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\mathrm{I}} \alpha^j \frac{\partial \mathrm{U}^j}{\partial x^i_{\mathrm{L}+1}} \tag{31}$$

D'autre part, d'après (19), nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\mathrm{I}} \alpha^j \frac{\partial \mathrm{V}^j}{\partial x^i_{\mathrm{L}+1}} &= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\mathrm{I}} \left[\sum_{k=0}^{\mathrm{L}} \rho_k \frac{\partial \xi^j_k}{\partial x^i_{\mathrm{L}+1}} + (\rho_{\mathrm{L}+1} + \rho^i_{\mathrm{L}+1}) \frac{\partial \xi^j_{\mathrm{L}+1}}{\partial x^i_{\mathrm{L}+1}}\right] - \rho^i_{\mathrm{L}+1} \\ &= \kappa \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\mathrm{I}} \left[\sum_{k=0}^{\mathrm{L}+1} p_k \frac{\partial \xi^j_k}{\partial x^i_{\mathrm{L}+1}} + (p_{\mathrm{L}+1} + t^j_{\mathrm{L}+1}) \frac{\partial \xi^j_{\mathrm{L}+1}}{\partial x^i_{\mathrm{L}+1}}\right] - \kappa t^i_{\mathrm{L}+1} \end{aligned} \tag{32}$$

D'après (18), nous avons également :

$$\alpha^j \frac{\partial \mathrm{V}^j}{\partial \mathrm{R}^j} = \kappa \left[\sum_{k=0}^{\mathrm{L}} p_k \frac{\partial \xi^j_k}{\partial \mathrm{R}^j} + (p_{\mathrm{L}+1} + t^j_{\mathrm{L}+1}) \frac{\partial \xi^j_{\mathrm{L}+1}}{\partial \mathrm{R}^j}\right] \tag{33}$$

La contrainte budgétaire du consommateur j est une identité :

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{L}} p_k\, \xi^j_k + (p_{\mathrm{L}+1} + t^j_{\mathrm{L}+1}) \xi^j_{\mathrm{L}+1} = \mathrm{R}^j \tag{34}$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{L}} p_k \cdot \frac{\partial \xi^j_k}{\partial \mathrm{R}^j} + (p_{\mathrm{L}+1} + t^j_{\mathrm{L}+1}) \frac{\partial \xi^j_{\mathrm{L}+1}}{\partial \mathrm{R}^j} = 1 \tag{35}$$

(33) devient donc :

$$\alpha^j \frac{\partial \mathrm{V}^j}{\partial \mathrm{R}^j} = \alpha^j \delta^j = \kappa \ , \quad j = 1, \ldots, \mathrm{I} \tag{36}$$

En utilisant (28) et (32) nous obtenons :

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\mathrm{I}} \alpha^j \frac{\partial \mathrm{U}^j}{\partial x^i_{\mathrm{L}+1}} = -\kappa t^i_{\mathrm{L}+1} \quad \text{ou :} \tag{37}$$

$$-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\mathrm{I}} \alpha^j \frac{\partial \mathrm{U}^j / \partial x^i_{\mathrm{L}+1}}{\kappa} = t^i_{\mathrm{L}+1} \tag{38}$$

Mais comme :

$$\kappa = \alpha^j \, \delta^j = \alpha^j \frac{\partial V^j}{\partial R^j} = \frac{\alpha^j}{p_0} \cdot \frac{\partial U^j}{\partial x_0^j} \quad \text{avec } p_0 = -1 \tag{39}$$

Nous avons :

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{I} \frac{\partial U^j/\partial x^i_{L+1}}{\partial U^j/\partial x^i_0} = -\frac{t^i_{L+1}}{p_0} \tag{40}$$

En utilisant les conditions du premier ordre :

$$\frac{\partial U^i/\partial x^i_{L+1}}{\partial U^i/\partial x^i_0} = \frac{p_{L+1} + t^i_{L+1}}{p_0} \tag{41}$$

soit :

$$-\sum_{j=1}^{I} \frac{\partial U^j/\partial x^i_{L+1}}{\partial U^j/\partial x^j_0} = \frac{p_{L+1}}{-p_0} = a_{L+1} \qquad \text{par (17) et (25)} \tag{42}$$

De façon immédiate, les conditions du premier ordre de la maximation individuelle donnent, avec (17) et (24) :

$$-\frac{\partial U^i/\partial x^i_\ell}{\partial U^i/\partial x^i_0} = a_\ell \quad , \quad \begin{matrix} \ell = 1, \ldots, L \\ i = 1, \ldots, I \end{matrix} \tag{43}$$

4. TAXES IMPERSONNELLES

Dans de nombreux cas concrets, il n'est pas possible de faire varier les taxes correctives avec les transactions et il est nécessaire de contraindre les taxes à être uniformes entre les agents. Il faut donc ajouter aux contraintes (11) à (14) les contraintes :

$$t^i = t \qquad i = 1, \ldots, I \tag{44}$$

Soit ν^i, $i = 1, \ldots, I$, les multiplicateurs de Lagrange associés à ces contraintes additionnelles.

Seules les conditions du premier ordre (16) sont modifiées et doivent être remplacées par :

$$\alpha^i \frac{\partial V^i}{\partial t^i} - \sum_{k=0}^{L+1} \rho_k \frac{\partial \xi^i_k}{\partial t^i} - \rho^i_{L+1} \frac{\partial \xi^i_{L+1}}{\partial t^i} + \nu^i = 0 \qquad i = 1, \ldots, I \tag{45}$$

$$\sum_{i=1}^{I} \nu^i = 0 \tag{46}$$

Dans ce modèle, les prix à la production sont $a_1, \ldots, a_{L+1}$. En normalisant de façon appropriée le système des prix à la consommation dans la section précédente ($\kappa = 1$), on obtient l'égalité des prix à la consommation et des prix à la production pour les biens $\ell = 0, \ldots, L$. Seule la consommation du bien générateur d'effet externe est taxée.

Lorsqu'on impose une contrainte d'uniformité des taxes comme (44) il n'est plus possible, à cause de la présence de ν^i dans (45), d'identifier les multiplicateurs de Lagrange $\rho_0, \ldots, \rho_{L+1}$ avec les prix à la consommation. Ceci implique qu'en général le système de taxes optimal comportera des taxes sur tous les biens et non plus, comme dans l'optimum de premier rang, des taxes sur le seul bien L + 1.

Il existe, toutefois, un cas particulier intéressant dans lequel la seule taxation uniforme sur le bien générateur d'effet externe est suffisante pour restaurer l'optimalité parétienne de premier rang. Il s'agit du cas des externalités impersonnelles dont nous reparlerons dans les chapitres suivants. Supposons que la variable Z définissant le niveau de l'externalité qui affecte les consommateurs soit la somme des consommations de bien $L+1$, $Z = \sum_{j=1}^{I} \xi^j_{L+1}$; et supposons malgré la présence de ξ_{L+1} dans Z que l'agent j ait un comportement paramétrique vis-à-vis de cette quantité Z. La fonction objectif du problème est alors :

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha^i \, V^i (p, p_{L+1} + t^i_{L+1}, Z, R^i)$$

Comme dans tout le programme les variables ξ^i_{L+1} interviennent maintenant de façon additive, les multiplicateurs de Lagrange ρ^i_{L+1} sont identiques pour $i = 1, \ldots, I$. Soit $\bar{\rho}_{L+1}$ cette valeur commune.

On peut dès lors utiliser dans les manipulations de la section précédente l'équation (15) au lieu de l'équation (16) (ici (45)) pour chaque agent ou encore utiliser (45) et, en sommant sur i, éliminer les ν_i à l'aide de (46). On obtient ainsi :

$$\sum_{k=0}^{L} \rho_k \left[\sum_{i=1}^{I} \left(\frac{\partial \xi^i_k}{\partial p_{L+1}} + \xi^i_{L+1} \frac{\partial \xi^i_k}{\partial R^i} \right) \right] + (\rho_{L+1} + \bar{\rho}_{L+1}) \sum_{i=1}^{I} \left(\frac{\partial \xi^i_{L+1}}{\partial p_{L+1}} + \xi^i_{L+1} \frac{\partial \xi^i_{L+1}}{\partial R^i} \right) = 0 \tag{47}$$

On peut effectuer alors le même raisonnement que dans la section précédente en utilisant la fonction de demande compensée agrégée et identifier les prix à la consommation et les multiplicateurs de Lagrange (ρ_ℓ). La fin de la démonstration est identique.

Nous avons retrouvé le résultat classique selon lequel la taxation uniforme du seul bien générateur d'effet externe est suffisante dans le cas des externalités impersonnelles pour retrouver l'optimalité de premier rang.

Au-delà de ce cas particulier, il est nécessaire en général de taxer tous les biens pour obtenir un optimum de second rang sous la contrainte (44). En particulier, on est amené à taxer des biens qui sont complémentaires ou substituts avec le bien «polluant». En raison de l'uniformité requise sur les taxes, il peut être plus efficace de taxer ces autres biens que le bien polluant lui-même. Green et Sheshinski (1974) ont même montré qu'il est possible de construire des exemples pour lesquels le système optimal de taxes de second rang est tel que la taxe optimale sur le bien L + 1 est nulle, alors qu'il faut taxer d'autres biens.

Notons enfin qu'il est souvent impossible de taxer l'input ou l'output approprié parce que les transactions en ce bien ne sont pas observables, ou que leur observation nécessiterait des coûts trop élevés. On est de la même façon conduit à un problème de second rang pour lequel, en général, le système des taxes optimales comporte des taxes sur tous les autres biens taxables.

5. UN CAS PARTICULIER

Diamond [1973] a étudié le cas particulier de fonctions d'utilité (additivement) séparables pour acquérir quelque intuition sur les variables qui influencent la taxe uniforme optimale.

La fonction d'utilité utilisée dans les sections précédentes se simplifie en :

$$U^i(x^i_{L+1}, \bar{x}^i_{L+1}) + M^i$$

où M^i est le revenu dépensé pour les biens autres que le bien L + 1, que l'on agrège ici en un bien composite.

Diamond considère que le bien L + 1 est une nuisance, c'est-à-dire, $\dfrac{\partial U^i}{\partial x^j_{L+1}} \leqslant 0$, $j \neq i$, et fait l'hypothèse supplémentaire.

$$\text{(48)} \qquad \frac{\partial U^i}{\partial x^i_{L+1}\, \partial x^j_{L+1}} = 0 \qquad j \neq i$$

Le programme de maximation d'un consommateur i s'écrit :

$$\text{(49)} \qquad \text{Max } U^i(x^i_{L+1}, \bar{x}^i_{L+1}) + M^i$$

$$\text{T.Q.} \quad (p_{L+1} + t^i_{L+1})x^i_{L+1} + M^i = R^i$$

Si on ignore les solutions en coin, on obtient :

$$\text{(50)} \qquad x^i_{L+1} = \xi^i_{L+1}(p_{L+1} + t^i_{L+1})$$

qui ne dépend pas du revenu en raison de la séparabilité de la fonction d'utilité et qui ne dépend pas des demandes des autres à cause de (48).

En raison de la séparabilité des fonctions d'utilité le programme qui permet d'obtenir les optima de premier rang s'écrit :

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{I} U^i(\xi^i_{L+1}(p_{L+1} + t^i_{L+1}), (\xi^j_{L+1}(p_{L+1} + t^j_{L+1}))) + \sum_{i=1}^{I} M^i$$

$$\text{(51)} \quad \text{T.Q.} \quad p_{L+1} \sum_{i=1}^{I} \xi^i_{L+1}(p_{L+1} + t^i_{L+1}) + \sum_{i=1}^{I} M^i = \sum_{i=1}^{I} R^i$$

L'utilité marginale du revenu est ici égale à 1 d'où :

$$\text{(52)} \qquad \sum_{j=1}^{I} \frac{\partial U^j}{\partial \xi^i_{L+1}} \cdot \frac{\partial \xi^i_{L+1}}{\partial t^i_{L+1}} = p_{L+1} \cdot \frac{\partial \xi^i_{L+1}}{\partial t^i_{L+1}}$$

en écrivant l'analogue de (16).

D'après les conditions du premier ordre, $\dfrac{\partial U^i}{\partial \xi^i_{L+1}} = p_{L+1} + t^i_{L+1}$ d'où :

$$\text{(53)} \qquad t^i_{L+1} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{I} \frac{\partial U^j}{\partial \xi^i_{L+1}}$$

Si on impose la contrainte $t^i_{L+1} = t_{L+1}$, $i = 1, \ldots, I$, le programme qui permet d'obtenir les optima de second rang s'écrit :

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{I} U^i(\xi^i_{L+1}(p_{L+1} + t_{L+1}), (\xi^j_{L+1}(p_{L+1} + t_{L+1}))) + \sum_{i=1}^{I} M^i$$

$$\text{(54)} \quad \text{T.Q.} \quad p_{L+1} \sum_{i=1}^{I} \xi^i_{L+1}(p_{L+1} + t_{L+1}) + \sum_{i=1}^{I} M^i = \sum_{i=1}^{I} R^i$$

d'où immédiatement :

$$(55)\qquad t_{L+1} = \frac{\sum_{i=1}^{I} \frac{\partial \xi^i_{L+1}}{\partial t^i_{L+1}} \left(- \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{I} \frac{\partial U^i}{\partial \xi^i_{L+1}} \right)}{\sum_{i=1}^{I} \frac{\partial \xi^i_{L+1}}{\partial t^i_{L+1}}}$$

Ici $-\frac{\partial \xi^i_{L+1}}{\partial t^i_{L+1}} = -\frac{\partial \xi^i_{L+1}}{\partial p_{L+1}}$ est positif pour tout i en raison de l'hypothèse de linéarité qui annule l'effet revenu et de (48) qui supprime les effets indirects.

La taxe uniforme optimale est alors une combinaison convexe des taxes optimales personnalisées, les poids étant les dérivées des demandes de ce bien par rapport au prix. En particulier lorsqu'il s'agit d'un effet externe négatif on sait dans ce cas que malgré l'uniformité imposée il faudra encore taxer les émetteurs d'externalités.

Lorsque l'hypothèse (48) est supprimée, la taxe optimale uniforme peut fort bien être une subvention. Diamond a donné un exemple où elle s'annule. Enfin, lorsque l'hypothèse de séparabilité disparaît il n'est guère possible d'obtenir de résultat général (voir toutefois Diamond [1973]).

6. CONTRAINTE BUDGETAIRE POUR LE GOUVERNEMENT

Dans le cadre simplifié où tous les agents sont identiques avec externalités impersonnelles, Sandmo [1975] a étudié les implications sur les formules de taxation optimale de la nécessité pour l'Etat d'obtenir des revenus pour financer la production d'un bien quelconque par exemple d'un bien public(3).

Les caractéristiques particulières du modèle conduisent immédiatement à la taxe optimale suivante en l'absence de contrainte budgétaire :

$$(56)\qquad t_{L+1} = -I \frac{\partial U/\partial Z}{\partial U/\partial x_{L+1}} p_{L+1}$$

(3) Dans la théorie développée dans les sections précédentes on a fait l'hypothèse de la possibilité de transferts forfaitaires. Supposer que la somme des transferts forfaitaires est nulle est un cas particulier de l'hypothèse considérée ici. Il est facile de voir qu'alors les conditions d'efficacité de Bowen-Samuelson ne sont plus vérifiées (voir Lau, Sheshinski, Stiglitz [1976] pour des conditions suffisantes d'une certaine séparabilité des conditions de financement et de production dans le cas des biens publics).

Cette taxe uniforme restaure l'optimalité de premier rang puisque les externalités sont impersonnelles.

Considérons maintenant le problème de second rang ; le bien 0 n'est pas taxé(4) et la contrainte de revenu de l'Etat peut s'écrire :

$$I \sum_{\ell=1}^{L+1} t_\ell \xi_\ell = T + IR$$

Le programme d'optimisation de second rang se formule alors comme :

$$(57)\qquad \begin{aligned} &\text{Max } I.\, V(a + t, a_{L+1} + t_{L+1}, R, Z) \\ &I\xi_\ell (a + t, a_{L+1} + t_{L+1}, R, Z) = X_\ell \qquad \ell = 1, \dots, L+1 \\ &I\xi_0 (a + t, a_{L+1} + t_{L+1}, R, Z) = \sum_{\ell=1}^{L} a_\ell X_\ell + a_{L+1} X_{L+1} \\ &Z = I\xi_{L+1} (a + t, a_{L+1} + t_{L+1}, R, Z) \\ &I \sum_{\ell=0}^{L+1} t_\ell \xi_\ell (a + t, a_{L+1} + t_{L+1}, R, Z) = IR + T \\ &t_0 = 0 \end{aligned}$$

Soit $(\rho_0, \dots, \rho_{L+1}, \bar{\rho}, \lambda, \nu)$ les multiplicateurs de Lagrange associés.

Les conditions du premier ordre sont :

$$(58)\qquad \frac{\partial V}{\partial t_0} - \sum_{k=0}^{L+1} \rho_k \frac{\partial \xi_k}{\partial t_0} - \bar{\rho} \frac{\partial \xi_{L+1}}{\partial t_0} - \lambda \left[\xi_0 + \sum_{k=0}^{L+1} t_k \frac{\partial \xi_k}{\partial t_0} \right] + \frac{\nu}{I} = 0$$

$$(59)\qquad \frac{\partial V}{\partial t_\ell} - \sum_{k=0}^{L+1} \rho_k \frac{\partial \xi_k}{\partial t_\ell} - \bar{\rho} \frac{\partial \xi_{L+1}}{\partial t_\ell} - \lambda \left[\xi_\ell + \sum_{k=0}^{L+1} t_k \frac{\partial \xi_k}{\partial t_\ell} \right] = 0 \qquad \ell = 1, \dots, L+1$$

$$(60)\qquad \frac{\partial V}{\partial R} - \sum_{k=0}^{L+1} \rho_k \frac{\partial \xi_k}{\partial R} - \bar{\rho} \frac{\partial \xi_{L+1}}{\partial R} - \lambda \left[\sum_{k=0}^{L+1} t_k \frac{\partial \xi_k}{\partial R} - 1 \right] = 0$$

$$(61)\qquad \frac{\partial V}{\partial Z} - \sum_{k=0}^{L+1} \rho_k \frac{\partial \xi_k}{\partial Z} - \bar{\rho} \left[\frac{\partial \xi_{L+1}}{\partial Z} - \frac{1}{I} \right] - \lambda \sum_{k=0}^{L+1} t_k \frac{\partial \xi_k}{\partial Z} = 0$$

$$(62)\qquad \rho_\ell + a_\ell \rho_0 = 0 \qquad \ell = 1, \dots, L+1$$

(4) Si on pouvait taxer tous les biens la contrainte budgétaire purement nominale ne serait pas une vraie contrainte. Ici les revenus perçus par l'Etat sont évalués en bien 0.

Il est facile de voir tout d'abord comme nous l'avons déjà observé ci-dessus qu'en l'absence de la contrainte $t_0 = 0$ ou d'une autre contrainte de normalisation la contrainte de revenu n'est pas effective.

Multiplions (60) par ξ_ℓ, $\ell = 0, \ldots, L+1$ et ajoutons à (58) (59) :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t_\ell} + \xi_\ell \frac{\partial V}{\partial R}\right) - \sum_{k=0}^{L} (\rho_k + \lambda t_k) \left[\frac{\partial \xi_k}{\partial t_\ell} + \xi_\ell \frac{\partial \xi_k}{\partial R}\right] - \tag{63}$$

$$(\rho_{L+1} + \lambda t_{L+1} + \bar{\rho}) \left(\frac{\partial \xi_{L+1}}{\partial t_\ell} + \xi_\ell \frac{\partial \xi_{L+1}}{\partial R}\right) = 0 \quad \ell = 0, \ldots, L+1$$

D'après l'identité de Roy, le premier terme de (63) disparaît et en utilisant (H3) nous avons :

$$\begin{aligned} \rho_0 + \lambda t_0 &= \kappa(1 + t_0) \\ \rho_\ell + \lambda t_\ell &= \kappa(a_\ell + t_\ell) \qquad \ell = 1, \ldots, L \\ \rho_{L+1} + \lambda t_{L+1} + \bar{\rho} &= \kappa(a_{L+1} + t_{L+1}) \end{aligned} \tag{64}$$

qui implique en utilisant (62), $\lambda = 0$.

Si au contraire on ne peut pas jouer sur la norme des prix, $t_0 = 0$, $\frac{v}{I}$ intervient dans l'équation (63) pour $\ell = 0$ et on ne peut déduire (64). Dans ce cas, le système de taxes optimales comprend des taxes sur tous les biens $\ell = 1, \ldots, L+1$.

D'après la définition de V(.)

$$\frac{\partial V}{\partial t_\ell} = \frac{\partial U}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial \xi_0}{\partial t_\ell} + \sum_{k=1}^{L+1} \frac{\partial U}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial t_\ell}$$

$$= -\delta \frac{\partial \xi_0}{\partial t_\ell} + \sum_{k=1}^{L+1} \delta (a_k + t_k) \frac{\partial \xi_k}{\partial t_\ell} \tag{65}$$

où δ est l'utilité marginale du revenu :

$$\frac{\partial V}{\partial t_\ell} - \sum_{k=0}^{L+1} \rho_k \frac{\partial \xi_k}{\partial t_\ell} - \bar{\rho} \frac{\partial \xi_{L+1}}{\partial t_\ell} = [-\delta - \rho_0] \frac{\partial \xi_0}{\partial t_\ell} +$$

$$\sum_{k=1}^{L} [\delta(a_k + t_k) + \rho_0 a_k] \frac{\partial \xi_k}{\partial t_\ell} + [\delta(a_{L+1} + t_{L+1}) + \rho_0 a_{L+1} - \bar{\rho}] \frac{\partial \xi_{L+1}}{\partial t_\ell}$$

$$= \lambda \xi_\ell + \sum_{k=0}^{L+1} \lambda t_k \frac{\partial \xi_k}{\partial t_\ell} \qquad \ell = 1, \ldots, L+1$$

ou :

$$-(\delta + \rho_0) \frac{\partial \xi_0}{\partial t_\ell} + \sum_{k=1}^{L} [(\delta - \lambda) t_k + (\delta + \rho_0) a_k] \frac{\partial \xi_k}{\partial t_\ell} +$$

$$[(\delta - \lambda) t_{L+1} + (\delta + \rho_0) a_{L+1} - \bar{\rho}] \frac{\partial \xi_{L+1}}{\partial t_\ell} = \lambda \xi_\ell$$

D'où :

$$t = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_L \\ t_{L+1} \end{bmatrix} = \frac{\delta + \rho_0}{\lambda - \delta} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_L \\ a_{L+1} \end{bmatrix} + \frac{1}{\delta - \lambda} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{\rho} \end{bmatrix} + \frac{\lambda A^{-1}}{\delta - \lambda} \begin{bmatrix} \xi_1 + \left(\frac{\delta + \rho_0}{\lambda}\right) \frac{\partial \xi_0}{\partial t_1} \\ \vdots \\ \xi_{L+1} + \left(\frac{\delta + \rho_0}{\lambda}\right) \frac{\partial \xi_0}{\partial t_{L+1}} \end{bmatrix}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_{L+1}}{\partial t_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial t_{L+1}} & \cdots & \frac{\partial \xi_{L+1}}{\partial t_{L+1}} \end{bmatrix}$$

Il est intéressant d'observer que $\bar{\rho}$, le prix fictif associé à l'externalité impersonnelle, n'intervient que dans la taxe associée au bien «polluant» (ce résultat pourrait être généralisé au cas d'agents différents). $\bar{\rho}$ n'est cependant pas proportionnel à la désutilité sociale de l'externalité $I \frac{\partial U}{\partial Z}$ car les prix fictifs associés au programme ne sont pas ici proportionnels aux prix à la consommation.

En utilisant (61) et la définition de la fonction d'utilité indirecte, on obtient :

$$\bar{\rho} = -\mathrm{I}\frac{\partial U}{\partial Z} + \mathrm{I}\left\{\sum_{k=0}^{L}[(\rho_k + \lambda t_k) - \delta(\rho_k + t_k)]\frac{\partial \xi_k}{\partial Z}\right.$$
$$\left. + [\rho_{L+1} + \lambda t_{L+1} + \bar{\rho} - \delta(\rho_{L+1} + t_{L+1})]\frac{\partial \xi_{L+1}}{\partial Z}\right\}$$

Lorsque la contrainte de revenu n'est pas effective, c'est-à-dire, que les revenus obtenus par la taxation indirecte correspondent exactement à T, $\lambda = 0$ et $\rho_0 = -k = -\delta$, de sorte que :

$$t_i = 0\,,\quad i = 1, \ldots, L$$
$$t_{L+1} = \frac{\bar{\rho}}{\delta} = -\mathrm{I}\frac{\partial U/\partial Z}{\delta} = -\mathrm{I}\,.\,\frac{\partial U/\partial Z}{\partial U/\partial x_{L+1}}\cdot p_{L+1}$$

c'est-à-dire, la taxe de premier rang.

7. EXTERNALITES ET MONOPOLE

En général, un monopoleur a tendance à produire une quantité inférieure à la quantité optimale. Toutefois, si la production de son bien crée des effets externes négatifs, puisqu'une telle externalité requiert *en général* une diminution de l'output pour améliorer l'efficacité de l'allocation, il est possible que la quantité produite par le monopole soit plus proche de la quantité optimale que celle produite par une entreprise concurrentielle ; il se peut même, par chance, qu'elle soit égale à la quantité optimale. (Bien sûr, dans le cas d'une économie externe, les deux effets au contraire s'ajoutent pour conduire à une quantité insuffisante). Buchanan (1969) a été le premier à noter ce point. Luski et Lusky (1975) ont été plus explicites dans un cas particulier.

Nous nous contenterons([5]) ici d'illustrer le problème en revenant au cas particulier de la section 5 avec externalités impersonnelles. Ceci sera l'occasion d'utiliser la forme (mentionnée dans la section 2) de la fonction d'utilité indirecte, qui élimine l'externalité.

Soit $U^i(x^i_{L+1}, Z) + M^i$ la fonction d'utilité de l'agent i où

$$Z = \sum_{j=1}^{I} x^j_{L+1}$$

La condition du premier ordre de maximation de l'utilité par l'agent i s'écrit ici :

(5) Kolm [1975] a étudié le problème de l'affectation des ressources provenant des taxes pigouviennes à l'amélioration de l'environnement.

$$\text{(66)}\qquad \frac{\partial U^i}{\partial x^i_{L+1}}\left(x^i_{L+1}\,,\ \sum_{j=1}^{I} x^j_{L+1}\right) = p_{L+1} \qquad i = 1, \ldots, I$$

La résolution simultanée des équations (66) donne les fonctions de demande :

$$\xi^i(p_{L+1})$$

La fonction d'utilité indirecte de l'agent i est donc :

$$\text{(67)}\qquad V^i(p_{L+1}) = U^i(\xi^i(p_{L+1}),\ \sum_{j=1}^{I}\xi^j(p_{L+1})) + M^i$$

d'où, en particulier :

$$\text{(68)}\qquad \frac{dV^i}{dp_{L+1}} = \frac{\partial U^i}{\partial x_{L+1}}\frac{\partial \xi^i}{\partial p_{L+1}} + \frac{\partial U^i}{\partial Z}\sum_{j=1}^{I}\frac{\partial \xi^j}{\partial p_{L+1}}$$

L'optimum social (intérieur) est caractérisé par le programme :

$$\text{(69)}\qquad \mathrm{Max}\ \sum_{i=1}^{I} U^i(x^i_{L+1}, Z) + \sum_{i=1}^{I} M^i$$

$$\text{T.Q.}\qquad p_{L+1}\sum_{i=1}^{I} x^i_{L+1} + \sum_{i=1}^{I} M^i = \sum_{i=1}^{I} R^i$$

$$Z = \sum_{i=1}^{I} x^i_{L+1}$$

d'où :

$$\text{(70)}\qquad \frac{\partial U^i}{\partial x^i_{L+1}} + \sum_{j=1}^{I}\frac{\partial U^j}{\partial Z} = p_{L+1} \qquad i = 1, \ldots, I$$

La taxe uniforme optimale est donc :

$$t_{L+1} = -\sum_{j=1}^{I}\frac{\partial U^j}{\partial Z}$$

Considérons maintenant le cas particulier d'un monopole sans coûts variables. (70) devient :

$$\text{(71)}\qquad \frac{\partial U^i}{\partial x^i_{L+1}} = -\sum_{j=1}^{I}\frac{\partial U^j}{\partial Z}$$

de sorte que la taxe optimale ou prix optimal est ici :

$$p^*_{L+1} = - \sum_{j=1}^{I} \frac{\partial U^j}{\partial Z} \tag{72}$$

Le monopole maxime son profit :

$$p_{L+1} \sum_{j=1}^{I} \xi^j (p_{L+1})$$

Soit $\overline{p}_{L+1}$ le prix optimal du monopole.

Si l'on suppose que la fonction de profit du monopole est concave(6), la courbe de revenu marginal est décroissante. La position du prix de monopole $\overline{p}_{L+1}$ par rapport au prix optimal p^*_{L+1} dépend donc du signe du revenu marginal RM évalué à $\overline{p}_{L+1}$ puisque $\mathrm{RM}(\overline{p}_{L+1}) = 0$.

Or :

$$\mathrm{RM}(p^*_{L+1}) = - \sum_{j=1}^{I} \frac{\partial V^j}{\partial p_{L+1}} (p^*_{L+1}) \qquad \text{(utiliser (68) (72))} \tag{73}$$

Luski et Lusky (1975) ont alors montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour que p^* soit supérieur à $\overline{p}$ (respectivement $p^* < \overline{p}$) est que $\mu - \sigma < 1$ (respectivement > 1).

où μ est l'élasticité de l'utilité marginale du bien L + 1 par rapport au bien L + 1,

σ est l'élasticité de l'utilité marginale de l'externalité par rapport au bien L + 1, toutes deux étant évaluées à l'optimum (7).

(6) Voir Guesnerie et Laffont [1976] pour une étude approfondie de la décentralisation des optima parétiens dans des économies avec monopoles et des difficultés liées à la non concavité très générale de la fonction de profit.

(7) Voir Lesourne [1977] pour une étude plus complète de ce problème.

CHAPITRE V (1)

EXTERNALITÉS ET COOPÉRATION

1. INTRODUCTION

La courbe des contrats d'Edgeworth a été redécouverte par la théorie des jeux qui lui a donné le nom de «Core», traduit par cœur ou noyau. Il est apparu que le cœur avait des liens étroits avec le concept d'équilibre concurrentiel (Edgeworth [1881], Debreu – Scarf [1963], Aumann [1964]) ; les économistes ont étudié les cas de non vacuité du cœur et le contenu de stabilité politico-économique de ce concept. On peut chercher à élargir la validité des résultats ci-dessus au cœur d'une économie avec effets externes. Notre objectif sera ici, en partant des définitions adoptées dans le Chapitre II, de réfléchir sur la notion même de cœur lorsque des effets externes existent dans l'économie.

Dans la section 2, nous mettons en évidence la difficulté essentielle ; nous proposons dans la section 3 plusieurs définitions du cœur pour une économie d'échange avec externalités. La section 4 étudie l'introduction de la production, la section 5 une difficulté liée aux menaces personnelles. Dans la section 6, nous critiquons une proposition de Scarf [1971]. Enfin, nous donnons dans la section 7 un exemple de démonstration indirecte de non-vacuité d'un cœur défini à la section 2.

2. LE CŒUR

En nous plaçant dans une économie d'échange à L biens et I consommateurs, rappelons tout d'abord la définition usuelle du cœur (voir Malinvaud [1969] chapitre 6 pour une exposition détaillée).

(1) Ce chapitre est basé sur : «Note sur la définition du noyau dans une économie avec effets externes». *Bulletin de Mathématiques Economiques*, 1971.

Le cœur est l'ensemble des états de l'économie(2) qui ne sont bloqués par aucune coalition. Une coalition C (sous-ensemble des I participants) bloque l'état E^0 (caractérisé par un vecteur de consommation x^{i0} pour chaque agent i) si :

(a) $\forall i \in C, \exists x^{i1} \in X^i$ ensemble de consommation de l'agent i inclus dans $\mathbf{R}^L$ avec $\sum_{i \in C} (x_\ell^{i1} - w_\ell^i) = 0 \qquad \ell = 1, \ldots, L$ où

où w_ℓ^i est la ressource initiale en bien ℓ de l'agent i.

(b) $\forall i \in C \quad x^{i1} \underset{i}{\succsim} x^{i0}$

avec une préférence stricte pour au moins un agent i

où $\underset{i}{\succsim}$ est le préordre complet des préférences de l'agent i défini sur X^i.

Remarque : il est possible de remplacer (b) par (b').

(b') $\forall i \in C \quad x^{i1} \underset{i}{\succ} x^{i0}$

On obtient alors une notion de cœur plus faible au sens suivant : le cœur (faible) défini avec (b') contient le cœur (fort) défini avec (b). Nous utiliserons la deuxième formulation pour simplifier l'écriture. En l'absence d'effets externes, les deux sont équivalentes si les préférences sont strictement monotones.

Lorsqu'il existe des effets externes de consommation, le préordre des préférences du consommateur i est défini sur $\prod_{i=1}^{I} X^i$ ou sur $X^i \times \mathbf{R}^{L(I-1)}$. En termes d'utilité, cela signifie que la fonction d'utilité de l'agent i dépend de l'allocation qu'il reçoit, mais aussi des allocations reçues par les autres.

L'ambiguité de la notion de cœur vient alors de la difficulté à définir une coalition bloquante. En effet, la coalition bloquante doit assurer à ses participants une utilité supérieure à l'utilité de référence, *quelles que soient les actions des autres*. Cette dernière condition, sans importance en l'absence d'effets externes, puisque les fonctions d'utilité sont indépendantes, est ici essentielle, car il faut envisager le comportement stratégique du complémentaire de la coalition (que nous noterons N\C, N désignant l'ensemble de tous les consommateurs). Nous nous emploierons dans les sections suivantes à éclaircir cette difficulté.

---

(2) Nous choisissons ici cette définition au lieu de la définition usuelle en termes d'imputations.

3. LE COEUR DANS UNE ECONOMIE D'ECHANGE

Dans une économie d'échange, on peut donner la définition suivante :

Définition 1

Une coalition C bloque un état $E^0 = (x^{10}, \ldots, x^{I0})$ si (la coalition est d'effectif k et si nécessaire les agents ont été renumérotés de sorte que les k premiers appartiennent à la coalition)

(a) $\exists x^{i1} \in X^i \quad \forall i \in C$

$$\sum_{i \in C} x^{i1} = \sum_{i \in C} w_\ell^i \qquad \ell = 1, \ldots, L$$

(b) $(x^{11} \ldots x^{k1}\, x^{(k+1)1} \ldots x^{I1}) \underset{i}{\succ} (x^{10} \ldots x^{I0}) \quad \forall i \in C$

$$\forall (x^{(k+1)1} \ldots x^{I1}) \in \left\{ x^{(k+1)} \ldots x^{I} \,/\, \sum_{i \in N\setminus C} x^i = \sum_{i \in N\setminus C} w^i, \quad x^i \in X^i \quad \forall i \in N\setminus C \right\}$$

Cette définition du cœur est une définition de théorie des jeux qui nécessite une information parfaite et suppose un comportement d'extrême prudence. Pour envisager toutes les actions possibles des autres, la coalition doit connaître les ressources du complémentaire de la coalition et l'ensemble de consommation de chacun des agents de N\C.

Les contraintes à l'égalité (au lieu de l'inégalité $\leqslant$)

(1) $$\sum_{i \in C} x_\ell^i = \sum_{i \in C} w_\ell^i$$

et

(2) $$\sum_{i \in N\setminus C} x^i = \sum_{i \in N\setminus C} w^i$$

peuvent avoir plusieurs significations. L'égalité peut exprimer l'absence de libre disposition des excédents. Lorsque la destruction des excédents est possible sans coûts, la formulation $\sum_{i \in C} x_\ell^{i1} \leqslant \sum_{i \in C} w_\ell^i$ s'impose. Ce n'est pas aussi évident pour l'expression (2) et cela dépend d'une hypothèse de comportement. Si la coalition veut prendre en compte toutes les représailles possibles, l'inégalité est nécessaire. Cependant, la coalition peut "penser" que N\C cherchera à s'organiser au mieux et non à lui nuire ; lorsque les effets externes sont positifs, la contrainte est alors requise à l'égalité.

Cette remarque montre qu'il est intéressant de rechercher une définition du cœur qui soit le reflet de l'information disponible dans l'économie étudiée et du comportement des agents de cette économie. Le contenu de stabilité politico-économique du cœur en est renforcé.

Dans cette esprit, on peut donner une autre définition :

Définition 2 :

Une coalition C bloque l'état E^0 si :

(a) $\exists x^{i1} \in X^i \qquad \forall i \in C$

$$\sum_{i \in C} x^{i1}_{\ell} \ \overset{=}{\underset{\leqslant}{\text{ou}}} \ \sum_{i \in C} w^i_{\ell} \qquad \ell = 1, \ldots, L$$

(b) $\forall i \in C$

$(x^{11} \ldots x^{k1}\, x^{(k+1)0} \ldots x^{I0}) \underset{i}{\succsim} (x^{10} \ldots x^{k0}\, x^{(k+1)0} \ldots x^{I0})$(3)

L'attitude des membres de la coalition semble alors peu cohérente car l'allocation $(x^{(k+1)0} \ldots x^{I0})$ peut n'être pas possible pour N\C ni désirée par celle-ci. Par contre, la connaissance de $(x^{(k+1)0} \ldots x^{I0})$ par la coalition C exige un minimum d'information.

L'absence d'information peut conduire à une attitude audacieuse comme ci-dessus ou, au contraire, à une attitude très prudente (cf. infra).

On peut présenter une *définition 3* en remplaçant (b) par

(b') $\forall i \in C$, $(x^{11} \ldots x^{k1}\, x^{(k+1)1} \ldots x^{I1}) \underset{i}{\succsim} (x^{10} \ldots x^{I0})$

$$\forall (x^{(k+1)1} \ldots x^{I1}) \in \mathbf{R}^{L(I-k)}$$

S'il existe des effets externes négatifs, cela peut conduire à l'absence de coalition bloquante autre que la coalition globale. Le cœur est alors confondu avec l'ensemble des optima de Pareto.

Lorsque les agents de C connaissent les préférences et les ressources de ceux de N\C, ils peuvent estimer avec quelque raison que ceux-ci restreindront leurs activités à une partie notée $A_{N\backslash C}(x^{11} \ldots x^{k1})$ de l'ensemble des états possibles pour la sous-économie constituée des agents de N\C (notée $E_{N\backslash C}$).

(3) Cette définition est à rapprocher de l'équilibre non coopératif défini dans le chapitre II. Celui-ci appartient à l'ensemble des états qui ne sont pas bloqués par les coalitions formées d'un seul consommateur.

Dans une *définition 4*, (b) est remplacé par :

(b'') $\forall i \in C \quad (x^{11} \ldots x^{k1}\, x^{(k+1)1} \ldots x^{I1}) \underset{i}{\succsim} (x^{10} \ldots x^{I0})$

$$\forall (x^{(k+1)1} \ldots x^{I1}) \in A_{N\backslash C}(x^{11} \ldots x^{k1})$$

Par exemple, la coalition C peut estimer que les agents de N\C se restreindront au cœur de $E_{N\backslash C}$ (définition 4.1) défini par la correspondance $C_{N\backslash C}(x^{11} \ldots x^{k1})$ (à préciser) ou à l'ensemble des optima de $E_{N\backslash C}$, $O_{N\backslash C}(x^{11} \ldots x^{k1})$ (définition 4.2) ou encore à l'ensemble des états qui satisfont à la rationalité individuelle $R_{N\backslash C}(x^{11} \ldots x^{k1})$ (définition 4.3).

Chaque hypothèse sur le comportement de N\C fournit une définition du cœur. Il faut ensuite étudier les relations entre les divers concepts étudiés.

On a des inclusions évidentes ; notons C_x le cœur relatif à la définition x, O l'ensemble des optima :

$$O \supset C_3 \supset C_1 \supset C_{4-2} \supset C_{4-1}$$
$$C_1 \supset C_{4-3} \supset C_{4-1}$$
$$O \supset C_2$$

La force d'un résultat de non-vacuité de cœur dépendra de la définition choisie. Par exemple, l'appartenance d'un état à C_1 (définition la plus utilisée car la plus liée à la théorie des jeux) n'assure pas qu'il puisse se réaliser dans l'économie étudiée.

On peut enfin imaginer des définitions plus complexes dans lesquelles les coalisés supposent, si l'effectif de C est faible, que le reste de l'économie vit sous un régime concurrentiel, mais, si l'effectif de C est important, que les agents de N\C se coalisent. Nous nous limiterons à ces réflexions pour examiner maintenant les difficultés créées par l'introduction de la production.

4. LE CŒUR DANS UNE ECONOMIE DE PRODUCTION

Il est déjà difficile de définir en l'absence d'effets externes le cœur dans une économie de production. Le problème vient de la définition de l'ensemble de production d'une coalition. On peut attacher à chaque agent un ensemble de production Y^i et supposer que $Y_C = \sum_{i \in C} Y^i$ – (économie de consommateurs producteurs : Nikaido [1971]). On peut, comme dans Champsaur [1974] définir une règle de majorité pour la détention d'une entreprise.

Aussi, nous limiterons-nous au cas des consommateurs producteurs pour éliminer certaines lourdeurs de définition sans intérêt direct pour les effets externes. Néanmoins, les généralisations au cadre d'hypothèses technologico-institutionnelles de type Champsaur [1974] sont évidentes.

Lorsqu'il n'existe que des effets externes entre consommateurs, on a immédiatement la définition suivante :

Définition 5

Une coalition C bloque l'état E° si :

(a) $\exists x^{i1} \in X^i \qquad \forall i \in C$

$$\sum_{i \in C} (x^{i1} - w^i) \in \sum_{i \in C} Y^i$$

(b) $\forall i \in C \quad (x^{11} \ldots x^{k1}\, x^{(k+1)1} \ldots x^{I1}) \underset{i}{\succsim} (x^{10} \ldots x^{I0})$

$$\forall (x^{(k+1)1} \ldots x^{I1}) \in \left\{ x^{(k+1)} \ldots x^I / x^i \in X^i \ ; \ \forall i \in N \backslash C \right.$$

$$\left. \text{et} \sum_{i \in N\backslash C} (x^i - w^i) \in \sum_{i \in N \backslash C} Y^i \right\}$$

L'introduction des effets externes de production rend la définition assez complexe. Pour simplifier, nous supposerons que les goûts des consommateurs dépendent de la production totale et non de sa répartition entre les entreprises. (Il s'agit bien d'une simplification, car, par exemple, le problème de la pollution a une dimension spatiale évidente). Les préordres de préférence sont alors définis sur $\prod_{i=1}^{I} X^i \times \mathbf{R}^L$. Nous formalisons comme au chapitre II les effets externes entre producteurs par des correspondances de production $Y^C (y^{N\backslash C})$ où $y^{N\backslash C}$ est le vecteur de production de N\C. La présence d'externalités empêche ici de définir l'ensemble de production de la coalition C de façon additive.

On a alors la définition suivante :

Définition 6

Une coalition C bloque l'état E° si :

(a) $\exists x^{i1} \in X^i \qquad \forall i \in C$

$$y^C = \sum_{i \in C} (x^{i1} - w^i) \in \cap \{ Y^C (y^{N\backslash C}) / y^{N\backslash C} \in Y^{N\backslash C}(y^C) \} = \Gamma(y^C)$$

(b) $\forall i \in C \quad (x^{11} \ldots x^{k1}, x^{(k+1)1} \ldots x^{I1}, y^C + y^{N\backslash C})$

$$\underset{i}{\succsim} (x^{i0} \ldots x^{I0}, \sum_{i=1}^{I} y^{i0})$$

$$\forall (x^{(k+1)1} \ldots x^{I1}, y^{N\backslash C}) \in \left\{ (x^{k+1} \ldots x^I, y^{N\backslash C}) / x^i \in X^i, \ , \quad \forall i \in N\backslash C \right.$$

$$\left. \text{et } y^{N\backslash C} = \sum_{i \in N\backslash C} (x^i - w^i) \in Y^{N\backslash C}(y^C) \right\}$$

Ces définitions correspondent à une information parfaite et à une prudence extrême. Il apparaît clairement ici que la théorie économique ne peut accepter l'hypothèse d'information parfaite issue de la théorie des jeux si elle veut obtenir des concepts maniables. On pourrait comme à la section 3 donner d'autres définitions en modifiant ces paramètres. On rejoint alors la difficulté discutée à la section précédente de la définition de l'information disponible et du comportement vis-à-vis de cette information. Nous préférons examiner maintenant un autre problème.

4. – α-COEUR OU β-COEUR

Dans les définitions précédentes, nous avons exigé d'une coalition qu'elle possède une stratégie (choix d'activités) *qui lui assure une situation supérieure au sens de Pareto à la situation initiale, quelles que soient les activités des autres agents.* On appelle α-cœur (voir Aumann [1967]) le cœur qui correspond à ce type de définition d'une coalition bloquante.

Dans ce cas, si un agent hors de la coalition est émetteur d'un effet externe négatif unique susceptible d'être reçu par un membre quelconque de la coalition, il suffit que l'externalité soit importante à l'échelle d'un individu (bien que négligeable à l'échelle de la coalition) pour que la coalition ne puisse plus se former. Cette situation est assez peu réaliste.

On peut remédier à cet inconvénient de deux façons.

– D'une part, si on a des préordres représentables par des fonctions d'utilité, et si on peut considérer que l'utilité est transférable grâce à l'existence d'un bien tel que la monnaie, on peut dire que la coalition se forme si :

Définition 7

(a) $$\exists x^{i1} \in X^i \quad \forall i \in C : \sum_{i \in C} (x^{i1} - w^i) \in \sum_{i \in C} Y^i$$

(b) $$\sum_{i=1}^{k} u^i (x^{11} \ldots x^{k1}\, x^{(k+1)1} \ldots x^{l1}) > \sum_{i=1}^{k} u^i (x^{10} \ldots x^{l0})$$

$$\forall (x^{(k+1)1}, \ldots, x^{l1}) \in \Big\{ (x^{k+1}, \ldots, x^l) / \sum_{i \in N \setminus C} (x^i - w^i) \in \sum_{i \in N \setminus C} Y^i,\ x^i \in X^i,\ \forall i \in N \setminus C \Big\}$$

Nous appellerons γ-cœur le cœur qui correspond à cette définition d'une coalition bloquante. Il est clair que le γ-cœur est inclus dans le α-cœur.

D'autre part, on peut supposer que la coalition C se forme si elle possède, quelle que soit l'action de N\C, une stratège *réponse* qui lui donne une situation supérieure au sens de Pareto à la situation initiale.

Définition 8

C bloque E^0 si :

$$\forall (x^{(k+1)1} \ldots x^{l1}) \in \Big\{ (x^{(k+1)} \ldots x^l) / x^i \in X^i,\ \forall i \in N \setminus C \text{ et } \sum_{i \in N \setminus C} (x^i - w^i) \in \sum_{i \in N \setminus C} Y^i \Big\}$$

$$\exists (x^{11} \ldots x^{k1}) \in \Big\{ (x^1 \ldots x^k) / \sum_{i \in C} (x^i - w^i) \in \sum_{i \in C} Y^i \text{ et } x^i \in X^i \quad \forall i \in C \Big\}$$

tel que $(x^{11} \ldots x^{k1}\ \ x^{(k+1)1} \ldots x^{l1}) \underset{i}{\succ} (x^{10} \ldots x^{l0}) \quad \forall i \in C$

Le cœur correspondant s'appelle le β-cœur. De façon évidente, le β-cœur est inclus dans le α-cœur.

Remarque : Si, pour toute coalition C, il existe une stratégie de N\C uniformément la plus mauvaise pour chaque agent de C, on a l'égalité de l'α-cœur et du β-cœur. C'est généralement le cas pour les effets externes

positifs (pas toujours cependant, car il peut ne pas exister dans l'ensemble de consommation borné inférieurement de vecteur x^* tel que $\forall x \in X$ $x \geqslant x^*$).

Il est utile de faire toutes ces distinctions pour examiner la littérature et les exemples proposés. Ainsi, Shapley et Shubik [1969] ont donné l'exemple suivant pour justifier l'absence de résultats en présence d'externalités négatives en disant que "le cœur" était vide.

Ils considèrent trois joueurs qui possèdent chacun en quantité 1 des déchets qu'ils peuvent déposer dans les domaines des autres. Soit x^{ji} la quantité de déchets déposée par le joueur j dans le domaine du joueur i :

$$\Big(\sum_{i=1}^{3} x^{ji} = 1 \quad \forall j \Big)$$

L'utilité ressentie par le joueur i est $u^i = - \sum_{j=1}^{3} x^{ji}$.

Le γ-cœur (égal ici au β-cœur) de cette "économie" est vide. En effet, une allocation du γ-cœur doit être telle que :

$$u^i \geqslant -2 \qquad i \in \{1, 2, 3\} = N$$

$$u^i + u^j \geqslant -1 \qquad (i, j) \in N \times N \quad i \neq j$$

$$u^1 + u^2 + u^3 = -3$$

Le β-cœur est représenté par l'intersection des trois segments en traits gras de la figure 1. Il est vide.

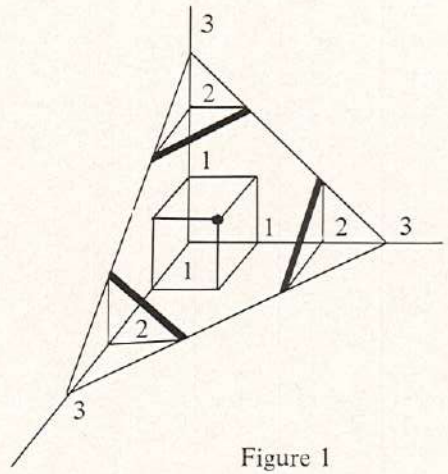

Figure 1

Par contre (comme l'affirme le théorème de Scarf [1971] cf. section suivante) l'α-cœur n'est pas vide :

$$\forall i \in \mathrm{N} \quad u^i \geqslant -2$$

La coalition de deux joueurs ne peut assurer à chacun plus de -1 car elle ne sait pas où le troisième joueur frappera.

L'élément $(-1, -1, -1)$ appartient à l'α-cœur.

6. – LA SOLUTION NON-COOPERATIVE DE SCARF

Scarf [1971] a proposé un concept de cœur (solution) différent par le choix de l'espace des stratégies des agents.

Revenons à une économie d'échange à L biens et I consommateurs ; pour lui, l'espace des stratégies de l'agent i est inclus dans $\mathbf{R}^{\mathrm{LI}}$ c'est-à-dire que chaque agent choisit un vecteur de consommation x^{ii} qui le concerne, mais aussi un vecteur x^{ik} pour chacun des autres consommateurs, d'où son vecteur de choix $x^i = (x^{i1}, \ldots, x^{ii}, \ldots, x^{iI}) \in \mathbf{R}^{\mathrm{LI}}$.

Les contraintes sur ce choix (ressources initiales, ensemble de consommation) sont représentées par un espace de stratégies E^i.

La fonction d'utilité de l'agent i, $u^i(x^1 \ldots x^{\mathrm{I}})$, est définie sur $\mathrm{E} = \prod_{i=1}^{\mathrm{I}} \mathrm{E}^i$.

Les liaisons entre les agents sont de deux sortes :

(a) d'une part, il existe des effets externes, puisque u^i dépend des allocations reçues par les autres consommateurs.

(b) d'autre part, un agent peut distribuer ses ressources entre tous les consommateurs qui sont obligés de les consommer sans redistribution possible.

Scarf fait les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 :

$\forall i$, E^i est un ensemble convexe compact non-vide.

Hypothèse 2 :

$\forall i$, $u^i(x^1 \ldots x^{\mathrm{I}})$ est une fonction continue quasi-concave par rapport à l'ensemble des arguments.

Théorème (Scarf [1971]))

Sous H1, H2, il existe au moins une stratégie jointe $(x^1 \ldots x^{\mathrm{I}})$ en équilibre au sens qu'aucune coalition n'a de stratégie alternative qui garantisse un niveau d'utilité plus élevé à chacun de ses membres indépendamment des choix de la coalition complémentaire.

Précisons que, pour appliquer son modèle à une économie d'échange, Scarf considère que les fonctions d'utilité dépendent de l'allocation globale $\left(\sum_{j=1}^{\mathrm{I}} x^{ji}\right)$ de chacun des agents. Avec son hypothèse (b), ceci lui permet d'écrire que l'espace des stratégies des agents d'une coalition C est le *produit* des espaces de stratégies individuels $\mathrm{E(C)} = \prod_{i \in \mathrm{C}} \mathrm{E}^i$.

Notre critique porte sur l'application de ce théorème au problème des externalités. En effet, pour nous, un effet externe est un effet *indirect* d'une activité de consommation ou de production d'un agent sur l'ensemble de production, la fonction d'utilité ou l'ensemble de consommation ou d'un autre agent. La liaison de type (b) entre les agents de son modèle ne nous semble pas correspondre à des attitudes d'agents économiques.

Le phénomène essentiel à décrire est pour nous le choix par un consommateur de son vecteur de consommation qui *par ailleurs* produit des externalités et non un jeu de redistribution de ressources initiales désirées ou non (tel l'exemple de Shapley-Shubik, qui relève davantage de la théorie des jeux que de l'économie).

Le modèle de Scarf conduit au cadre peu descriptif suivant :

Tout agent accepte de consommer des biens qui lui sont donnés ; ainsi, si cette consommation a des effets externes positifs pour une coalition C dans laquelle il n'est pas (ou des effets négatifs pour les agents de la coalition N\C dans laquelle il est), C peut obtenir de façon certaine des effets externes positifs importants de N\C (et inversement, C peut induire des externalités négatives sur N\C par des consommations forcées des agents de N\C). Un agent de N\C qui reçoit un bien de C ne peut pas le redistribuer dans N\C, ni le détruire.

Ce modèle n'a que peu de rapports avec une économie d'échange.

Par rapport à notre conception d'une stratégie d'un agent, cela revient à accroître l'espace des stratégies des agents. Aussi, si les effets externes ne sont pas personnels (au sens qu'ils ne dépendent que de la quantité globale du bien consommé générateur de l'externalité) et si les biens sont tous désirés par tous les consommateurs, on comprend qu'étendre les espaces de stratégies comme le fait Scarf est peu important dans la mesure où les agents n'ont pas (ou presque pas) intérêt à se placer dans ces extensions (c'est-à-dire, concrètement, à donner une partie de leur ressources initiales aux autres). Le modèle de Scarf peut alors convenir. Cependant, il s'agit d'un cas peu important qui revient presque à nier l'existence d'externalités en l'absence de libre disposition.

En effet, si l'agent i est sensible à la consommation en bien ℓ par l'ensemble des autres consommateurs :

$$u^i(x^i, e_\ell) = u^i(x^i, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{I} x^j_\ell) = u^i(x^i, w_\ell - .x^i_\ell)$$

où w_ℓ désignent les ressources globales en bien ℓ.

La quasi-concavité de u^i par rapport à tous ses arguments entraîne celle de $u^i(x^i, w_\ell - x^i_\ell)$ par rapport à $(x^i_1 \ldots x^i_\ell \ldots x^i_L)$. D'après le théorème de Scarf (1967) le cœur est non-vide. La démonstration de non-vacuité est donc évidente.

Remarque

Appelons Cl$'$ le cœur qui correspond à la définition 1 avec inégalité (libre disposition). Si tous les biens sont désirés et si tous les effets externes sont positifs, les définitions de Scarf reviennent simplement à accroître le pouvoir des coalitions, donc à réduire la solution par rapport à Cl$'$. Dans ce cas, la non vacuité de sa solution implique la non vacuité du cœur Cl$'$. (Nous donnons dans la section 6 une démonstration différente de la non-vacuité de Cl$'$ avec le même type d'hypothèses).

Enfin, pour montrer l'insuffisance du résultat de Scarf pour les effets externes, nous donnons ci-après l'exemple d'une économie à cœur vide (au sens de la définition 1), qui satisfait ses hypothèses.

Soit une économie d'échange constituée de trois biens et de trois consommateurs dont les fonctions d'utilité sont :

$$u^1 = x^1_1 - x^3_3$$
$$u^2 = x^2_2 - x^1_1$$
$$u^3 = x^3_3 - x^2_2$$

L'agent i possède une unité de bien $i+1$, $i = 1, 2, 3$ avec $(3 + 1 \equiv 1)$. L'ensemble de consommation de l'agent i est $X^i = [0, +\infty[^3$; x^i_j est la quantité de bien j consommée par l'agent i.

Soit une allocation quelconque x^{10}_1, x^{20}_2, x^{30}_3 ;

$$u^1 + u^2 + u^3 = 0$$

Une coalition $(i, i+1)$ peut réaliser $(0, 1)$.

Si $u^i = 0$, $i = 1, 2, 3$, chaque coalition (1, 2) (2, 3) (3, 1) bloque cet état. Tous les u^i ne pouvant être positifs $\left(\sum_{i=1}^{3} u^i = 0\right)$ supposons que $u^1 = -\epsilon < 0$; il faut alors que $u^2 > 1$ pour éviter que (1, 2) ne bloque. Or, ceci est impossible d'après les ressources initiales. Par symétrie, on voit que le cœur fort est vide.

Pour démontrer la vacuité du cœur faible (auquel se réfère Scarf), il faut modifier quelque peu les fonctions d'utilité :

$$u^1 = x^1_1 - x^3_3 + \frac{1}{20}(x^1_2 + x^1_3)$$

$$u^2 = x^2_2 - x^1_1 + \frac{1}{20}(x^2_1 + x^2_3)$$

$$u^3 = x^3_3 - x^2_2 + \frac{1}{20}(x^3_2 + x^3_1)$$

La démonstration un peu fastidieuse n'est pas donnée ici. On remarque que, dans ces exemples, les effets externes sont personnels.

La solution de Scarf est non vide ; l'imputation $\frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}$ par exemple n'est pas bloquée. Pourquoi ? La coalition (1, 2) qui, avec notre formulation, peut réaliser $\frac{1}{20} + \frac{\epsilon}{20}, 1 - \epsilon$ ne peut plus obtenir que $\frac{1}{20} + \epsilon, -\epsilon$. En effet, l'agent 3 peut, en forçant l'agent 1 à consommer du bien 1, créer une externalité négative de -1 sur l'agent 2. On comprend dès lors le manque d'intérêt d'un tel schéma pour une économie d'échange.

7. – UNE DEMONSTRATION DE NON-VACUITE DE L'α-COEUR, Cl$'$

Nous allons dans cette dernière section donner à grands traits une démonstration indirecte de la non-vacuité du cœur (définition 1, avec inégalités) dans une économie d'échange E (I consommateurs, L biens) avec effets externes *positifs* (en précisant et élargissant une idée de Shapley-Shubik [1969]).

Hypothèses

$\forall i$, u^i définie sur $X^i \times R_+^{L(I-1)}$ est continue non décroissante et quasi-concave par rapport à l'ensemble des arguments.

$\forall i$, X^i est convexe, fermé

$X^i \subset R_+^L$; $0 \in X^i$ (ceci pour simplifier l'exposé)

$w^i \in X^i$

On construit une économie fictive $\widetilde{E}$ en associant à chaque effet externe autant de nouveaux biens (k) que d'agents concernés plus un.

Par exemple, un effet externe est produit par x_1^1, première composante du vecteur de consommation de l'agent 1.

On considère alors une entreprise fictive possédée par l'agent 1 qui achète le bien 1 et produit k produits joints fictifs.

$$z_1 = x_1^1 \quad \text{bien} \quad 1^1$$

$$z_2 = x_1^1 \quad \text{bien} \quad 1^2$$

. . . .

$$z_k = x_1^1 \quad \text{bien} \quad 1^k$$

(Cette construction d'une économie associée est légèrement différente de celle proposée au Chapitre III qui aurait pu être utilisée).

$k = I$ si le concernement de l'effet externe est collectif.

Dans $\widetilde{E}$ le bien 1^1 remplace pour l'agent 1 le bien 1 ; chaque bien 1^i $i \geqslant 2$ (qui se substitue à l'effet externe) est acheté par l'agent i, seul intéressé. L'ensemble de production fictif est un cône convexe qui contient 0.

Nous généralisons de façon évidente cette construction. Dans $\widetilde{E}$ le nouvel ensemble de consommation de l'agent i est : $\widetilde{X}^i = X^i \times R_+^{L(I-1)}$ où l'on ne doit pas oublier que dans X^i un bien j^i peut avoir remplacé un bien j.

$\forall i$, $\widetilde{X}^i$ est un ensemble convexe fermé borné inférieurement,

$\forall i$, $\widetilde{w}^i = (w^i, 0) \in \widetilde{X}^i$

$\forall i$, $u^i = \widetilde{u}^i$ est continue et quasi-concave sur $\widetilde{X}^i$.

Tout ensemble de production est un ensemble convexe fermé contenant 0. L'ensemble des réalisables est borné (évident). Par le même argument que dans Shapley-Shubik [1969], on montre que les cœurs de $\widetilde{E}$ et E sont identiques. L'économie $\widetilde{E}$ de consommateurs producteurs vérifie

les hypothèses du théorème de Champsaur [1974] (P. Champsaur montre que le noyau est non-vide en prouvant que le jeu associé est équilibré et en utilisant le théorème de Scarf [1967]). Le cœur de $\widetilde{E}$, et, par suite, celui de E est non-vide.

8. CONCLUSION

Notre objectif très limité dans ce chapitre a été d'exposer les difficultés rencontrées pour définir un concept de cœur dans une économie avec effets externes. Le point de vue «maximin» de la théorie des jeux ne semble pas approprié pour une telle définition. Malheureusement, aucune autre définition ne s'impose par sa logique. La seule conclusion générale semble être la possibilité, avec effets externes négatifs, de vacuité du «cœur» pour la plupart des définitions adoptées. En information parfaite les états réalisés par les divers mécanismes d'allocation des ressources possibles présenteront une certaine instabilité puisqu'il existera toujours des coalitions désireuses de les remettre en cause. De plus, il n'a toujours pas été possible de construire une notion de cœur, même ad hoc, qui permette de retrouver l'équivalence asymptotique du cœur et de l'analogue des équilibres concurrentiels en présence d'externalités, les pseudo-équilibres concurrentiels ou équilibres de Lindhal (voir Champsaur, Roberts, Rosenthal [1976] dans le cadre des biens publics).

Par suite, l'approche théorie des jeux de la question des effets externes apparaît quelque peu dans une impasse. Peut-être faut-il faire appel à des concepts de solution différents du cœur pour tenir compte de façon réaliste des possibilités de menace du complémentaire d'une coalition ?

CHAPITRE VI

EFFETS EXTERNES ET PLANIFICATION (1)

1. INTRODUCTION

Les seuls avantages relatifs notables des procédures de planification par les prix du type Lange-Arrow-Hurwicz sont d'une part la faible dimensionalité du message que le Bureau Central de Planification (BCP) doit transmettre à la périphérie et d'autre part la simplicité du message réponse de la périphérie (seulement des quantités) et la simplicité des opérations du BCP qui en particulier n'a pas besoin de mémoriser les différentes étapes de l'itération.

Ces procédures ne possèdent pas les propriétés de monotonicité et de possibilité (2) mises en avant par Malinvaud (1967). Au prix d'une plus grande complexité des opérations du BCP (qui doit à chaque étape résoudre un problème de programmation non-linéaire et doit mémoriser les diverses réponses de la périphérie qui lui permettent de construire une représentation des possibilités techniques de toute l'économie), Malinvaud (1967) a obtenu une procédure de planification par les prix qui possède les propriétés de monotonicité et de possibilité, tout en conservant la faible dimensionalité du message que le BCP doit transmettre.

Lorsque des externalités technologiques sont présentes dans l'économie, on peut en créant des biens artificiels associés aux effets externes, construire des méthodes de planification calquées sur les méthodes décrites ci-dessus [voir Aoki (1971), Davis et Whinston (1966]. Toutefois, lorsque les effets externes sont à concernement collectif, ces méthodes perdent (en ce qui concerne les biens artificiels) un avantage crucial qu'elles ont sur les

---

(1) Ce chapitre est basé sur une note commune non publiée avec P. Saint-Pierre «Management avec externalités», 1972.

(2) La propriété de monotonicité signifie qu'à chaque itération la fonction objectif du BCP croît. La propriété de possibilité signifie qu'à chaque itération le plan défini par le BCP est techniquement réalisable, ce qui permet de s'arrêter avant que la procédure ait convergé.

méthodes de planification par les quantités, à savoir la faible dimensionalité du message du BCP puisqu'il faut un prix pour chaque agent et chaque effet externe.

Les procédures de planification par les quantités qui ont été proposées(3) [Weitzman (1970), Heal (1969) (1971), Collomb et Zylberberg (1975)] ont en commun la relative complexité du message que doivent transmettre les unités de la périphérie au centre ; elles doivent fournir une approximation locale de leur ensemble de production. La procédure de Weitzman n'a pas la propriété de «possibilité», ce qui rend sa propriété de monotonicité décroissante(4) peu intéressante. La procédure de Heal au contraire obtient à la fois monotonicité et possibilité.

Lorsqu'une entreprise produit plusieurs outputs avec des possibilités de substitution, Heal (1971) a proposé une procédure mixte dans laquelle le BCP envoie à une entreprise un quota d'input et un vecteur de prix pour les outputs. La périphérie doit renvoyer des prix pour les inputs et des quantités pour les outputs. Au prix d'une certaine complexité de messages, Heal a construit une procédure qui possède les propriétés de possibilité et monotonicité(5). Il propose dans Heal (1973, Ch. 9) de l'appliquer aux externalités. Pour les raisons mentionnées ci-dessus, l'avantage de la partie «prix», en termes de dimensionalité, disparaît pour les effets externes à concernement collectif.

L'objectif de ce chapitre est de proposer, dans une économie avec effets externes, des procédures de planification par les quantités qui ont l'avantage d'une simplicité extrême des messages pour le BCP et la périphérie ainsi que d'une grande simplicité des calculs du BCP. Leurs inconvénients relatifs qui, dans l'état actuel des connaissances, sont limités, seront discutés en conclusion.

---

(3) Dans le cas des effets externes, la seule procédure de planification par les quantités qui ait été proposée est celle de Heal (1973).

(4) Monotonicité décroissante signifie que la valeur de la fonction objectif du BCF, exprimée au programme non réalisable de l'étape n, décroît de façon monotone avec n. Si on contraint la proposition de l'étape n à être réalisable, la monotonicité disparaît.

(5) Cette procédure a l'avantage de conserver ces propriétés dans le cas de non convexités ; cependant la convergence est bien sûr seulement vers un maximum local. Cremer (1976) a proposé une procédure quantité-quantité qui converge vers le maximum global en présence de non convexités.

2. LA FORMALISATION DU PROBLEME

Nous considérons une économie à ℓ biens de consommation et q ressources productives. Le BCP aura selon les cas une fonction d'utilité sociale linéaire associée au vecteur de prix à la consommation $\pi \in R^{\ell}$ ou une fonction d'utilité sociale U(.) définie sur les productions de biens de consommation.

Le BCP connaît le vecteur de ressources productives $w \in R^q$ qu'il doit allouer entre les différentes unités de production de la périphérie.

Soit $(y^j, x^j) \in R^{\ell+q}$, le vecteur de production de l'entreprise j, $j = 1, \ldots, J$, où y^j représente l'output et x^j l'input.

Nous notons :

$$\bar{y}^j = (y^1, \ldots, y^{j-1}, y^{j+1}, \ldots, y^J)$$

$$\bar{x}^j = (x^1, \ldots, x^{j-1}, x^{j+1}, \ldots, x^J)$$

Le vecteur $(\bar{y}^j, \bar{x}^j)$ définit l'environnement de l'entreprise j. L'existence d'effets externes de production(6) signifie que les possibilités techniques de l'entreprise j dépendent de son environnement, c'est-à-dire qu'elles sont décrites par une correspondance de production $Y^j(.)$ qui associe à tout environnement $(\bar{y}^j, \bar{x}^j) \in R^{(J-1)(\ell+q)}$ les activités techniquement possibles de l'entreprise j ; $Y^j(\bar{y}^j, \bar{x}^j) \subset R^{\ell+q}$.

L'ensemble des programmes de production *techniquement possibles* pour le système productif est :

$$Y = \{(y^1, x^1), \ldots, (y^J, x^J)/(x^j, y^j) \in Y^j(\bar{y}^j, \bar{x}^j), j = 1, \ldots, J\}$$

Nous faisons sur les correspondances $Y^j(.)$, l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1 : $\forall j = 1, \ldots, J$, la correspondance $Y^j(.)$ de $R^{(J-1)(\ell+q)}$ dans $R^{\ell+q}$ est s.c.i., à graphe convexe fermé et à images contenues dans un ensemble compact C. De plus $\forall (\bar{y}^j, \bar{x}^j) \in R^{(J-1)(\ell+q)}$, $0 \in Y^j(\bar{y}^j, \bar{x}^j)$.

Le fait que le graphe de la correspondance soit convexe signifie, en particulier que les effets externes sont à rendement marginaux décroissants s'ils sont positifs et croissants s'ils sont négatifs, hypothèses qui recouvrent une grande partie du phénomène. Nous avons noté aux chapitres II et III, comment les effets externes négatifs introduisent des non convexités. Toutefois, nous avons besoin seulement de la convexité de l'intersection du graphe de la correspondance de production et d'un ensemble

---

(6) Les effets externes de production sur les consommateurs sont directement pris en compte dans la fonction objectif.

convexe compact qui contient l'ensemble des états réalisables, ce qui revient à mettre une limite au caractère néfaste des effets externes négatifs. La compacité signifie que les possibilités de production sont bornées ce qui ne semble pas restrictif dans le cadre d'une planification à court terme.

Un programme de production $(y^1, x^1) \dots (y^J, x^J)$ est dit *semi-réalisable*, s'il satisfait à la contrainte de rareté sur les inputs, c'est-à-dire si :

$$\sum_{j=1}^{J} x^j \leqslant w$$

Un tel programme sera donc possible en ce qui concerne les utilisations d'inputs, mais ne produira pas les outputs attendus.

Un programme de production est dit *réalisable* s'il est à la fois semi-réalisable et techniquement possible.

Une procédure de planification est dite *possible* (resp. *semi-possible*), si le programme de production défini à chaque itération est réalisable (resp. semi-réalisable).

L'ensemble des programmes de production réalisables est noté :

$$Y^* = \{(y, x) = ((y^1, x^1), \dots, (y^J, x^J))/(y^j, x^j) \in Y(\bar{y}^j, \bar{x}^j), \quad j = 1, \dots, J \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{J} x^j \leqslant w\}$$

Nous introduisons des coûts d'échange d'information(7) qui sont formalisés par une fonction $C(y)$.

Hypothèse 2 : $C(y)$ de R^{JR} dans R est croissante et strictement convexe.

Le programme du BCP est alors :

$$\text{Max } \pi \sum_{j=1}^{J} y^j - C(y)$$
$$(y, x) \in Y^*$$

Dans une deuxième procédure nous ferons 1'.

(7) Le caractère ad hoc de ce coût informationnel pour obtenir la stricte concavité de la fonction objectif est manifeste. Il serait néanmoins facile de trouver des justifications diverses à l'introduction d'un élément de stricte concavité dans la fonction objectif. De plus, en son absence, on pourrait faire fonctionner la procédure A qui aurait seulement des propriétés de convergence plus faibles.

Hypothèse 3 : $U(y)$ est strictement concave et le programme du BCP sera défini comme :

$$\text{Max } U(y)$$
$$(y, x) \in Y^*$$

Le BCP se dédouble en un centre de gestion des ressources productives (CGR) ou agent 0 et un centre de calcul (CCP) qui centralise et diffuse les informations.

Soit B une boule compacte qui contient tous les $Y^j(\bar{y}^j, \bar{x}^j)$, $\forall (\bar{y}^j, \bar{x}^j)$, $\forall j$. Elle détermine une échelle maximale de production à court terme. Nous supposons ici que cette information est connue du centre et de la périphérie qui sont contraints d'opérer dans ses limites.

Nous appelons *ensemble de production généralisé* de l'entreprise j :

$$\hat{Y}^j = \{({}^j y, {}^j x) = ((y^1, x^1), \dots, (y^j, x^j), \dots, (y^J, x^J)) / (y^j, x^j) \in Y^j(\bar{y}^j, \bar{x}^j), (\bar{y}^j, \bar{x}^j) \in B^{J-1}\}$$

Nous associons également au CGR un ensemble de production généralisé :

$$\hat{Y}^0 = \{({}^0 y, {}^0 x) = ((y^1, x^1), \dots, (y^J, x^J)) / \sum_{j=1}^{J} x^j \leqslant w, \quad (y^j, x^j) \in B, j = 1, \dots, J\}$$

Nous avons :

$$Y^* = \bigcap_{j=0}^{J} \hat{Y}^j.$$

D'après H1, $\hat{Y}^j$ est convexe et compact pour $j = 0, \dots, J$. Y^* est donc aussi convexe et compact.

3. – PROCEDURE A

Le rôle du CGR est de rendre le programme final compatible avec les ressources productives de l'économie en minimant les coûts d'information. Il a semblé utile d'introduire dans sa fonction objectif la valeur de la production à côté du coût d'information pour ne pas accorder à ce dernier terme difficile à préciser un rôle trop important.

La fonction objectif du BCP qui peut être réécrite $2\left[\sum_{j=1}^{J} \pi y^j - C(y)\right]$ *s'éclate* en J + 1 fonctions :

$$J^0(y) = \sum_{j=1}^{J} \pi y^j - d(y) \quad \text{avec } d(y) = 2C(y)$$

$$J^j(y) = \pi y^j \ , \ j = 1, \ldots, J.$$

Le programme global s'écrit :

$$\text{Max} \sum_{j=0}^{J} J^j(y) = J(y)$$

$$y \in \bigcap_{j=0}^{J} \hat{Y}^j$$

Il existe une solution unique à ce problème de la maximation d'une fonction continue strictement concave sur un ensemble convexe compact non-vide ($0 \in \hat{Y}^j, j = 0, \ldots, J$).

Définition de la procédure

L'itération $n + 1$ de la procédure comprend les étapes suivantes :

1) Le CCP propose à chaque entreprise et au CGR un vecteur d'activité(8) $(y^{(n)}, x^{(n)})$ et un paramètre τ_{n+1} qui définit une pénalité s'ils s'écartent de la proposition du CCP.

2) L'entreprise $j (j = 1, \ldots, J)$ maxime la valeur de sa production $J^j(y)$ sur $\hat{Y}^j$ (9), tout en ne s'écartant pas trop de la proposition du CCP, c'est-à-dire résout le programme.

$$\text{Max } J^j(^jy) - \frac{1}{\tau_{n+1}} [|^jy - y^{(n)}|^2 + |^jx - x^{(n)}|^2]$$

$$(^jy, {}^jx) \in \hat{Y}^j$$

Soit $(^jy^{(n+1)}, {}^jx^{(n+1)})$, le vecteur optimal qu'elle transmet au CCP.

(8) Dans une application, le CCP ne transmettrait que les variables pertinentes, c'est-à-dire que le vecteur de production de l'entreprise et les niveaux d'externalités qui l'affectent.

(9) L'entreprise j utilise pour cela un vecteur prix π qui doit lui être transmis par le CCP. En ce sens la procédure est mixte. Toutefois, ce vecteur de prix sociaux n'est pas révisé au cours de la procédure.

3) Le CGR maxime également $J^0(y)$ dans $\hat{Y}^0$ tout en ne s'écartant pas trop de la proposition du CCP soit :

$$\text{Max } J^0(^0y) - \frac{1}{\tau_{n+1}} [|^0y - y^{(n)}|^2 + |^0x - x^{(n)}|^2]$$

$$(^0y, {}^0x) \in \hat{Y}^0.$$

Soit $(^0y^{(n+1)}, {}^0x^{(n+1)})$, le vecteur optimal que le CGR transmet au CCP.

4) Le CCP calcule les vecteurs d'activité suivants :

$$y^{(n+1)} = \frac{1}{J+1} \sum_{j=0}^{J} {}^jy^{(n+1)}$$

$$x^{(n+1)} = \frac{1}{J+1} \sum_{j=0}^{J} {}^jx^{(n+1)}$$

qui sont transmis à la périphérie à l'itération $n + 2$ avec un nouveau paramètre de pénalité $\tau_{n+2} \leqslant \tau_{n+1}$.

Le CCP calcule aussi les programmes suivants :

$${}^jz^{(n+1)} = \frac{1}{\sigma_{(n+1)}} \sum_{k=1}^{n+1} \tau_k \begin{vmatrix} {}^jy^{(k)} \\ {}^jx^{(k)} \end{vmatrix}, j = 0, \ldots, J, \text{ avec } \sigma_{(n+1)} = \sum_{k=1}^{n+1} \tau_k$$

ainsi que :

$$z^{(n+1)} = \frac{1}{J+1} \sum_{j=0}^{J} {}^jz^{(n+1)}$$

Notons que ${}^jz^{(n+1)} \in \hat{Y}^j, \forall n$; en particulier $(^0y^{(n+1)}, {}^0x^{(n+1)}) \in \hat{Y}^0$ de sorte que le programme de production $(^0y^{(n+1)}, {}^0x^{(n+1)})$ est semi-réalisable et la procédure qui sélectionne à chaque étape ${}^0z^{(n+1)}$ est donc semi-possible.

L'objectif des pénalités est de faire prendre en compte à chaque agent les contraintes de son environnement avec une acuité croissante pour converger vers une solution globalement réalisable. Un choix approprié des pénalités permet aussi de converger vers une solution efficace.

Hypothèse 4 : La suite τ_n vérifie :

(i) $0 < \tau_{n+1} \leqslant \tau_n \ , \ \forall n$

(ii) $\lim_{n \to \infty} \tau_n = 0$

(iii) $\lim\limits_{N\to\infty} \sigma(N) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \tau_n = +\infty$

$\left(\text{Par exemple } \tau_n = \frac{1}{n}\right)$.

Nous sommes alors en mesure de démontrer le :

Théorème 1 : Sous H1-H2-H4, la procédure détermine des suites de programmes qui convergent vers la solution optimale. De plus, l'une de ces suites est semi-réalisable.

Démonstration : voir section 6.

Notons qu'il est facile de construire à partir des suites calculées par le CCP une suite de programmes réalisables qui converge également vers le programme efficace,en l'absence d'externalités ou si les externalités ne sont pas réciproques.

L'inconvénient majeur de la procédure A, en plus du manque de monotonicité auquel nous reviendrons plus loin, est que c'est la moyenne des réponses de chaque agent qui converge et non la dernière réponse de l'agent.

Ceci peut avoir un inconvénient au niveau des incitations. Avec une rémunération des dirigeants d'entreprises fonction de la valeur de la production nette des pénalités, on conçoit qu'à chaque étape le dirigeant ait intérêt à maximer la fonction objectif qui lui est attribuée (il peut essayer de manipuler quelque peu ses réponses pour modifier la décision finale en sa faveur, mais ce comportement disparaît avec une hypothèse de myopie justifiée par l'incertitude concernant l'arrêt de la procédure). Ici, l'hypothèse de myopie est plus difficile à accepter. On peut toutefois améliorer les résultats en faisant dépendre la rémunération des dirigeants de la suite des valeurs de leur production nette des pénalités et non seulement de la décision finale.

Supposons que les coûts d'information soient décentralisés, c'est-à-dire $C(y) = \sum\limits_{j=1}^{J} C^j(y^j)$ et éclatons la fonction objectif $\sum\limits_{j=1}^{J} \pi y^j - \sum\limits_{j=1}^{J} C^j(y^j)$ d'une façon différente :

$$J^j(y) = \pi y^j - C^j(y^j) \quad j = 1, \dots, J$$

$$J^0(y) = 0$$

Le même résultat de convergence que le théorème 1 est alors valable. Avec l'hypothèse supplémentaire H5, on peut de plus montrer le corollaire 1.

H5 – $C^j(.)$ est continûment différentiable et convexe avec un rayon de courbure inférieur à une constante positive.

Corollaire 1 : Sous H1-H2-H4-H5, en l'absence d'externalités, la procédure de planification A est telle que les suites $({}^jy^{(n)}, {}^jx^{(n)}), j = 0, \dots, J$,convergent vers la solution efficace.

Démonstration : cf. section 6.

Ainsi, en l'absence d'externalités, la procédure A a la propriété de convergence habituelle des procédures de planification. Nous allons montrer qu'il est possible d'avoir ce résultat en présence d'effets externes si on modifie la procédure d'éclatement, d'une façon qui affaiblit le caractère incitatif des fonctions objectifs décentralisées.

4. – PROCEDURE B

La fonction objectif du Bureau Central de Planification est ici plus générale. Il s'agit d'une fonction d'utilité sociale U(.) définie sur les outputs. Le programme du BCP s'écrit :

$$\text{Max } U(y)$$
$$(y, x) \in Y^*$$

La procédure B est de la même nature que la procédure A, mais correspond à un éclatement différent de la fonction objectif qui est ici :

$$J^0(y) = U(y)$$
$$J^j(y) = 0 \qquad j = 1, \dots, J$$

Chaque itération de la procédure comprend maintenant les étapes suivantes :

1) A l'itération $n + 1$ le CCP propose aux entreprises et au CGR un programme de production $(y^{(n)}, x^{(n)})$.

2) Chaque entreprise répond par le programme de production réalisable le plus proche de la proposition du CCP, c'est-à-dire résout le programme

$$\text{Min } |{}^jy - y^{(n)}|^2 + |{}^jx - x^{(n)}|^2$$
$$({}^jy, {}^jx) \in \hat{Y}^j$$

Elle transmet la solution optimale $({}^jy^{(n+1)}, {}^jx^{(n+1)})$ au CCP.

Il en est de même pour le CGR qui transmet $({}^0y^{(n+1)}, {}^0x^{(n+1)})$.

3) Le CCP calcule une moyenne pondérée des réponses :

$$\begin{vmatrix} {}^0\overline{y}^{(n+1)} \\ {}^0\overline{x}^{(n+1)} \end{vmatrix} = \sum_{j=0}^{J} \alpha_j \begin{vmatrix} {}^jy^{(n+1)} \\ {}^jx^{(n+1)} \end{vmatrix} \equiv \mathrm{P} \begin{vmatrix} y^n \\ x^n \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \sum_{j=0}^{J} \alpha_j = 1$$

Ensuite le CCP maxime la fonction objectif U(.) tout en ne s'écartant pas trop de la moyenne des réponses, c'est-à-dire résout le programme :

$$\operatorname{Max} \mathrm{U}(y) - \frac{1}{2\tau_n}[|y - {}^0\overline{y}^{(n+1)}|^2 + \quad |x - {}^0\overline{x}^{(n+1)2}]$$

et transmet la solution optimale $(y^{(n+1)}, x^{(n+1)})$ aux entreprises et au CGR.

Hypothèse 6 : U(.) est continûment différentiable et convexe avec un rayon de courbure inférieur à une constante positive.

Hypothèse 7 :

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = 0$

ii) $\tau_n > \tau_{n+1} > \frac{1}{2}\tau_n$

iii) $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} (\tau_n)^3 = +\infty$

Nous pouvons alors démontrer le :

Théorème 2 : Sous H1, H3, H6, H7, les suites de programmes de la procédure B, $(y^{(n)}, x^{(n)})$, $({}^jy^{(n)}, {}^jx^{(n)})$, $j = 1, \ldots, J$ convergent vers la solution optimale. De plus, la suite $(y^{(n)}, x^{(n)})$ définie par le CCP constitue une suite de programmes semi-réalisables.

Démonstration : cf. section 6.

5. CONCLUSION

Nous avons défini des procédures de planification dans des économies avec ou sans effets externes dont la caractéristique essentielle est l'extrême simplicité des messages transmis et des opérations requises à chaque itération.

Ces procédures ne possèdent pas les propriétés de possibilité et de monotonicité.

En ce qui concerne la possibilité, nous avons vu que la notion de semi-possibilité est presque aussi satisfaisante et qu'à partir d'un programme semi-réalisable on peut souvent construire un programme réalisable.

La seule propriété qui fait clairement défaut est la monotonicité. La monotonicité est une propriété pertinente dans la discussion des vitesses de convergence. Une procédure non monotone et qui converge très vite peut être préférable à une procédure monotone qui converge très lentement. C'est pourquoi, sans une étude approfondie des vitesses de convergence des différentes procédures, il est difficile de préciser le coût qu'impose l'exigence de simplicité que nous avons recherchée.

Une étude de Monte Carlo comparée des vitesses de convergence des différentes procédures de planification qui ont été proposées permettrait d'apporter un début de réponse.

6. DEMONSTRATIONS

Pour simplifier les écritures nous notons $a = \begin{vmatrix} y \\ x \end{vmatrix}$

Théorème 1 (10)

${}^ja^{(n+1)}$ solution des étapes 2 et 3 satisfait [cf. Lions (1968), théorème 1-6, p. 10].

$$(1) \quad \tau_{n+1} \mathrm{J}^j({}^ja^{(n+1)}) - |{}^ja^{(n+1)} - a|^2 + |a^{(n)} - a|^2 - |{}^ja^{(n+1)} - a^{(n)}|^2 \geqslant \tau_{n+1} J^j(a), \ \forall a \in \hat{\mathrm{Y}}^j \qquad j = 0, 1, \ldots, \mathrm{J}.$$

Ajoutons les inégalités (1) :

$$(2) \quad \tau_{n+1} \sum_{j=0}^{J} \mathrm{J}^j({}^ja^{(n+1)}) - \sum_{j=0}^{J} |{}^ja^{(n+1)} - a|^2 + (\mathrm{J}+1)|a^{(n)} - a|^2 - \sum_{j=0}^{J} |{}^ja^{(n+1)} - a^{(n)}|^2 \geqslant \tau_{n+1} \mathrm{J}(a) \quad \forall a \in \mathrm{Y}^*$$

(10) La démonstration de ce théorème est adaptée de Lions-Temam [1971].

La convexité de la norme implique :

$$|a^{(n+1)} - a|^2 \leqslant \frac{1}{J+1} \sum_{j=0}^{J} |{}^j a^{(n+1)} - a|^2$$

d'où, en substituant dans (2) et en ajoutant membre à membre $n = 0, \ldots, N-1$

$$(3) \quad \frac{1}{J+1} \sum_{n=0}^{N-1} \tau_{n+1} \sum_{j=0}^{J} J^j({}^j a^{(n+1)}) - |a^{(N)} - a|^2$$

$$- \frac{1}{J+1} \sum_{j=0}^{J} \sum_{n=0}^{N-1} |{}^j a^{(n+1)} - a^{(n)}|^2 \geqslant \frac{\sigma(N)}{J+1} . J(a) - |a^{(0)} - a|^2 \qquad \forall a \in Y^*$$

La linéarité de $J^j(.)$, $j = 1, \ldots, J$ et la concavité de $J^0(.)$ impliquent :

$$(4) \qquad \frac{1}{J+1} \sum_{j=0}^{J} \sum_{n=0}^{N-1} \tau_{n+1} J^j(a^{(n+1)}) \leqslant \frac{\sigma(N)}{J+1} \sum_{j=0}^{J} J^j({}^j z^{(N)})$$

d'où en reportant dans (3) et en multipliant par $\dfrac{J+1}{\sigma(N)}$

$$(5) \quad \sum_{j=0}^{J} J^j({}^j z^{(N)}) - \frac{J+1}{\sigma(N)} |a^{(N)} - a|^2 - \sum_{j=0}^{J} \frac{1}{\sigma(N)} \sum_{n=0}^{N-1} |{}^j a^{(n+1)} - a^{(n)}|^2$$

$$\geqslant J(a) - \frac{J+1}{\sigma(N)} |a^{(0)} - a|^2 \qquad \forall a \in Y^*$$

D'après H4 (ii), $\dfrac{1}{\sigma(N)} \to 0$ quand $N \to \infty$

(6) D'autre part Y^j étant convexe, ${}^j z^{(N)} \in \hat{Y}^j$, $j = 0, \ldots, J$. $\hat{Y}^j$ étant compact, il existe C_0 et C_1 indépendant de N tels que :

$$|{}^j z^{(N)}| \leqslant C_0 \quad , \quad j = 0, \ldots, J$$

$$J^j({}^j z^{(N)}) \leqslant C_1 \quad , \quad j = 0, \ldots, J$$

Donc,

$$(7) \qquad \frac{1}{\sigma(N)} \sum_{n=0}^{N-1} |{}^j a^{(n+1)} - a^{(n)}|^2 \leqslant C_2 \quad , \quad \forall N$$

De (6), on déduit qu'il existe une sous-suite ${}^j z^{(N')}$ convergente dans $\hat{Y}^j$ vers un élément ${}^j z^*$, $j = 0, \ldots, J$.

Montrons que sous l'hypothèse H4 toutes ces limites sont égales à z^*.

Nous avons :

$$|{}^j z^{(N')} - z^{(N')}|^2 \leqslant \frac{1}{\sigma(N')} \sum_{n=0}^{N'-1} \tau_{n+1} |{}^j a^{(n+1)} - a^{(n)}|^2 \qquad \forall j = 0, \ldots, J$$

Alors,

$$\lim_{N' \to \infty} |{}^j z^{(N')} - z^{(N')}|^2 = |{}^j z^* - z^*|^2 = 0 \quad , \quad \forall j$$

Il faut donc montrer que :

$$\forall \epsilon, \exists N'_0 \text{ tel que } \forall N' \geqslant N'_0, |{}^j z^{(N')} - z^{(N')}|^2 \leqslant \epsilon \quad , \quad \forall j$$

En effet, d'après l'hypothèse (ii), on peut toujours trouver n_0 tel que :

$$\tau_{n_0} < \frac{\epsilon}{2 C_2}$$

Connaissant n_0, on peut déterminer la quantité

$$A_{0_j} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \tau_{n+1} |{}^j a^{(n+1)} - a^{(n)}|^2$$

et comme $\sigma(N) \underset{N \to \infty}{\to} +\infty$, d'après (iii), on peut toujours trouver N'_{0_j} suffisamment grand tel que

$$\sigma(N'_{0_j}) \leqslant \frac{2}{\epsilon \tau_1 A_{0_j}}$$

Alors, d'après (i) :

$$\frac{1}{\sigma(N')} \sum_{n=0}^{N'-1} \tau_{n+1} |{}^j a^{(n+1)} - a^{(n)}|^2 \leqslant \frac{1}{\sigma(N')} \tau_1 \sum_{n=0}^{n_0-1} |{}^j a^{(n+1)} - a^{(n)}|^2$$

$$+ \tau_{n_0} \cdot \frac{1}{\sigma(N')} \sum_{n=n_0}^{N'-1} |{}^j a^{(n+1)} - a^{(n)}|^2$$

D'où, $\quad \forall N' \geqslant N'_0 = \max_j N'_{0_j}, \ \sigma(N') \geqslant \sigma(N'_0) \geqslant \sigma(N'_{0_j}) \quad , \quad \forall j$

et $\qquad |{}^j z^{(N')} - z^{(N')}|^2 \leqslant \dfrac{1}{\sigma(N'_0)} \tau_1 A_{0_j} + \tau_{n_0} C_2 \leqslant \epsilon \quad , \quad \forall j$

Par conséquent, les sous-suites ${}^{i}z^{(N')}$ convergent toutes vers la même limite z^* qui appartient alors à Y^*.

En passant à la limite dans (5), il vient :

$$\lim_{N'\to\infty} \left\{ -|{}^{i}z^{(N')} - z^{(N')}|^2 + \sum_{j=0}^{J} J^j({}^{j}z^{(N')}) \right\} \geqslant J(a) \qquad \forall a \in Y^*$$

soit

$$J(z^*) \geqslant J(a) \qquad \forall a \in Y^*$$

z^* est donc solution du problème et comme $J(.)$ est strictement concave, c'est la solution unique. Les suites $z^{(N)}$ et ${}^{i}z^{(N)}$ n'ont donc qu'un point d'accumulation et par conséquent elles convergent vers z^*.

Corollaire 1

En raison de l'indépendance des fonctions objectifs, il existe $v^* \in \hat{Y}^j$, $j = 0, \ldots, J$ tel que :

$$J^j(v^*) \geqslant J^j(a) \qquad \forall a \in \hat{Y}^j$$

En faisant $a = v^*$ dans (1) nous avons :

$$\tau_{n+1} J^j({}^{j}a^{(n+1)}) - |{}^{j}a^{(n+1)} - v^*|^2 + |a^{(n)} - v^*|^2 - |{}^{j}a^{(n+1)} - a^{(n)}|^2 \geqslant \tau_{n+1} J^j(v^*)$$

La stricte concavité et la différentiabilité de J^j impliquent l'existence de $\gamma > 0$ tel que :

$$J^j({}^{j}a^{(n+1)}) - J^j(a) \leqslant \left(\frac{dJ^j}{da}(a),\, {}^{j}a^{(n+1)} - a\right) - \gamma\, |{}^{j}a^{n+1} - a|^2$$

D'où en reportant dans (1) :

$$(1 + \gamma\tau_{n+1})\, |{}^{j}a^{(n+1)} - a|^2 + |{}^{j}a^{(n+1)} - a^{(n)}| + \tau_{n+1} \left(\frac{dJ^j}{da}(a),\, a - {}^{j}a^{(n+1)}\right) \leqslant |a^{(n)} - a|^2, \quad \forall a \in \hat{Y}^j$$

Comme v^* est optimal, il vérifie :

$$\left(\frac{dJ^j}{da}(v^*),\, v^* - a\right) \geqslant 0, \quad \forall a \in \hat{Y}^j$$

Donc :

$$(8) \qquad (1 + \gamma\tau_{n+1})\, |{}^{j}a^{(n+1)} - v^*|^2 + |{}^{j}a^{(n+1)} - a^{(n)}|^2 \leqslant |a^{(n)} - v^*|^2$$

D'autre part, puisque $J^i(v^*) \geqslant J^i(a)\ \ \forall a \in \hat{Y}^i$ et que $v^* \in \hat{Y}^i$ en faisant $a = v^*$ dans (1) on obtient :

$$(9) \qquad |{}^{i}a^{(n)} - v^*|^2 + |{}^{i}a^{(n)} - a^{(n)}|^2 \leqslant |a^{(n)} - v^*|^2$$

En ajoutant les équations (8) et (9) pour $j \neq i$, on a :

$$\sum_{j=0}^{J} |{}^{j}a^{(n+1)} - v^*|^2 + \sum_{j=0}^{J} |{}^{j}a^{(n)} - a^{(n)}|^2 + \sum_{j=0}^{J} \gamma\tau_{n+1}\, |{}^{j}a^{(n+1)} - v^*|^2 \leqslant (J+1)\, |a^{(n)} - v^*|^2$$

notons que :

$$\frac{1}{J+1} \sum_{j=0}^{J} |{}^{j}a^{(n+1)} - v^*|^2 \geqslant |a^{(n+1)} - v^*|^2$$

Par conséquent :

$$(10) \quad (J+1)\, |a^{(n+1)} - v^*|^2 + \sum_{j=0}^{J} |{}^{j}a^{(n)} - a^{(n)}|^2 + \gamma (J+1)\, \tau_{n+1}\, |a^{(n+1)} - v^*|^2 \leqslant (J+1)\, |a^{(n)} - v^*|^2$$

D'où, en ajoutant pour $n = 0, \ldots, N-1$

$$|a^{(N)} - v^*|^2 + \frac{1}{J+1} \sum_{j=0}^{J} \sum_{n=0}^{N-1} |{}^{j}a^{(n)} - a^{(n)}|^2 + \gamma \sum_{n=0}^{N-1} \tau_{n+1}\, |a^{(n+1)} - v^*|^2 \leqslant |a^{(0)} - v^*|^2 \leqslant C$$

Les suites ${}^{j}a^{(n)}, a^{(n)}$ convergent vers v^*. En effet :

Supposons qu'aucune sous-suite de $a^{(n+1)}$ ne converge vers v^*. Alors :

$$\exists N_0, \epsilon : \forall n \geqslant N_0,\ |a^{(n+1)} - v^*|^2 \geqslant \epsilon$$

D'où,

$$\gamma \left(\sum_{n=N_0}^{N} \tau_{n+1}\right) \epsilon \leqslant \gamma \sum_{n=N_0}^{N} \tau_{n+1}\, |a^{(n+1)} - v^*|^2 \leqslant C \qquad \forall N > N_0$$

une contradiction au fait que $\Sigma\tau_n$ est une série divergente.

Il existe donc une sous suite $a^{(n')}$ qui converge vers v^*. D'après (10) la suite $|a^{(n)} - v^*|^2$ est décroissante; comme elle est bornée inférieurement, elle converge vers zéro.

De même, les suites ${}^j a^{(n)}$, $j = 0, \ldots, J$, convergent toutes vers v^* car, en faisant tendre n vers l'infini dans (10) on a :

$$\lim_{n\to\infty} |{}^j a^{(n)} - a^{(n)}|^2 = \lim_{n\to\infty} |{}^j a^{(n)} - v^*|^2 = 0$$

Q.E.D.

Théorème 2 [11] :

Par définition de a^n et a^{n+1}

$$a^{n+1} - a^n = {}^0\bar{a}^{n+1} - {}^0\bar{a}^n - \tau_n\,[\nabla U(a^{n+1}) - \nabla U(a^n)] + (\tau_{n-1} - \tau_n)\,\nabla U(a^n)$$

En multipliant par $(a^{n+1} - a^n)$ et en utilisant H6 on obtient :

$$|a^{n+1} - a^n|^2 \leqslant |a^{n+1} - a^n|\ |{}^0\bar{a}^{n+1} - {}^0\bar{a}^n| - \tau_n\,\gamma\,|a^{n+1} - a^n|^2 + \delta_n\ |\nabla U(a^n)|\ |a^{n+1} - a^n|$$

avec $\delta_n = \tau_{n-1} - \tau_n$

En utilisant l'inégalité $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ pour

$$|a^{n+1} - a^n|\ |{}^0\bar{a}^{n+1} - {}^0\bar{a}^n|$$

et l'inégalité $ab \leqslant \frac{1}{2\alpha}a^2 + \frac{\alpha}{2}b^2$ pour $\delta_n\ |\nabla U(a^n)|\ |a^{n+1} - a^n|$ on obtient :

$$|a^{n+1} - a^n|^2 \leqslant |{}^0\bar{a}^{n+1} - {}^0\bar{a}^n|^2 - 2\,\tau_n\,\gamma\,|a^{n+1} - a^n|^2 + 2\,\delta_n\,\gamma\,|a^{n+1} - a^n|^2 + \frac{\delta_n}{2\gamma}\,|\nabla U(a^n)|^2$$

d'où

$$(11)\quad [1 + 2(\tau_n - \delta_n)\gamma]\ |a^{n+1} - a^n|^2 \leqslant |{}^0\bar{a}^{n+1} - {}^0\bar{a}^n|^2 + \frac{\delta_n}{2\gamma}\,|\nabla U(a^n)|^2$$

Chaque application projection étant lipschitzienne de rapport 1; on a :

$$|{}^0\bar{a}^{n+1} - {}^0\bar{a}^n| \leqslant |a^n - a^{n-1}|$$

(11) La démonstration de ce théorème est adaptée d'une démonstration de P. Saint-Pierre.

En ajoutant les inégalités (11) pour $n = 1$ à N, on obtient (en prenant M comme majorant des normes des gradients de U) :

$$(12)\quad |a^{N+1} - a^N|^2 + 2\gamma \sum_{n=1}^{N} (2\,\tau_n - \tau_{n-1})\ |a^{n+1} - a^n|^2 \leqslant |a^1 - a^0|^2 + \frac{M^2}{2\gamma}(\tau_0 - \tau_N)$$

Si on pose $\mu_n = 2\,\tau_n - \tau_{n-1}$, (12) entraîne :

$$(13)\quad \sum_{n=1}^{N} \mu_n\ |a^{n+1} - a^n|^2 \leqslant C$$

D'après H7,

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$$

$$(14)\quad \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu_n = \lim_{N\to\infty} \left[\tau_N + \sum_{n=2}^{N} \tau_n - \tau_1\right] = +\infty$$

D'où il existe au moins une sous-suite telle que :

$$(15)\quad \lim_{n\to\infty} |a^{n+1} - a^n| = 0$$

sinon (13) serait contredit à cause de (14) c'est-à-dire : $\forall \epsilon > 0\ \exists n'_0$: $n' > n'_0$ implique $|a^{n'+1} - a^{n'}| < \epsilon$

En sommant les équations (10) à partir de n'_0, et en utilisant le fait que $\tau_n - \delta_n \geqslant 0$ et que $\lim_{n\to\infty} \tau_n = 0$, on a :

$$|a^{N+1} - a^N|^2 \leqslant |a^{n'_0+1} - a^{n'_0}|^2 + \frac{M^2}{2\gamma}(\tau_{n'_0} - \tau_N)$$

$$\forall \epsilon > 0\quad \exists n'_0 : N > n'_0 \text{ implique } |a^{N+1} - a^N| < \epsilon$$

c'est-à-dire $\lim_{N\to\infty} (a^{N+1} - a^N) = 0$ pour toute la suite.

La suite a^n qui appartient à un ensemble compact $\hat{Y}_0$ admet une sous-suite convergente.

Nous allons montrer que la limite de toute sous-suite convergente appartient à l'ensemble des réalisables et est optimale. Comme la solution optimale est unique cela montera que la suite a^n converge vers la solution optimale.

Soit $\tilde{a}$ la limite d'une sous-suite convergente notée $a^{n'}$. On a toujours :

$$|a^n - {}^0\bar{a}^n| = \tau_n \; |\nabla U(a^n)| \leqslant \tau_n \, M$$

(15) d'où $\lim\limits_{n\to\infty} |a^n - {}^0\bar{a}^n| = 0$

Donc $a^{n'} \to \tilde{a}$

$${}^0\bar{a}^{n'} \to {}^0\tilde{a} = \tilde{a} \quad \text{par (15)}$$

Comme $a^{n'+1} - a^{n'} \to 0$ par (14), $a^{n'+1} \to \tilde{a}$

d'où ${}^0\bar{a}^{n'+1} \to \tilde{a}$ par (13)

Comme ${}^0\bar{a}^{n'} = P(a^{n'})$ et, puisque P est continue, $\tilde{a}$ vérifie $\tilde{a} = P(\tilde{a})$.

D'où, $\tilde{a} \in Y^*$, puisque tout point fixe de P appartient à Y^*

Il reste à montrer que $\tilde{a}$ est optimal, c'est-à-dire que

$$(\nabla U(\tilde{a}) \, , \tilde{a} - a) \geqslant 0 \qquad \forall a \in Y^*$$

Comme ${}^ja^{n+1}$ minimise $|a - a^n|^2$ sur $\hat{Y}^j$ on a :

$$({}^ja^{n+1} - a^n \, , \, a^n - a) \leqslant - \, |{}^ja^{n+1} - a^n|^2 \, , \quad \forall a \in \hat{Y}^j$$

Comme ${}^0\bar{a}^{n+1} = \sum\limits_{j=0}^{J} \alpha_j \; {}^ja^{n+1} \qquad j = 0, \ldots, J$

$$({}^0\bar{a}^{n+1} - a^n \, , \, a^n - a) \leqslant - \sum_{j=0}^{J} \alpha^j \; |{}^ja^{n+1} - a^n|^2 \, , \quad \forall a \in Y^*$$

$$a^{n+1} = {}^0\bar{a}^{n+1} + \tau_n \, \nabla U(a^{n+1})$$

D'où $\qquad (\nabla U(a^{n+1}) \, , \, a^n - a) \geqslant \left(\dfrac{a^{n+1} - a^n}{\tau_n} \, , \, a^n - a \right)$

Or le second membre tend vers zéro, car

$$\sum_{n=0}^{N} \mu_n \; \tau_n^2 \; \frac{|a^{n+1} - a^n|^2}{\tau_n^2} \leqslant \text{cte}$$

et $(\tau_n)^3$ est une série divergente.

Donc,

$$\lim_{n\to\infty} (\nabla U(a^{(n+1)}) \, , \, a^n - a) = (\nabla U(\tilde{a}) \, , \tilde{a} - a) \geqslant 0$$

Q.E.D.

La fin de la démonstration précédente établit seulement que les seules sous-suites convergentes qui ne convergeraient pas vers la solution optimale correspondent aux mêmes sous-suites pour lesquelles la série $\Sigma \tau_{n'}$ serait divergente. Toutefois, un raisonnement plus complexe utilisant (12) permet de montrer que la suite toute entière converge.

CHAPITRE VII

JUSTICE ET EXTERNALITÉS

1. INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents, guidés par le critère d'optimalité parétienne, nous avons surtout recherché les moyens de coordonner, avec un minimum de centralisation de l'information et des décisions, le comportement des agents économiques de façon à conduire une économie avec effets externes sur la frontière de Pareto, c'est-à-dire, à un état efficace.

Nous ne nous sommes posés qu'incidemment des questions de justice distributive. Ce chapitre n'a pas pour objet de fournir une discussion complète des problèmes de distribution dans une économie avec externalités. Notre objectif beaucoup plus modeste est d'examiner les conséquences des effets externes sur la portée d'un concept récent de justice distributive qui a l'avantage de ne pas nécessiter de comparaison interpersonnelle d'utilité.

L'utilisation en théorie économique des notions d'«*équité*» et de «*justice*» a fait suite à une longue discussion entre mathématiciens du problème de la juste division d'un objet non-uniforme entre n personnes, qui est vraiment à l'origine de ces concepts (voir Steinhaus (1948), Dubins et Spanier (1968)).

Foley (1967) a introduit la notion d'équité en économie en disant qu'une allocation (dans une économie d'échange) est *équitable* si personne n'envie le vecteur de consommation d'un autre agent. Schmeidler et Vind, (1972), Schmeidler et Yaari, Kolm (1971) ont ensuite posé le problème de l'existence d'une allocation *juste*, c'est-à-dire, à la fois équitable et Pareto-optimale. Varian (1974) a fourni une démonstration complète de l'existence d'une allocation juste dans une économie d'échange.

Pazner et Schmeidler (1974), Varian (1974) et Daniel (1975) ont montré que dans une économie avec production il pouvait ne pas exister d'allocation juste. Varian (1974) a proposé une modification du concept de justice pour éviter ce problème. Pour envier l'agent j, l'agent i doit envisager de produire autant que l'agent j. Par exemple, si je ne peux produire le même bien qu'un chirurgien je ne peux en aucun cas envier son niveau de vie. Comme le reconnaît Varian cette définition n'est pas entièrement satisfaisante d'un point de vue éthique. De plus avec des technologies complexes il est très difficile d'identifier des outputs individuels. Daniel (1975) a proposé de rechercher des allocations «équilibrées d'un point de vue de justice», c'est-à-dire telles que chaque agent envie et est envié par le même nombre de personnes. Il a donné des conditions sous lesquelles de telles allocations existent dans les économies avec production. Pazner et Schmeidler (1975) ont eux recherché un nouveau concept de justice qui soit non-vide dans les économies avec production et ont proposé le concept d'«allocation Pareto efficace et égalitairement équivalente» (P.e.e.e.). Une allocation est *égalitairement équivalente* s'il existe un vecteur de consommation unique que chaque agent considère comme équivalent à son propre vecteur de consommation. Les exigences informationnelles de ce concept sont très différentes de celles de la notion de justice développée ci-dessus, car les agents ne peuvent pas à la seule vue des vecteurs de consommation déterminer si une allocation est P.e.e.e. Enfin, Feldman et Kirman [1974] ont proposé, dans un esprit de «second rang», de minimer diverses mesures d'envie.

Dans ce chapitre, nous explorons la question de l'existence d'allocations justes dans une économie avec effets externes. Un sous-produit de cette étude est une meilleure compréhension de la difficulté créée par la production pour le concept de justice. Dans la section 2, nous montrons les limites du concept d'équité si,dans une économie avec effets externes, on ne s'intéresse qu'aux biens privés. La section 3 explique pourquoi les externalités personnelles peuvent conduire à l'inexistence d'allocations équitables. Un premier théorème d'existence est donné pour des externalités impersonnelles en utilisant le concept d'équilibre concurrentiel avec externalités. Dans une section 4, nous étendons la démonstration d'existence de Schmeidler-Yaari-Varian, basée sur le théorème de Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz, pour un deuxième type d'externalités impersonnelles. Un cas particulier important d'externalités est étudié à la section 5. Enfin, quelques remarques générales sont rassemblées en conclusion.

2 UNE NOTION RESTREINTE DE JUSTICE

L'introduction authentique de l'environnement dans les notions de justice et d'équité pose des problèmes conceptuels et informationnels importants et on peut être tenté dans un premier temps de considérer l'environnement comme partie intégrale des fonctions d'utilité et de le considérer comme fixé dans les comparaisons nécessaires pour définir la notion d'équité.

Considérons une économie d'échange formée de I consommateurs et L biens. Le vecteur de consommation de l'agent i est noté $x^i \in \mathbf{R}^{\mathrm{L}}_+$ (par souci de simplicité, l'ensemble de consommation est choisi égal à $\mathbf{R}^{\mathrm{L}}_+$ pour chaque agent ; il n'y a donc pas d'externalité sur les ensembles de consommation mais seulement sur les préférences). Soit $w^i \in \operatorname{int} \mathbf{R}^{\mathrm{L}}_+$ le vecteur de ressources de l'agent i $\left(w = \sum_{i=1}^{\mathrm{I}} w^i \right)$ et soit $u^i(.)$ la fonction d'utilité du consommateur i définie sur $\mathbf{R}^{\mathrm{LI}}_+$ pour formaliser les externalités de consommation.

Soit $\bar{x}^i = (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{\mathrm{I}})$.

Une allocation $x = (x^1, \dots, x^{\mathrm{I}})$ est dite *équitable en biens privés* (BP-équitable) si :

$$\forall i, \nexists j \neq i : u^i(x^j, \bar{x}^i) > u^i(x^i, \bar{x}^i)\text{(1)}$$

Une allocation Pareto-optimale et BP-équitable est dite *juste en biens privés* (BP-juste).

Théorème 1 : L'allocation égalitaire $\left(\frac{w}{\mathrm{I}}, \dots, \frac{w}{\mathrm{I}}\right)$ est BP-équitable. L'équilibre concurrentiel avec effets externes (qui existe avec des préférences monotones et convexes, voir Ch. II) à partir de l'allocation égalitaire est aussi BP-équitable.

Démonstration : L'allocation égalitaire est BP-équitable de façon évidente. Par définition de l'équilibre concurrentiel avec effets externes (voir Ch. II), x^{*i} maxime $u^i(x^i, \bar{x}^{*i})$ parmi tous les $x^i \in \mathbf{R}^{\mathrm{L}}_+$ tels que

$$p^* x^i \leqslant p^* w^i = \frac{p^* w}{\mathrm{I}}, \quad i = 1, \dots, \mathrm{I}$$

---

(1) Notons que les allocations $(x^j, \bar{x}^i)$ peuvent n'être pas réalisables.

Puisque l'agent j est contraint par $p^* x^{*j} \leqslant \dfrac{p^* w}{\mathrm{I}}$,

$$u^i(x^{*i}, \bar{x}^{*i}) \geqslant u^i(x^{*j}, \bar{x}^{*i}) \quad , \quad \forall j \neq i$$

Q.E.D.

Malheureusement, les allocations définies dans le théorème 1 ne sont pas Pareto optimales. De plus, il est facile de trouver des exemples pour lesquels il n'existe pas d'allocation BP-Juste. Un arbitrage entre BP-équité et Pareto optimalité est alors inévitable.

Considérons l'exemple suivant d'une économie à un bien et deux agents :

$$u^1(x^1, x^2) = x^1 + 2x^2$$

$$u^2(x^2, x^1) = x^2 + \frac{1}{2}x^1$$

$$x^1 + x^2 = 1$$

L'équité en biens privés exige $x^1 = x^2$. L'optimalité parétienne implique $x^1 = 0$, $x^2 = 1$. Dans l'espace des utilités, nous avons (figure 1)

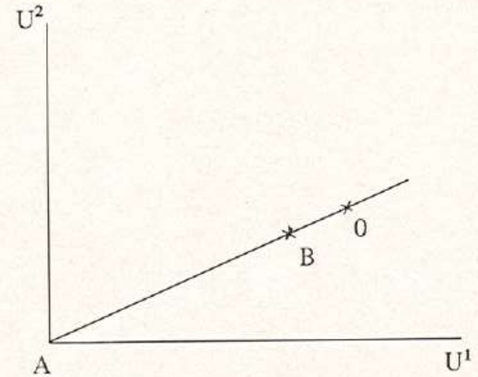

Figure 1

AB est l'ensemble des imputations BP-équitables. 0 est l'unique optimum de Pareto.

Ainsi, la solution de facilité peu satisfaisante considérée dans cette section conduit à une impasse. Si nous voulons sauver le concept de justice en présence d'effets externes, il faut tenir compte des environnements de façon appropriée.

3. JUSTICE

L'environnement de l'agent i est ici défini par le vecteur $(\bar{x}^i)$. Dans cette section, nous supposons que les agents peuvent échanger leurs environnements et nous disons que l'agent i envie l'agent j si :

$$u^i(x^j, \bar{x}^j) > u^i(x^i, \bar{x}^i)$$

Par suite, une allocation est dite *équitable* si personne n'envie aucun agent au sens ci-dessus. Elle est dite *juste* si elle est à la fois équitable et Pareto-optimale (dans l'exemple de la section 2, les imputations équitables constituent le segment A0 et 0 est une imputation juste).

Une première démonstration de l'existence d'allocations justes dans les économies d'échange sans externalités est la suivante : sous des hypothèses de convexité, l'équilibre concurrentiel à partir de l'allocation égalitaire existe ; à l'équilibre, les agents ont les mêmes revenus et font face au même système de prix, de sorte que tout ce que l'agent j choisit de consommer aurait pu l'être par l'agent i.

Nous montrons ici que pour le concept analogue dans le cas des effets externes qui permettrait d'exhiber une allocation Pareto optimale, le pseudo-équilibre avec effets externes (voir Ch. III), les agents font face à des prix personnalisés ; aussi, il n'est pas suffisant de leur assurer des revenus identiques pour obtenir un état juste. Nous retrouvons ici la même difficulté que celle qui a été discutée dans les économies avec production ; elle est très générale et est liée à l'existence de biens non tranférables, tels différents types de travail.

Pour définir le pseudo-équilibre concurrentiel nous construisons une économie auxiliaire $\tilde{\mathrm{E}}$ (voir Ch. III pour une construction détaillée).

x_ℓ^{ik} est la consommation de bien ℓ par le consommateur i perçue par l'agent k. Par définition x_ℓ^{ik} sera dans $\tilde{\mathrm{E}}$ la *demande* par l'agent i du bien artificiel associé à cet effet externe. De plus, soit :

$$x^{ik} = (x_1^{ik}, \ldots, x_{\mathrm{L}}^{ik}) \quad i = 1, \ldots, \mathrm{I} \ ; \ k = 1, \ldots, \mathrm{I} \ ; \ k \neq i$$

$$x^{i\cdot} = (x^{i1}, \ldots, x^{i(i-1)}, x^{i(i+1)}, \ldots, x^{i\mathrm{I}}) \quad , \quad i = 1, \ldots, \mathrm{I}$$

$$x^{\cdot k} = (x^{1k}, \ldots, x^{(k-1)k}, x^{(k+1)k}, \ldots, x^{\mathrm{I}k}) \quad , \quad k = 1, \ldots, \mathrm{I}$$

L'ensemble de consommation de l'agent i dans $\tilde{\mathrm{E}}$ est maintenant :

$$\tilde{\mathrm{X}}^i = \{x^i, -\overset{\circ}{x}{}^{\cdot i}, x^{i\cdot} \quad / x^i \in \mathrm{R}_+^{\mathrm{L}}, \overset{\circ}{x}{}^{\cdot i} \in \mathrm{R}^{\mathrm{L}(\mathrm{I}-1)}, \quad x^{ik} = x^i, \ \forall k \neq i\}$$

$$\subset \mathrm{R}^{\mathrm{L}+2(\mathrm{I}-1)\mathrm{L}}$$

où $\mathring{x}^{\cdot i}$ est, par définition, l'offre de bien artificiel associé à l'effet externe de la consommation de bien ℓ par l'agent i sur l'agent k. $x^{ik} = x^i, \forall k \neq i$, exprime le fait que, pour être en mesure de consommer x^i, l'agent i doit aussi consommer certains biens artificiels (les droits à créer les externalités) en quantités égales.

Un état de $\widetilde{\mathrm{E}}$, c'est-à-dire, un vecteur

$$\widetilde{x} = (x, \mathring{x}^{\cdot 1}, \dots, \mathring{x}^{\cdot \mathrm{I}}, x^{1\cdot}, \dots, x^{\mathrm{I}\cdot}) \in \mathbf{R}^{\mathrm{LI}+2\mathrm{L}(\mathrm{I}-1)\mathrm{I}}$$

est réalisable si :

a) $(x^i, -\mathring{x}^{\cdot i}, x^{i\cdot}) \in \widetilde{\mathrm{X}}^i \quad , \quad i = 1, \dots, \mathrm{I}$

b) $\mathring{x}^{ik} = x^{ik} \quad , \quad i = 1, \dots, \mathrm{I} \ ; \ k = 1, \dots, \mathrm{I} \ ; \ k \neq i$

c) $\sum_{i=1}^{\mathrm{I}} x^i = \sum_{i=1}^{\mathrm{I}} w^i = w$

Un *pseudo-équilibre concurrentiel* est un état réalisable de l'économie, $\widetilde{x}^*$, et un vecteur $\widetilde{p} = (p, p^{1\cdot}, \dots, p^{\mathrm{I}\cdot})$(2) tel que :

$(x^{*i}, \overline{x}^{*i})$ maxime $\mathrm{U}^i(.,.)$ dans l'ensemble des $\widetilde{x}^i = (x^i, -\mathring{x}^{\cdot i}, x^{i\cdot})$ tels que :

$$\widetilde{x}^i = (x^i, -\mathring{x}^{\cdot i}, x^{i\cdot}) \in \widetilde{\mathrm{X}}^i$$

$$\widetilde{p}\widetilde{x}^i = px^i - p^{\cdot i}\mathring{x}^{\cdot i} + p^{i\cdot}x^{i\cdot} = \widetilde{p}\widetilde{w}^i$$

avec : $\widetilde{w}^i = (w^i, 0, \dots, 0) \quad , \quad i = 1, \dots, \mathrm{I}$

Même si on distribue de façon égale les ressources initiales w/I, puisque les agents font face à des prix personnalisés (nécessaires pour l'optimalité parétienne), il n'y a aucune garantie d'obtenir une allocation juste à l'équilibre.

L'exemple suivant le prouve et montre même qu'il peut ne pas exister d'allocation juste.

Considérons l'économie à un bien et trois agents suivante :

$$\mathrm{U}^1(x^1, x^2, x^3) = x^1 + 2x^2$$

$$\mathrm{U}^2(x^1, x^2, x^3) = x^2 + 10x^3$$

$$\mathrm{U}^3(x^1, x^2, x^3) = x^3 + 4x^2$$

$$x^1 + x^2 + x^3 = 3$$

(2) Voir Ch. III pour une interprétation précise de ces prix.

Il est facile de voir que l'équité exige $x^1 = x^2 = x^3$. La meilleure allocation équitable (1 , 1 , 1) qui donne le vecteur d'utilités (3 , 11 , 5) n'est pas Pareto optimale, puisqu'elle est dominée par l'allocation (0 , 2 , 1) qui donne les niveaux d'utilité (4 , 12 , 9). Par conséquent, il n'existe pas dans cette économie d'allocation juste.

Il est important d'observer que dans l'exemple ci-dessus les externalités sont *personnelles*, c'est-à-dire, l'agent 3 est affecté par la consommation de l'agent 2, mais pas par la consommation de l'agent 1.

Deux définitions d'externalités *impersonnelles* ont été proposées. Dans la définition 1, le vecteur $\overline{x}^i_\ell$ intervient dans la fonction d'utilité de l'agent i sous la forme $\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{\mathrm{I}} x^j_\ell$. Dans la définition 2, $\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{\mathrm{I}} x^j_\ell$ est remplacé par $\sum_{j=1}^{\mathrm{I}} x^j_\ell$; un exemple où cette substitution est justifiable est le cas d'une fumée polluante qui est créée aussi bien par la consommation de l'agent i que par la consommation des autres agents.

Il est facile de montrer que lorsque les externalités impersonnelles (déf. 2) sont positives, l'équilibre concurrentiel avec effets externes (Ch. II) à partir de la distribution égalitaire définit une allocation juste. En effet, dans ce cas, il est immédiat de voir que cet équilibre est Pareto efficace et équitable.

De façon plus générale, nous obtenons :

Théorème 2 : Avec des externalités impersonnelles et des préférences monotones et convexes par rapport aux biens privés, l'ensemble des allocations justes est non-vide, s'il existe une sélection continue dans la correspondance des équilibres concurrentiels avec effets externes.

Démonstration : Soit $v \leqslant w$, un vecteur de ressources initiales, et soit $\mathrm{E}(v)$ la correspondance qui associe à v l'ensemble des équilibres concurrentiels avec effets externes à partir de la distribution égalitaire $\left(\frac{v}{\mathrm{I}}, \dots, \frac{v}{\mathrm{I}}\right)$

D'après Fuchs et Laroque (1974) (voir Ch. II), nous savons que cette correspondance $\mathrm{E}(.)$ est s.c.s. à valeurs non-vides de $[0, w]$ dans un ensemble convexe compact C d'états possibles. Elle est continue sur un ensemble régulier d'économies. Nous allons de plus supposer qu'il existe dans cette correspondance une sélection continue ϵ.

Etant donné une allocation x, soit $u(x) = (\overline{u}^1, \dots, \overline{u}^{\mathrm{I}})$; considérons alors le programme suivant :

$$\mathrm{Max} \sum_{i=1}^{\mathrm{I}} \lambda^i u^i(x^i, \overline{x}^i) \quad \text{avec} \quad \lambda^i > 0 \quad , \quad i = 1, \dots, \mathrm{I}$$

T.Q. $$0 \leqslant \sum_{i=1}^{I} x^i \leqslant w$$

$$u^i(x^i, \bar{x}^i) \geqslant \bar{u}^i \quad , \quad i = 1, \ldots, I$$

Pour un ensemble de λ^i donné, ce programme détermine un ensemble d'optima parétiens qui dominent (faiblement) l'allocation x.

Il est facile de voir par le théorème du maximum que la correspondance Ψ qui associe $(\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^I)$ à l'ensemble des $\sum_{i=1}^{I} x^{*i}$, où x^{*i} $i = 1, \ldots, I$ est solution du programme ci-dessus, est s.c.s. à valeurs convexes compactes non-vides.

Soit $\phi = \Psi \circ u$.

On peut dès lors appliquer le théorème de Kakutani à la correspondance $\Delta = \begin{bmatrix} \epsilon \\ \phi \end{bmatrix}$ de $C \times [0, w]$ dans $C \times [0, w]$ pour obtenir l'existence de v^* tel que l'allocation d'équilibre concurrentiel avec effets externes $\widetilde{x}$ à partir de la distribution égalitaire $\left[\frac{v^*}{I}, \ldots, \frac{v^*}{I}\right]$ soit dominée par un optimum de Pareto x^* tel que $\sum_{i=1}^{I} x^{*i} = v^*$. Mais par un argument classique (Debreu (1959)), ceci implique que $\widetilde{x}$ est un optimum de Pareto.

$\widetilde{x}$ est équitable puisque $\widetilde{x}^i$ maxime $u^i(x^i, v^*)$ parmi tous les $x^i \in \mathbb{R}^L_+$, tel que $px^i \leqslant p\frac{v^*}{I}$, $i = 1, \ldots, I$.

$\widetilde{x}$ est donc une allocation juste.

Q.E.D.

Le théorème précédent n'exige aucune hypothèse sur la forme des effets externes en plus de l'hypothèse d'impersonnalité, mais requiert une hypothèse très forte concernant l'existence d'une sélection continue dans la correspondance d'équilibres concurrentiels avec effets externes (dont on ne peut être assuré que dans des cas particuliers, par exemple dans les cas d'unicité d'équilibre). D'autre part, cette démonstration n'est pas valable pour la définition 1 d'externalités impersonnelles.

C'est pourquoi nous présentons dans la section suivante, une adaptation au cas des externalités impersonnelles quelconques de la démonstration de Schmeidler-Yaari-Varian.

4. UN RESULTAT GENERAL

En plus de l'hypothèse d'externalité impersonnelle, nous aurons besoin des hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 : Il existe un bien strictement désiré par chaque agent (appelé bien 1 sans perte de généralité) qui ne crée pas d'externalité et tel que $u^i(x^i, \bar{x}^i) = 0$ (limite inférieure de la fonction d'utilité) si $x^i_1 = 0$, $i = 1, \ldots, I$. De plus, si $x^i_1 > 0$, alors $u^i(x^i, \bar{x}^i) > 0$ et nous normalisons les fonctions d'utilité de sorte que $u^i(x^i, \bar{x}^i) = 1$ si $x^i = \frac{w}{I}$, pour $i = 1, \ldots, I$.

Hypothèse 2 : Il n'existe pas deux allocations Pareto optimales que tous les agents considèrent comme indifférentes.

Cette hypothèse nous dispense d'hypothèses de convexité. Toutefois, une condition suffisante pour l'obtenir est la convexité des fonctions d'utilité par rapport à l'ensemble des arguments. Alors nous avons :

Théorème 3 : Sous H1-H2, si les externalités sont impersonnelles, il existe des allocations justes.

Démonstration : Pour la clarté de la démonstration, nous présentons deux résultats intermédiaires sous forme de lemmes(3).

Lemme 1 : Si x est une allocation Pareto optimale, alors il existe un agent qui n'envie personne et il existe un agent que personne n'envie.

Supposons au contraire que chaque agent envie un autre agent. Puisqu'il y a un nombre fini d'agents, il existe un cycle $(i_1, \ldots, i_m)$ tel que :

i_1 envie i_2 qui envie i_3 ... qui envie i_m qui envie i_1. En prenant $i_1 = 1, \ldots, i_m = m$, sans perte de généralité, nous avons :

$$u^1\left(x^2, \sum_{i\neq 2} x^i\right) > u^1\left(x^1, \sum_{i\neq 1} x^i\right)$$

$$u^2\left(x^3, \sum_{i\neq 3} x^i\right) > u^2\left(x^2, \sum_{i\neq 2} x^i\right)$$

....

$$u^m\left(x^1, \sum_{i\neq 1} x^i\right) > u^m\left(x^m, \sum_{i\neq m} x^i\right)$$

(3) Dans la rédaction de la démonstration nous utilisons la définition n° 1 d'externalités impersonnelles mais le lecteur peut vérifier que toutes les étapes restent valables avec la définition 2.

Considérons l'allocation x' pour laquelle chaque agent dans le cycle reçoit le vecteur de consommation de l'agent qu'il envie et les agents en dehors du cycle conservent leur vecteur de consommation. Alors :

$$\sum_{i\neq 1} x'^i = \sum_{i\neq 2} x^i \ldots \quad \text{et donc} \quad u^j\left(x'^j, \sum_{i\neq j} x'^i\right) > u^j\left(x^j, \sum_{i\neq j} x^i\right), \qquad j = 1, \ldots, m$$

ce qui condredit la Pareto optimalité de x.

Une démonstration analogue peut être construite pour la deuxième partie du lemme.

Q.E.D.

Soit P l'ensemble des optima de Pareto.

Soit $P_+ = \{x \in P : x_1^i \neq 0 \ , \ i = 1, \ldots, I\}$

$$u(P_+) = \{u^1(x^1, \bar{x}^1), \ldots, u^I(x^I, \bar{x}^I) : (x^1, \ldots, x^I) \in P_+\}$$

Lemme 2 : Sous H1, $u(P_+)$ est homéomorphe à l'intérieur du simplexe de dimension $(n-1)$.

Soit $p : u(P_+) \to \text{int } S^{L-1}$ défini par $p(u) = \dfrac{u}{\sum_{i=1}^{I} u^i}$. La fonction p est continue et biunivoque. En effet, elle est surjective : étant donné $y \in \text{int } S^{L-1}$, soit $T(y) = \{t \in R : ty$ est réalisable$\}$. D'après la normalisation des fonctions d'utilité $u^i\left(\dfrac{w}{I}, \dfrac{(I-1)}{I} w\right) = 1$, $i = 1, \ldots, I$. En décroissant de façon appropriée la quantité de bien 1 consommée par chaque agent, nous obtenons avec H1, une allocation x telle que : $u^i\left(x^i, \sum_{j\neq i} x^j\right) = y^i$. Par conséquent, $T(y) \neq \phi$. $T(y)$ est compact. Soit donc $t' = \max t$, $t \in T(y)$ Alors $t'y$ est dans $u(P_+)$. S'il ne l'était pas, nous pourrions trouver (en utilisant à nouveau H1) $t'' > t'$ tel que $t''y$ soit réalisable ce qui contredirait la définition de t', d'où la surjectivité.

D'autre part, p^{-1} est continue, de sorte que p est un homéomorphisme entre $u(P_+)$ et l'intérieur de S^{L-1}. Si de plus H2 est satisfait, P_+ est homéomorphe à l'intérieur de S^{L-1} par $p \circ u$.

Q.E.D.

Démonstration du théorème

Soit $M^j = \{x \in P : u^i(x^i, \bar{x}^i) \geqslant u^i(x^j, \bar{x}^j), \forall i\}$, c'est-à-dire, l'ensemble des allocations Pareto optimales telles que aucun agent n'envie aucun autre agent j.

D'après le lemme 1, $\bigcup_{j\in I} M^j \supset P$. Puisque u^i est continue, $i = 1, \ldots, I$, M^j est fermé, $j = 1, \ldots, I$. M^j contient toutes les allocations dans P telles que $x_1^j = 0$. Par conséquent, les ensembles $p \circ u(M^j)$, inclus dans S^{L-1}, $j = 1, \ldots, I$ satisfont les hypothèses du théorème de Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz, de sorte que leur intersection est non vide.

Soit z un élément de cette intersection ; alors, $z^i > 0$, pour tout i (si $z^j = 0$, $p^{-1}(z) \notin u(M^j)$). Alors $p \circ u$ est un homéomorphisme entre P_+ et int S^{L-1}. Par conséquent, $\bigcap_{j=1} M^j \neq 0$ et il existe des allocations justes.

Q.E.D.

Ainsi, la présence d'externalités impersonnelles n'apparaît pas dans une économie d'échange comme un inconvénient pour le concept de justice étudié dans ce chapitre. Est-il possible d'aller plus loin ? En particulier est-il possible de dire quelque chose sur ces nombreux effets externes qui tout en étant d'origine impersonnelle ont des impacts personnels, dus par exemple à la situation géographique et qui rendent la permutation des environnements définie ci-dessus peu satisfaisante. Par exemple, un agriculteur vivant au grand air pourrait, avec notre définition, envier un travailleur vivant dans une ville polluée parce que celui-ci consomme un peu plus de pain que lui, alors qu'en fait il ne voudrait certainement pas se substituer à lui.

Ce type d'externalité apparaît particulièrement important, c'est pourquoi nous lui consacrons la section suivante.

5. EXTERNALITES ET LOCALISATION

Supposons qu'il existe une technologie d'externalités attachée à chaque agent qui spécifie le niveau de J différentes variables d'environnement à l'endroit où il vit. Les niveaux de ces variables d'environnement sont définis par les fonctions de production généralisées suivantes :

$$\Psi^i(x^1, \ldots, x^I) \in R^J$$

Nous disons alors que l'agent i envie l'agent j si :

$$u^i(x^j, \Psi^j(x)) > u^i(x^i, \Psi^i(x))$$

Autrement dit, nous avons placé l'agriculteur dans la pollution de la ville, ou, de façon symétrique, le travailleur urbain, loin des cinémas de la ville, ce qui semble plus satisfaisant que la permutation effectuée dans la section précédente.

Une fonction $f(.)$ définie sur $\prod_{i=1}^{I} X^i$ est symétrique si :

$$\forall (x^1, \ldots, x^I) \in \prod_{i=1}^{I} X^i$$

$$f(x^1, \ldots, x^I) = f(x^{i_1}, \ldots, x^{i_I})$$

où $(i_1, \ldots, i_I)$ est une permutation de $(1, \ldots, I)$. Nous pouvons alors démontrer le résultat suivant.

Théorème 4 : Sous H1-H2, si toutes les fonctions de production de l'environnement sont symétriques, il existe des allocations justes.

La démonstration de cette proposition est tout à fait analogue à la démonstration de la proposition 3. En effet, il est facile de voir que dans le lemme 2, c'est la symétrie de la fonction $\Psi^i(.)$ qui est importante, la fonction somme pour tous les agents étant un cas particulier.

6. CONCLUSION

Ce chapitre a constitué un début d'exploration des difficultés posées par les externalités aux concepts d'équité et de justice. Il reste certainement beaucoup à dire sur ce sujet. Nous avons montré que c'est le caractère personnel des externalités qui peut poser des problèmes à la notion de juste allocation. Pour ce qui est des externalités impersonnelles qui constituent l'essentiel des externalités d'environnement, nous avons pu démontrer de façon assez générale l'existence d'allocations justes. En conclusion, il est peut être bon de spéculer quelque peu sur des directions de recherche possibles dans le cas des biens non transférables dont les effets externes personnels sont un cas particulier en partant de l'exemple de Pazner et Schmeidler [1974]. Ils considèrent une économie à deux agents avec production dans laquelle aucune allocation juste n'existe parce que les deux agents ont des productivités différentes. Pourquoi ont-ils des productivités différentes ?

Considérons l'économie à deux périodes et deux agents suivante :

$$U^1 = \left[x^{11} - \frac{1}{2}q^{11}\right] + \left[\frac{11}{10}x^{12} + (1 - q^{12})\right]$$

$$U^2 = [x^{21} - 10\,q^{21}] + [2\,x^{22} - (1 - q^{22})]$$

où x^{ij} est la consommation de bien x par l'agent i dans la période j, et q^{ij} est la quantité de travail fournie par l'agent i dans la période j $(0 \leqslant q^{ij} \leqslant 1)$. Le travail peut être utilisé dans la deuxième période pour produire le bien x selon la technologie :

$$x = \alpha q$$

De plus, le coefficient de productivité α dans la seconde période dépend de l'effort fait dans la première période selon :

$$\alpha = \frac{1}{10} + \frac{9}{10}q$$

Les contraintes de l'économie sont alors :

$$x^{11} + x^{21} = 1$$

$$x^{12} + x^{22} = \alpha(q^{11})\,q^{12} + \alpha(q^{21})\,q^{22}$$

Il est facile de vérifier que l'allocation

$$(x^{11} = 1\,;\,q^{11} = 1\,;\,x^{12} = 1\,;\,q^{12} = 1)\ ,$$

$$(x^{21} = 0\,;\,q^{21} = 0\,;\,x^{22} = 0\,;\,q^{22} = 0)$$

est intertemporellement juste (c'est-à-dire juste en utilisant la fonction d'utilité définie sur les deux périodes). Pourtant dans la deuxième période nous sommes exactement dans le cas de l'exemple de Pazner et Schmeidler et les résultats sont injustes. Ceci montre une direction possible d'extension du concept de justice qui concernerait la justice d'un processus économique et non la justice des résultats. De la même façon, si le coefficient α était aléatoire, on pourrait, en l'absence de système d'assurances à cause des problèmes de risque moral, comprendre pourquoi des différences d'aversion pour le risque conduisent à des résultats systématiquement «injustes» malgré l'existence de processus économiques justes ex ante.

Garantir en toutes circonstances la justice des résultats conduit dans un système économique à créer des motivations très faibles pour l'effort. Un «trade-off» entre justice et incitations est certainement nécessaire dans toute institution réaliste ; la justice du processus plutôt que des résultats est sans doute un bon point de départ.

CHAPITRE VIII

FACTEURS COLLECTIFS DE PRODUCTION ET INCERTITUDE (1)

1. INTRODUCTION

Le problème du «free rider» est certainement fondamental lorsqu'on traite d'externalités ou de biens publics qui affectent les consommateurs [voir à ce sujet le Chapitre IX]. Heureusement, ce problème n'est pas aussi important lorsque les agents concernés sont des entreprises ; en effet, dans ce cas, les relations techniques qui expriment la dépendance des entreprises vis-à-vis des externalités et des biens publics devraient pouvoir assez facilement être reconnues objectivement par les parties en cause.

L'importance des facteurs collectifs de production est indéniable : recherche fondamentale, lutte contre la pollution, programmes d'éducation, information publique, ne sont que quelques exemples. Les études spécifiques des facteurs collectifs de production sont néanmoins très limitées. Kaizuka (1965) a obtenu les conditions d'efficacité de la production qui sont, pour la production, l'équivalent des relations de Bowen-Samuelson. Thompson (1968) et Sandmo (1972a) ont discuté les implications d'équilibre général de ces conditions ainsi que la détermination d'un prix implicite correct à utiliser pour la production de ces biens collectifs. Enfin une note de Henderson (1974) étudie les conséquences d'un nombre variable d'entreprises sur les conditions d'efficacité de la production.

Dans ce chapitre, nous introduisons une incertitude technologique dans les fonctions de production et nous recherchons le prix implicite à utiliser pour la production des biens collectifs, dans une économie où la production est privée et décentralisée, et où la bourse des valeurs est la seule protection possible contre l'incertitude. Après une brève description du modèle dans la section 2, nous définissons, dans la section 3, une notion d'optimum contraint dans l'esprit de Diamond (1967) et Sandmo (1972b).

---

(1) Ce chapitre est basé sur «*Collective Factors of Production under Uncertainty*», *Journal of Public Economics*, 1976.

Nous obtenons ensuite dans notre modèle les conditions d'efficacité de la production qui sont comparées aux résultats de Kaizuka (1967) et Sandmo (1972a). Dans une section 4, nous décrivons une économie décentralisée qui dispose d'une bourse des valeurs et nous montrons que les équilibres de cette économie sont des optima contraints définis à la section 3. Enfin un prix implicite pour la production des biens collectifs est obtenu dans cette économie.

2. LE MODELE

Nous considérons une économie formée de I consommateurs, J entreprises privées et une entreprise publique qui produit un bien collectif utilisé comme input par les entreprises privées. La même analyse peut être conduite avec à la place de l'entreprise publique une entreprise privée qui émet une externalité sur les autres entreprises privées.

Avec le travail offert par les consommateurs, ℓ°, l'entreprise publique produit le bien collectif selon la technologie :

$$z = g(\ell^{\circ})\,\phi(\theta) \quad (1)$$

[2]

L'incertitude technologique formalisée dans ce processus de production par la variable aléatoire $\phi(\theta)$ est multiplicative[3]. Par souci de simplicité, nous supposons qu'il existe un nombre fini S d'états de la nature $\theta = 1, \ldots, S$.

En plus du bien public et du travail, il y a dans l'économie un bien de consommation qui est produit par J entreprises privées selon les technologies suivantes :

$$y^j = f^j(\ell^j, z)\,\Psi^j(\theta) \qquad j = 1, \ldots, \mathrm{J}\ (\mathrm{J} < \mathrm{S}) \quad (2)$$

[4]

où ℓ^j est la quantité de travail utilisée par l'entreprise j et z la quantité disponible de l'input collectif. Ici, également, l'incertitude est supposée multiplicative.

(2) g est deux fois continûment différentiable avec : $\dfrac{dg}{d\ell} > 0$, $\dfrac{d^2g}{d\ell^2} < 0$

(3) Voir Diamond (1967) et Leland (1973) pour une discussion de la signification et des limites de l'incertitude multiplicative.

(4) f^j, $j = 1, \ldots, \mathrm{J}$, est deux fois continûment différentiable par rapport à ses deux variables avec :

$$\frac{\partial f^j}{\partial \ell^j} > 0\ ,\ \frac{\partial f^j}{\partial z} > 0\ ,\ \frac{\partial^2 f^j}{\partial \ell^{j2}} < 0$$

Chaque consommateur $i\ (i = 1, \ldots, \mathrm{I})$ a une fonction d'utilité de Von Neumann $\mathrm{U}^i(.\,,.)$ avec deux arguments, la quantité de bien de consommation x^i et la quantité de travail offerte t^i[5]. Tous les consommateurs et tous les producteurs ont les mêmes anticipations concernant l'incertitude technologique objective décrite dans les processus de production.

Les deux contraintes de ressources rares s'écrivent :

$$\sum_{j=1}^{\mathrm{J}} \ell^j + \ell^{\circ} \leqslant \sum_{i=1}^{\mathrm{I}} t^i \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{I}} x^i \leqslant \sum_{j=1}^{\mathrm{J}} y^j \quad (4)$$

3. OPTIMUM CONTRAINT

L'hypothèse d'anticipations identiques pour tous les consommateurs nous permet d'utiliser une extension bien connue du concept d'optimalité de Pareto en termes d'utilités espérées[6]. Si le Centre était en mesure de distribuer les biens après la réalisation des variables aléatoires du problème, il pourrait atteindre un optimum de premier rang. Toutefois, notre objectif n'est pas ici de décrire le comportement d'une économie planifiée mais simplement de définir un optimum contraint ; dans la section suivante nous construirons une économie décentralisée qui atteint un tel optimum contraint. Les contraintes définies dans cette section nous donnerons une mesure qualitative des limitations de l'économie décentralisée étudiée[7].

Nous supposons que le Centre doit décider la distribution des biens et l'allocation de la charge de travail avant la réalisation des variables aléatoires.

(5) U^i, $i = 1, \ldots, \mathrm{I}$ est deux fois continûment différentiable et strictement concave en (x^i, t^i) avec :

$$\frac{\partial \mathrm{U}^i}{\partial x^i} > 0\ ,\ \frac{\partial \mathrm{U}^i}{\partial t^i} < 0.$$

(6) Voir Diamond (1967) et Drèze (1970-1971).

(7) Une autre interprétation (Diamond (1967)) est la suivante : l'optimum contraint définit le comportement d'un planificateur qui dispose seulement d'instruments de planification limités. Cette limitation peut être due à des coûts de transaction, de la même façon que le nombre de marchés est limité dans une économie de marchés.

Soit d^{ij} la fraction de l'output que la j-ième entreprise doit délivrer au consommateur i.

$$\sum_{i=1}^{I} d^{ij} = 1 \quad , \quad j = 1, \ldots, J \tag{5}$$

Soit a^i la quantité de bien de consommation reçue par le consommateur i de la part des autres consommateurs dans le cadre d'une redistribution définie indépendamment des états de la nature.

$$\sum_{i=1}^{I} a^i = 0 \tag{6}$$

Soit b^i la proportion de la charge globale de travail $\ell = \ell^0 + \sum_{j=1}^{J} \ell^j$ attribuée au consommateur i :

$$\sum_{i=1}^{I} b^i = 1 \tag{7}$$

Le Centre contrôle les variables $\ell, \ell^j, a^i, b^i, d^{ij}, i = 1, \ldots, I,$
$j = 1, \ldots, J.$

La consommation de l'agent i ($i = 1, \ldots, I$) dans l'état de la nature θ est par la suite définie comme :

$$x^i(\theta) = \sum_{j=1}^{J} d^{ij} f^j(\ell^j, g(\ell^0)\,\phi(\theta))\, \Psi^j(\theta) + a^i. \tag{8}$$

Les optima contraints sont obtenus à partir du programme de maximation suivant :

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{I} \mu^i \, \mathrm{E}\left[\mathrm{U}^i\Big(\sum_{j=1}^{J} d^{ij} f^j(\ell^j, g(\ell^0)\,\phi(\theta)) .\ \psi^j(\theta) + a^i, b^i\ell\Big)\right] \tag{9}$$

$$\text{T.Q. } \ell^0 + \sum_{j=1}^{J} \ell^j = \ell$$

$$\sum_{i=1}^{I} d^{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, J$$

$$\sum_{i=1}^{I} a^i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{I} b^i = 1$$

avec les multiplicateurs de Lagrange, $\lambda, \delta^j, j = 1, \ldots, J, \alpha, \beta$

Les conditions du premier ordre(8) (9) sont alors :

$$\sum_{i=1}^{I} \mu^i \, \mathrm{E}\left[\mathrm{U}_1^i \cdot \sum_{j=1}^{J} d^{ij}\, \psi^j(\theta) \cdot \frac{\partial f^j}{\partial z} \cdot \phi(\theta) \cdot \frac{dg}{d\ell^0}\right] = \lambda\text{(10)} \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{I} \mu^i \, \mathrm{E}\left[\mathrm{U}_1^i .\ d^{ij} \frac{\partial f^j}{\partial \ell^j} \psi^j(\theta)\right] = \lambda \qquad j = 1, \ldots, J \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{I} \mu^i b^i \, \mathrm{E}[\mathrm{U}_2^i] = -\lambda \tag{12}$$

$$\mu^i \, \mathrm{E}[\mathrm{U}_1^i \, \psi^j(\theta) f^j] = \delta^j \qquad j = 1, \ldots, J;\ i = 1, \ldots, I \tag{13}$$

$$\mu^i \, \mathrm{E}[\mathrm{U}_1^i] = \alpha \qquad i = 1, \ldots, I \tag{14}$$

$$\mu^i \ell \, \mathrm{E}[\mathrm{U}_2^i] = \beta \qquad i = 1, \ldots, I \tag{15}$$

Considérons tout d'abord le cas où il n'y a pas d'incertitude dans la production du bien collectif, c'est-à-dire $\phi(\theta) \equiv 1$. De plus, normalisons $\Psi^j(\theta)$ de manière à ce que :

$$\mathrm{E}\,\Psi^j(\theta) = 1 \ , \ j = 1, \ldots, J$$

En combinant (13) et (14) nous obtenons que :

$$\frac{\mathrm{E}\,\mathrm{U}_1^i \, \Psi^j(\theta) f^j}{\mathrm{E}\,\mathrm{U}_1^i} \tag{16}$$

est indépendant de $i, i = 1, \ldots, I$.

Par conséquent :

$$\frac{\mathrm{E}[\mathrm{U}_1^i \, \psi^j(\theta)]}{\mathrm{E}\,\mathrm{U}_1^i} \tag{17}$$

est aussi indépendant de i, $i = 1, \ldots, I$.

(8) Nous supposons dans toute la discussion que les maxima sont intérieurs et que les conditions de régularité du théorème de Kuhn et Tucher sont vérifiées.

(9) Nous supposons que toutes les intégrales considérées existent et qu'il est possible de dériver sous le signe intégrale.

(10) U_k^i est la dérivée de U^i par rapport à la $k^{ième}$ variable, $k = 1,2$.

En combinant (14) et (15) nous obtenons également que

$$(18) \qquad \frac{EU_2^i}{EU_1^i}$$

est indépendant de i, $i = 1, \ldots, I$.

En substituant (12) et (14) dans (11), nous avons :

$$(19) \qquad \sum_{i=1}^{I} d^{ij} \frac{\partial f^j}{\partial \ell^j} \frac{[EU_1^i \, \psi^j(\theta)]}{EU_1^i} + \sum_{i=1}^{I} b^i \frac{EU_2^i}{EU_1^i} = 0$$

En utilisant (17) et (18), (19) peut alors être récrit :

$$(20) \qquad \frac{\partial f^j}{\partial \ell^j} \frac{[EU_1^i \, \psi^j(\theta)]}{EU_1^i} \sum_{i=1}^{I} d^{ij} + \frac{EU_2^i}{EU_1^i} \sum_{i=1}^{I} b^i = 0$$

ou

$$(21) \qquad \frac{1}{\partial f^j / \partial \ell^j} = - \frac{[EU_1^i \, \psi^j(\theta)]}{EU_2^i} \qquad i = 1, \ldots, I \quad j = 1, \ldots, J$$

ou

$$(22) \qquad \frac{1}{\partial f^j / \partial \ell^j} = - \frac{EU_1^i}{EU_2^i} \cdot PR^j \qquad i = 1, \ldots, I \quad j = 1, \ldots, J$$

où $PR^j = \dfrac{[EU_1^i \, \psi^j(\theta)]}{EU_1^i}$ est la prime de risque dans l'industrie j, dont on a vu au-dessus qu'elle est indépendante de i.

L'inverse de l'espérance (mathématique) de la productivité du travail dans l'industrie j est égale au taux marginal de substitution espéré et ajusté pour le risque entre le bien de consommation et le travail.

De même, en substituant (12) (14) dans (10) nous obtenons :

$$(23) \qquad \sum_{j=1}^{J} \frac{\partial f^j}{\partial z} \cdot \frac{dg}{d\ell^0} \frac{EU_1^i \, \psi^j(\theta)}{EU_1^i} = - \frac{EU_2^i}{EU_1^i}$$

D'où, en utilisant (21) :

$$(24) \qquad \frac{1}{dg/d\ell^0} = \sum_{j=1}^{J} \frac{\partial f^j / \partial z}{\partial f^j / \partial \ell^j}$$

L'inverse de la productivité du travail dans l'entreprise publique est égale à la somme sur toutes les entreprises privées des taux (espérés) de transformation entre le bien collectif et le travail. Cette condition est analogue aux conditions obtenues dans le cas certain par Kaizuka et Sandmo. Notons que la condition d'efficacité de la production (24) est indépendante des préférences.

Si le processus de production de l'entreprise publique comporte aussi de l'incertitude (cf. (1)), ces résultats ne sont plus valables excepté dans le cas où la technologie des entreprises privées est linéaire en une puissance ϵ $(0 < \epsilon \leqslant 1)$ du bien collectif

$$(25) \qquad y^j = f^j(\ell^j) \, z^\epsilon \, \psi^j(\theta)$$

ou

$$(26) \qquad y^j = f^j(\ell^j) \, g^\epsilon(\ell^0) \, \phi^\epsilon(\theta) \, \Psi^j(\theta)$$

En redéfinissant $\widetilde{\psi}^j(\theta) = \phi^\epsilon(\theta) \, \psi^j(\theta)$, avec la nouvelle normalisation $E\,\phi^\epsilon(\theta) \, \Psi^j(\theta) = 1$, $j = 1, \ldots, J$, le problème est le même que ci-dessus. En normalisant $\phi(\theta)$ de sorte que $E\phi(\theta) = 1$, le résultat (24) est encore valable pour l'inverse de la productivité *espérée* du travail.

Jusqu'à présent, nous avons montré que, dans l'optimum contraint, ce type d'incertitude multiplicative peut être ignoré en ce qui concerne la production du bien collectif. C'était prévisible. L'incertitude multiplicative dans la fonction de production de l'entreprise j $(j = 1, \ldots, J)$ implique que le taux marginal de substitution entre le travail et l'input collectif est le même pour tous les états de la nature. En l'absence d'incertitude dans la production de bien collectif, la condition (24) est donc une condition du premier ordre de l'optimalité parétienne (de premier rang). La relation (24) peut donc s'interpréter en disant qu'une séparabilité suffisante est obtenue dans ce problème de second rang de sorte que cette relation marginale de premier rang est satisfaite à l'optimum de premier rang. Lorsque l'incertitude est introduite dans le processus de production de l'entreprise publique, (24) diffère alors de la condition équivalente de premier rang.

Ainsi, lorsque la technologie des entreprises privées n'est pas linéaire dans une puissance de l'input collectif, la multiplicativité essentielle de l'incertitude disparaît et la séparation entre technologie et préférences obtenue dans (24) disparaît. De la même façon, si on introduisait dans les fonctions de production des entreprises privées une incertitude non-multiplicative, on obtiendrait aussi en général l'absence de séparation mentionnée ci-dessus. Il existe toutefois un cas intermédiaire intéressant dans lequel les taux marginaux de substitution entre travail et input collectif sont *aléatoires* et où néanmoins on peut obtenir une version généralisée des conditions de Kaizuka et Sandmo.

Supposons que :

$$(27) \qquad y^j = h^j(z) + \Psi^j(\theta) \, f^j(\ell^j) \, , \quad j = 1, \ldots, J.$$

avec une fonction de production de l'entreprise publique sans incertitude. Des manipulations simples conduisent alors à la formule suivante :

(28) $$\frac{1}{dg/d\ell^0} = \sum_{j=1}^{J} k^j \frac{dh^j/dz}{df^j/d\ell^j}$$

avec : $$k^j = \frac{1}{\mathrm{PR}^j} = \frac{\mathrm{EU}_1^i}{\mathrm{EU}_1^i\,\Psi^j(\theta)} = \frac{1}{1+c^j}$$

où : $c^j = \dfrac{\mathrm{cov}\,\mathrm{U}_1^i\,\Psi^j(\theta)}{\mathrm{EU}_1^i\,\mathrm{E}\,\Psi^j(\theta)}$ est le coefficient de covariation entre l'utilité marginale et Ψ^j.

L'inverse de la productivité marginale du travail dans l'industrie publique est alors égale à une combinaison linéaire des taux marginaux de transformation espérés des entreprises (produisant le bien de consommation) avec des poids inversement proportionnels à leurs primes de risque.

Si $y^j = h^j(z, \ell^j) + \Psi^j(\theta) f^j(\ell^j)$, $j = 1, \ldots, \mathrm{J}$, on obtient de même :

(29) $$\frac{1}{dg/d\ell^0} = \sum_{j=1}^{J} \frac{\partial h^j/\partial z}{\mathrm{PR}^j \dfrac{df^j}{d\ell^j} + \dfrac{\partial h^j}{\partial \ell^j}}.$$

4. UNE ECONOMIE AVEC UNE BOURSE DES VALEURS

Nous considérons maintenant une économie concurrentielle dans laquelle la production du bien de consommation a été décentralisée et le centre (ou l'Etat) est chargé de la production du bien collectif. Il sera plus facile de penser en termes d'un modèle à deux périodes (ou en termes du début et de la fin d'une période). L'Etat perçoit de l'entreprise j un prix unitaire p^j pour son utilisation du bien collectif. Dans la période un, le prix du travail est normalisé à un et l'Etat achète du travail et vend les services du bien collectif aux entreprises privées, en ayant un comportement de concurrence parfaite, c'est-à-dire, en maximant :

(30) $$\left(\sum_{j=1}^{J} p^j\right) z - \ell^0$$

sous la contrainte $z = g(\ell^0)$.

D'où la condition marginale :

(31) $$\sum_{j=1}^{J} p^j \frac{dg}{d\ell^0} = 1$$

Soit Π^0 le profit de l'entreprise publique ; il est distribué dans la première période entre les consommateurs selon des parts α^i, $i = 1, \ldots, \mathrm{I}$.[11]

Les entreprises privées financent leurs achats de travail dans la première période en émettant des obligations qui rapportent un taux d'intérêt certain r. Notons que la normalisation à un du prix du bien dans la deuxième période implique que r incorpore un taux d'intérêt et un rapport de prix.

Les profits de l'entreprise j, $j = 1, \ldots, \mathrm{J}$, actualisés à la période 2 sont alors :

(32) $$\Pi^j(\theta) = f^j(\ell^j, z)\,\Psi^j(\theta) - (1+r)(\ell^j + p^j z)$$

Soit s_0^{ij} (resp. s^{ij}) la valeur des actions de l'industrie[12] j possédées par l'agent i au début (resp. à la fin) de la période un.

La valeur sur le marché des actions de l'entreprise j à la fin de la période un est donc :

(33) $$\mathrm{V}^j = \sum_{i=1}^{I} s^{ij}$$

La quantité du travail offerte par le consommateur i dans la période un est alors :

(34) $$t^i = t^{i0} + \sum_{j=1}^{J} t^{ij} + \sum_{j=1}^{J} (s^{ij} - s_0^{ij}) - \alpha^i \Pi^0 - t^{i0}$$

Un mot d'explication est peut être nécessaire pour cette équation. Dans la période un, nous mesurons tout en unités de travail. t^{i0} est la quantité de travail *directement* offerte par l'agent i à l'entreprise publique. Il reçoit en retour (à la période 1) la valeur du travail fourni t^{i0} plus une part α^i du profit Π^0. t^{ij} est la quantité de travail *directement* offerte par l'agent i à l'entreprise j, $j = 1, \ldots, \mathrm{J}$, pour laquelle il reçoit des obligations à la période 1. $\sum_{j=1}^{J} (s^{ij} - s_0^{ij})$ est la quantité de travail qu'il offre (si cette quantité est positive, qu'il reçoit si elle est négative) dans la modification de son portefeuille. t^i est donc la quantité *nette* de travail qu'il offre à la période 1. Dans la seconde période, il reçoit la valeur de ses obligations obtenues par le travail $\left(\tilde{t}^i = \sum_{j=1}^{J} t^{ij}\right)$ offert directement

(11) Ce profit est distribué en unités de travail.

(12) Nous utilisons de façon interchangeable les mots entreprise et industrie. Pour chaque j, nous pourrions avoir un grand nombre d'entreprises avec la même technologie et la même structure de risque.

aux entreprises privées, soit $\widetilde{t}^i\,(1+r)$, plus sa part des profits calculée à partir de son nouveau portefeuille, soit $\sum_{j=1}^{J} \frac{s^{ij}}{V^j} \cdot \Pi^j$.

La consommation de l'agent i dans la période 2 est par suite :

(35) $$x^i = t^i(1+r) + \sum_{j=1}^{J} \frac{s^{ij}}{V^j}\,\Pi^i$$

Le comportement du consommateur i est défini par le programme suivant :

(36) $$\text{Max EU}^i \left[(1+r)\widetilde{t}^i + \sum_{j=1}^{J} \frac{s^{ij}}{V^j}\cdot\Pi^j, \widetilde{t}^i + \sum_{j=1}^{J} (s^{ij} - s_0^{ij}) - \alpha^i\,\Pi^0\right]$$

D'où :

(37) $$E(1+r)\,U_1^i + EU_2^i = 0$$

(38) $$E\left[\frac{\Pi^j}{V^j}\,U_1^i\right] + EU_2^i = 0$$

La valeur des actions de l'industrie j est donc :

(39) $$V^j = (1+r)^{-1}\cdot\frac{E[U_1^i\,\Pi^j]}{EU_1^i}$$

D'où en remplaçant Π^j par sa valeur (32) :

(40) $$V^j = (1+r)^{-1}\left[\frac{E[U_1^i\ \psi^j(\theta)]}{EU_1^i}\cdot f^j(\ell^j, z) - (1+r)(\ell^j + p^j z)\right]$$

Si l'on note $B^j = \ell^j + p^j z$ la valeur des obligations émises par l'entreprise j, nous retrouvons le théorème de Modigliani-Miller (1958)

(41) $$V^j + B^j = \frac{1}{1+r}\,PR^j\,.\,f^j(\ell^j.\,z)$$

c'est-à-dire, la valeur de marché des actions plus la valeur des obligations émises est égale à la valeur escomptée de l'output espéré ajustée par une prime de risque.

Supposons que les entreprises maximent la valeur de leurs actions sur le marché([13]), en croyant que la valeur de l'output croît proportionnellement avec la quantité de l'output. Alors le programme

(13) Voir Leland (1973) pour une justification de ce comportement en fonction des intérêts des actionnaires et une discussion de ses limitations.

(42) $$\underset{\ell^j}{\text{Max}}\ \frac{f(\ell^j, z)}{f(\overline{\ell}^j, z)}\,(V^j + \overline{\ell}^j + p^j z) - \ell^j$$

donne la condition d'équilibre :

(43) $$\frac{1}{f(\ell^j, z)}\ \frac{\partial f^j(\ell^j, z)}{\partial \ell^j}\,(V^j + \ell^j + p^j z) = 1$$

ou

(44) $$\frac{E[U_1^i\ \psi^j(\theta)]}{EU_1^i}\cdot\frac{\partial f^j}{\partial \ell^j}\cdot = (1+r)$$

ou

(45) $$PR^j = \frac{1+r}{\partial f^j/\partial \ell^j}$$

Si, maintenant, l'Etat perçoit de l'entreprise j le prix

$$p^j = \frac{1}{1+r}\cdot\frac{E[U_1^i\ \psi^j(\theta)]}{EU_1^i}\cdot\frac{\partial f^j}{\partial z} = \frac{PR^j}{1+r}\,\frac{\partial f^j}{\partial z} \qquad j = 1, \ldots, J$$

le prix global du bien collectif est :

(46) $$p = \frac{1}{1+r}\sum_{j=1}^{J} PR^j\,\frac{\partial f^j}{\partial z}$$

D'après le comportement (31) de l'entreprise publique nous avons donc :

(47) $$\frac{1}{dg/d\ell^0} = \frac{1}{1+r}\sum_{j=1}^{J} PR^j\frac{\partial f^j}{\partial z} = \sum_{j=1}^{J}\frac{\partial f^j/\partial z}{\partial f^j/\partial \ell^j}$$

c'est-à-dire la condition d'optimalité (24). On vérifie facilement que les autres conditions d'optimalité contrainte sont aussi vérifiées.

Le prix implicite de l'output de l'entreprise publique peut être récrit en utilisant (41) comme :

$$p = \frac{1}{1+r}\sum_{j=1}^{J}\frac{1}{f^j(\ell^j, z)/[(V^j + B^j)(1+r)]}\cdot\frac{\partial f^j}{\partial z} = \frac{1}{1+r}\sum_{j=1}^{J} 1/p^j\cdot\frac{\partial f^j}{\partial z}$$

où p^j est observable sur le marché comme le rendement moyen espéré sur le capital total de l'industrie j dans la période 1 et r est le taux d'intérêt certain.

Le prix implicite pour l'entreprise publique est une combinaison linéaire des productivités marginales espérées de l'input collectif, qui est donc la seule information que le centre doit obtenir directement des entreprises privées. Comme nous l'avons noté dans l'introduction, ces données technologiques devraient être facilement observables. Elles sont particulièrement simples lorsque les productivités marginales espérées sont indépendantes de z ; sinon, un échange d'information itératif devra sans doute être mis en place entre le centre et les entreprises privées. L'entreprise publique peut ensuite avoir un comportement paramétrique vis-à-vis de ce prix.

Une alternative à ce schéma, que l'on peut noter à partir de (46), est que l'entreprise publique s'adresse directement aux entreprises privées pour leur demander leur taux espérés de transformation entre le travail et le bien collectif et construise ainsi son prix implicite en faisant la somme de ces quantités. Dans une économie planifiée, sans bourse des valeurs, la procédure de Malinvaud (1972) pourrait par exemple être adaptée à l'incertain pour permettre à l'entreprise publique de satisfaire la condition d'efficacité de la production (47).

La littérature sur l'investissement public dans l'incertain (par exemple Arrow-Lind (1970), Sandmo (1972 b)) a ignoré que la plupart des investissements publics sont réalisés pour produire des biens collectifs. Par suite, le débat entre économistes s'est concentré sur les taux d'escompte optimaux à utiliser pour l'investissement public, c'est-à-dire la moitié du problème. Il est important de savoir comment escompter la valeur des produits de l'investissement public, mais il est aussi très important de savoir évaluer ces produits eux-mêmes. Dans le cas de facteurs collectifs de production, des réponses raisonnables peuvent être espérées en utilisant le cadre développé dans ce chapitre.

CHAPITRE IX

SUR LA RÉVÉLATION DES PRÉFÉRENCES [1]

I. INTRODUCTION

Lorsque les externalités affectent les préférences[2], il se pose, pour toute politique économique corrective (Ch. III-IV), le problème de la révélation correcte de l'impact de ces effets externes sur les préférences, c'est-à-dire le problème de la révélation des préférences pour les externalités. Lorsque les effets externes sont à concernement très restreint, on peut imaginer qu'un marchandage coopératif entre les agents permettra de révéler et d'internaliser ces effets. Par contre, et ce sera le sujet de ce chapitre, lorsque les effets externes sont à concernement très large, le problème de révélation est le même que pour les biens publics ; on fait face au «*free rider problem*» que nous traduirons dans ce chapitre par «problème du passager clandestin». Les agents qui bénéficient par exemple d'un effet externe positif vont prétendre que l'effet externe ne les affecte pas en espérant que le comportement des autres agents conduira néanmoins à un haut niveau d'effet externe. Comme la question des révélations des préférences a en général été discutée dans le contexte des biens publics, nous utiliserons ici le langage des biens publics tout en gardant à l'esprit l'analogie avec les effets externes à concernement collectif.

(1) Ce chapitre est basé sur un travail commun avec Jerry Green. Pour un traitement beaucoup plus complet de ce problème, voir «*Incentives in Public Decision Making*», à paraître chez North-Holland.

(2) Le problème de révélation existe aussi pour les externalités qui affectent les technologies mais semble moins grave dans ce cas (voir Ch. VIII).

Dans la section 2, nous situons brièvement le problème du passager clandestin dans son contexte historique. Une caractérisation complète des mécanismes qui apportent une solution au problème du passager clandestin dans une économie où les agents ont des fonctions d'utilité séparables est donnée dans la section 3. La section 4 traite du problème de l'équilibre du budget de l'Etat et fournit une solution approximative dans une économie à un grand nombre de participants.

2. LE PROBLEME DE LA REVELATION DES PREFERENCES DANS UNE PERSPECTIVE HISTORIQUE

A) De Wicksell à Samuelson

A la fin du XIX^{e} siècle, un débat sur les finances publiques prit place entre économistes européens. Deux doctrines étaient opposées, «imposition selon le bénéfice» d'une part , et «imposition selon l'aptitude à payer» d'autre part. Durant la plus grande partie du XIX^{e} siècle, la plupart des auteurs tels J.B. Say et J.S. Mill s'étaient concentrés sur l'approche «aptitude à payer» et considéraient le problème de l'imposition comme plus ou moins indépendant de la détermination des dépenses publiques. A partir de 1880, plusieurs économistes, et en particulier Mazzola, Pantaleoni, de Viti de Marco en Italie, Sax en Autriche commencèrent à utiliser les concepts «modernes» d'utilité marginale et de valeur subjective dans l'étude des services publics et des contributions individuelles à ces services. Ils firent revivre ainsi l'approche «bénéfice» implicite dans les écrits de nombreux auteurs du XVIII^{e} siècle, tels que Bentham, Locke ou Rousseau [le lecteur intéressé par plus de détails sur cette controverse est renvoyé à Musgrave [1959] et Musgrave et Peacock [1967]].

En 1896, Knut Wicksell publia «*Ein neues Prinzip der gerechten Besteuerung*», dans un livre qui rassemble trois essais sur les finances publiques [Wicksell [1896]]. Dans sa discussion de la contribution de Mazzola au débat décrit ci-dessus, il mit en évidence le problème du *passager clandestin* qui avait été ignoré jusque là dans la reformulation de l'approche «bénéfice». Mazzola avait formulé une loi de l'économie fiscale que Wicksell résuma comme suit :

> «La levée d'impôts est juste et s'applique sans arbitraire ni erreur, lorsque chaque contribuable réussit à répartir ses ressources de manière à maximer son utilité».

Pour Wicksell cette exigence n'a pas de sens [1896, p. 81]

> «Si l'agent économique doit répartir ses ressources entre usages privé et public de façon à maximer sa satisfaction, il ne va évidemment contribuer en rien aux projets publics (tout au moins si on néglige les droits fixes et autres charges analogues). Qu'il contribue peu ou beaucoup affectera si légèrement la production de services publics, qu'à toutes fins pratiques, il ne s'en rendra même pas compte. Bien sûr, si chacun devait agir ainsi, l'Etat serait bientôt inactif».

Wicksell, surpris de la trivialité de sa remarque, la considère toutefois fondamentale. Il en conclut qu'une allocation efficace des ressources ne peut être réalisée par un comportement décentralisé [1896, p. 82].

> «L'égalité entre l'utilité marginale des biens publics et leur prix ne peut donc être établie de façon isolée par chaque agent économique, mais doit être assurée par une consultation entre lui et les autres agents ou leurs représentants. Comment une telle consultation doit-elle être organisée pour réaliser un tel but (d'efficacité) ?... Il s'agit justement de répondre à cette question».

Le problème était correctement posé, et ce fut probablement l'apport le plus important de Wicksell à la théorie des finances publiques. Il suggéra aussi une solution, *le principe de l'unanimité (approximative) et du consentement volontaire* à l'imposition. Chaque dépense publique doit être votée simultanément avec la détermination de son financement et ne doit être acceptée que si l'unanimité (ou la quasi-unanimité) est obtenue. Notons aussi qu'il insista, pour la validité de son principe, sur l'existence d'une distribution initiale des revenus appropriée. Si nous pouvions ignorer les coûts d'information et de communication, ainsi que les menaces et les comportements stratégiques, ce processus conduirait en effet à un optimum de Pareto. Cependant, selon l'ordre des votes, plusieurs états distributifs peuvent être obtenus. En vérité, c'est la raison essentielle qui conduira à un comportement stratégique tout au long de la séquence des votes avec des résultats imprévisibles.

Dans «*die Gerechtigkeit der Besteuerung*», Lindahl [1919] a présenté ce qui est souvent considéré comme la version finale de la doctrine «taxation selon le bénéfice». De façon plus précise, Lindahl a donné, dans une économie avec biens publics, une caractérisation (d'équilibre partiel) de l'optimum de Pareto pour lequel la contribution de chaque individu au financement d'un bien public donné égale son utilité marginale pour ce bien public multipliée par la quantité de bien public, ou, dans les termes mêmes de Lindahl, pour lequel la part relative de chaque agent au budget d'un bien public égale son utilité marginale pour le bien public.

Le caractère d'équilibre partiel de l'analyse peut être facilement légitimé si chaque agent a une utilité marginale pour la monnaie constante, comme l'a montré Samuelson [1969]. La seule vraie faiblesse de la présentation de Lindahl est d'ignorer que même en partant d'une distribution optimale des revenus, son mécanisme peut conduire à une distribution inappropriée, c'est-à-dire, à un optimum de Pareto qui n'est plus le meilleur au sens d'une fonction d'utilité collective donnée. Seule l'approche d'équilibre général de Samuelson [1954] [1955] permit de comprendre que dans une économie avec biens publics, il existe une infinité d'optima de Pareto. Etant donné des ressources initiales, à chaque optimum de Pareto peuvent être associés des pseudo-prix et des transferts forfaitaires tels que l'optimum de Pareto puisse être réalisé comme un équilibre concurrentiel avec ces pseudo-prix et ces transferts, appelé pseudo-équilibre. Le caractère «*pseudo*» de l'équilibre est dû au fait que les prix des biens publics sont personnalisés et ne peuvent donc apparaître sur un marché. Dans ce cadre, il est approprié d'appeler équilibre de Lindahl le pseudo équilibre pour lequel les transferts forfaitaires sont nuls. C'est l'état de l'économie qui serait éventuellement atteint si, partant de ressources initiales données, les marchés artificiels requis par les prix personnalisés pouvaient être organisés de façon concurrentielle.

Pour en revenir à la contribution de Lindahl, nous pouvons dire que la caractérisation de l'optimalité de Pareto dans une économie avec biens publics fait de grands progrès grâce à son article, mais que la critique fondamentale de Wicksell, au sujet du problème du passager clandestin est perdue de vue, puisque toute la discussion suppose des préférences connues. En résumé, on connait mieux l'objectif, mais on sait encore moins bien comment y parvenir.

Dans son article de 1939, dans lequel il présente au public américain le débat résumé ci-dessus, Musgrave met l'accent sur la difficulté du problème du passager clandestin. Samuelson est aussi très clair dans la version «mathématique» de sa «théorie pure des dépenses publiques» sur l'impossibilité de décentraliser un pseudo-équilibre. Cependant, personne n'essaie d'attaquer le problème.

B) Tentatives pour résoudre le problème du passager clandestin

H.R. Bowen [1943] a sans doute été le premier économiste à apporter une contribution importante sur le problème du passager clandestin posé par Wicksell. De plus, son article contient une redécouverte des résultats de Lindahl et un exemple montrant que le vote à la majorité peut conduire à un état Pareto optimal, première étape vers le futur résultat de Black [1948] selon lequel le vote à la majorité est une procédure de choix sociaux transitive pour des préférences «à un seul pic».

Bowen établit d'abord les conditions d'optimalité paretienne et rejette le marché pour les atteindre. Il propose à la place un mécanisme de vote. Il réalise qu'il est impossible d'espérer que les agents révèlent leurs préférences pour un projet donné par leurs votes, si leurs contributions sont liées à leurs votes. C'est pourquoi il suppose une imputation a priori des coûts (parts égales si la distribution des revenus est «juste») qui définit des dispositions à payer nettes. L'agent vote pour ou contre un projet selon le signe de sa disposition à payer nette. Le mécanisme de vote à la majorité est, avec des préférences convexes, non manipulable. Cependant il ne permet d'atteindre l'optimalité parétienne que si la moyenne et la médiane de la distribution des dispositions à payer nettes sont identiques. Si on essaie d'atteindre l'optimalité en permettant d'exprimer dans le vote l'intensité des préférences l'agent peut réaliser l'influence de son vote sur le mécanisme de décision (et non plus sur sa contribution), et modifier son vote de façon à obtenir la décision qu'il préfère. Supposons qu'un projet public soit réalisé si la somme des évaluations individuelles annoncées excède le coût qui, par exemple, est réparti également entre les agents. Un agent pour lequel l'utilité du projet est supérieure au coût par tête répondra la plus grande évaluation possible pour essayer de faire accepter le projet. Symétriquement, un agent pour lequel l'utilité du projet est inférieure au coût par tête répondra la plus petite évaluation possible pour essayer de faire rejeter le projet.

Plus récemment, E. Thompson [1967] a imaginé un système d'assurances qui réalise une allocation efficace si l'Etat connait les probabilités (supposées fixes) attachées par les agents au succès ou échec du vote d'un projet public donné. Il est possible d'éliminer cette très forte hypothèse informationnelle par un procédé de révélation des probabilités proposé par Kurz [1974] à la suite de Savage [1971]. Cependant, si les agents font le lien entre les deux étapes de la procédure de Kurz, d'abord révélation des probabilités, ensuite révélation des dispositions à payer par maximation d'une fonction objectif appropriée, ils peuvent modifier avec succès leurs réponses. Newbery [1974] a proposé un mécanisme de paiement aléatoire qui intègre les deux étapes de la procédure de Kurz. Cependant, il reste que la révélation des vraies préférences requiert l'hypothèse selon laquelle l'agent croit qu'il ne peut influencer le résultat du processus de décision collective, c'est-à-dire essentiellement l'hypothèse ci-dessus.

Notons enfin les contributions de Drèze et de la Vallée Poussin [1971] et Malinvaud [1972] qui ont construit une procédure de planification avec biens publics pour laquelle la révélation des préférences est une stratégie maximin.

C) Théorèmes d'impossibilité

A côté de ces tentatives pour résoudre le problème, il existe depuis très récemment des théorèmes négatifs très généraux qui suggèrent l'impossibilité de trouver des mécanismes non manipulables permettant de réaliser une allocation efficace.

Ainsi, Hurwicz [1972] a montré que, dans une économie d'échange avec biens privés, il est impossible de trouver un mécanisme d'allocation des ressources qui soit à la fois Pareto optimal et dans lequel les agents, à l'équilibre du mécanisme, aient intérêt à agir selon leurs vraies préférences. Ledyard et Roberts [1974] ont étendu ce résultat au cas d'une économie avec biens publics.

Dans le même esprit, mais dans le cadre plus général de la théorie des choix sociaux, Gibbard [1973] et Satterthwaite [1975] ont démontré qu'il n'existe pas de mécanisme de choix social pour lequel la stratégie optimale d'un agent est une stratégie dominante et qui soit non-dictatorial et non-manipulable. Ce théorème très important permet de situer la difficulté du problème et les voies de recherche possibles. Comme dans la théorie traditionnelle des choix sociaux (Arrow [1951]), les exigences de Gibbard et Satterthwaite sont très fortes. En particulier, ils permettent un comportement stratégique avec des préférences individuelles arbitraires. Il apparait donc qu'un espoir de solution peut venir d'une limitation du champ des préférences possibles, et par suite, des possibilités de manipulation des agents.

De fait, dans un contexte spécialisé où les décisions concernent seulement le niveau de production des biens publics et des transferts monétaires entre agents, Groves [1973] et Groves et Loeb [1975] ont supposé que les préférences étaient monotones dans le revenu et que les dispositions à payer pour les biens publics étaient indépendantes du revenu. Dans un tel environnement, ils ont trouvé une classe de mé-

canismes tels que la révélation des vraies préférences est une stratégie dominante pour chaque agent et qu'un optimum de Pareto est sélectionné.

Dans la section suivante, nous montrons que les mécanismes proposés par Groves et Loeb sont les seuls à avoir de telles caractéristiques. De plus, nous montrons de façon plus générale que les mécanismes à stratégies dominantes bien définis qui sélectionnent des optima de Pareto (appelés mécanismes satisfaisants), indépendamment de la question de révélation des vraies préférences, sont essentiellement isomorphes aux mécanismes proposés par Groves.

3. CARACTERISATION DES MECANISMES SATISFAISANTS

A) Définitions

a) Projets Publics

Nous nous intéressons à la réalisation d'un ensemble de projets publics (biens publics ou effets externes à concernement collectif) dans une économie où il existe un seul bien privé (que l'on pourra identifier à de la monnaie) et N agents économiques. La seule restriction imposée aux projets publics dans notre analyse, est la compacité, dans un certain espace topologique, de l'ensemble κ des enveloppes de projets publics disponibles. Parmi les nombreux exemples couverts par notre approche très générale, citons :

i) un projet public unique de taille fixe ; dans ce cas, $\kappa = \{0,1\}$, où 1 représente la réalisation du projet et 0 la non-réalisation ;

ii) un projet public unique de taille variable ; la taille possible doit appartenir à un ensemble fermé borné de R, par exemple, $\kappa = [0, \overline{K}]$, ou $\kappa = \{0, [K_1, K_2]\}$ si la technologie requiert une taille minimale, ou $\kappa = \{0, K_1, \ldots, K_L\}$, s'il existe des indivisibilités,

iii) un ensemble de L projets publics de tailles variables ; dans ce cas, on peut avoir par exemple $\kappa = \prod_{\ell=1}^{L} [0, K_\ell]$,

iv) un ensemble compact de fonctions, telles que des lois fiscales ; dans ce cas, par exemple, $\kappa = \mathcal{C}\ [0,1]$, ensemble des fonctions réelles continues sur l'intervalle [0,1], etc. . .

On note K un élément courant de κ.

b) Transferts, fonctions d'utilité et fonctions d'évaluation

Nous considérons des transferts monétaires t^i, $i = 1, \ldots, N$ qui seront déterminés de façon simultanée avec les biens publics. Etant donné une situation initiale arbitraire, le gain d'utilité de l'agent i dû au programme de projets publics et de transferts ($K \in \kappa$, t^i, $i = 1 \ldots N$) est :

$$u^i(K, t^i) \quad \text{défini sur } \kappa \times R$$

Définition 1 : La fonction d'utilité $u^i(\,.\,,\,.\,)$ est dite (additivement) séparable si et seulement si :

$$u^i(K, t^i) = v^i(K) + t^i$$

La fonction $v^i(.)$, *qui est nette des coûts des projets imputés à l'agent i et définis ex ante*, est appelée la fonction d'évaluation de l'agent i. L'hypothèse de séparabilité correspond à une absence d'effet revenu dans l'évaluation des biens publics.

c) Mécanismes

Pour apporter une solution au problème du passager clandestin nous allons soumettre les N agents économiques à un jeu qui est joué selon les règles (ou mécanisme) suivantes :

Soit S^i, l'espace des stratégies de l'agent i, et soit $S = \prod_{i=1}^{N} S^i$. Un «coup» du jeu est un élément $s = (s^1, \ldots, s^N) \in S$.

L'issue du jeu est définie par deux fonctions :

1) Pour chaque coup, une fonction de décision $d(.)$ de S dans κ spécifie la décision quant au choix du projet public.

2) Pour chaque coup, une règle de transferts, $t(.) = [t^1(.), \ldots, t^N(.)]$ de S dans R^N spécifie un programme de transferts.

Soit $f(.) = [d(.), t(.)]$

Le jeu peut être joué avec différents niveaux d'information au sujet des actions des autres joueurs. Si les actions des autres joueurs sont connues, l'issue du jeu peut être un équilibre de Nash. Si elles sont inconnues, les agents peuvent jouer une stratégie maximin ou maximer l'espérance mathématique de leur utilité avec des distributions de probabilités subjectives données sur les actions des autres. Pour tous les jeux considérés dans ce chapitre la stratégie optimale est une stratégie dominante (c'est-à-dire, est optimale pour toute action des autres joueurs).

Soit de façon générale, $\Phi^i(v^i(.))$, l'ensemble des actions du joueur i lorsque la vérité est $v^i(.)$.

Nous introduisons maintenant plusieurs ensembles de règles du jeu :

Définition 2 : Un *mécanisme*, $M = (S, f)$, est un ensemble d'espaces de stratégies S^i, $i = 1, \ldots, N$, et une fonction $f(.) = [d(.), t^1(1), \ldots, t^N(.)]$ de $\prod_{i=1}^{N} S^i = S$ dans $\kappa \times R^N$ telle que pour chaque stratégie jouée s :

1) le projet accepté est $d(s)$;

2) le transfert à l'agent i est $t^i(s)$, pour $i = 1, \ldots, N$.

Définition 3 : Un *mécanisme de révélation,* $MR = \{V, f\}$, est un mécanisme pour lequel une stratégie est une fonction d'évaluation du projet public, et un espace de stratégies $S^i = V^i$ est un espace de fonctions d'évaluation admissibles $\left(V = \prod_{i=1}^{N} V^i\right)$.

Dans un mécanisme de révélation, la question posée à l'agent est : quelle est votre fonction d'évaluation ? De façon évidente, un tel mécanisme ne peut être utilisé que si les agents ont des fonctions d'utilité séparables. Dans ce cas, demander l'évaluation d'un projet public indépendamment de la spécification du transfert reçu a un sens. Nous notons $w^i(.)$ la fonction d'évaluation que l'agent répond; elle peut être différente de la fonction vraie $v^i(.)$.

Soit $w(.) = [w^1(.), \ldots, w^N(.)]$

Définition 4 : Un *mécanisme de révélation direct,* $MRD = \{V, f\}$, est un mécanisme de révélation tel que :

$$d(s) = d(w(.)) \in \{K^*/K^* \in \kappa \text{ et } \sum_{i=1}^{N} w^i(K^*) = \max_{K \in \kappa} \sum_{i=1}^{N} w^i(K)\}.$$

La sélection $d(w(.))$, faite dans l'ensemble des projets, qui maxime la somme des fonctions d'évaluation est arbitraire. Ce mécanisme n'est bien défini que si l'ensemble des projets maximants est non vide. Puisque κ est un ensemble compact, une condition suffisante est que les fonctions d'évaluation soient semi-continue supérieurement (s.c.s) sur κ.

Soit : $w^{-i}(.) = [w^1(.), \ldots, w^{i-1}(.), w^{i+1}(.), \ldots, w^N(.)]$

et :

$$\Sigma\, w^{-i}(.) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} w^j(.)$$

Définition 5 : Un *mécanisme de Groves*, MG = $\{V, f\}$, est un mécanisme de révélation direct avec une règle de transfert spécifique définie par :

$$t^i(w(.)) = \Sigma\, w^{-i}(d(w(.)) + h^i(w^{-i}(.))$$

où $h^i(w^{-i}(.))$ est une fonction déterministe arbitraire de $w^{-i}(.)$, $i = 1, \ldots, N$.

Nous aurons besoin aussi d'un concept proche du mécanisme de Groves pour lequel les transferts et les décisions ne sont pas définis de façon unique.

Définition 6 : Un *mécanisme de Groves généralisé*, MGG = $\{V, F\}$, est :

un ensemble d'espaces de fonctions d'évaluation admissibles, V^i, $i = 1, \ldots, N$;

une correspondance de décision $D(.)$ de V dans κ telle que chaque sélection $d(.) \in D(.)$ maxime $\Sigma\, w^{-i}(.)$;

un ensemble de correspondances déterministes arbitraires $H^i(.)$ de $V^{-i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} V^j$ dans $\mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, N$ telles que :

$$t^i(w(.)) = \Sigma\, w^{-i}(d(w(.))) + h^i(w^{-i}(.))$$

où $h^i(.) \in H^i(.)$, $i = 1, \ldots, N$ et $d(w(.)) \in D(w(.))$

De façon analogue, dans un mécanisme de révélation (direct) généralisé les applications de décision et de transferts sont à valeurs multiples $d(.) \in D(.)$, $t^i(.) \in T^i(.)$, $i = 1, \ldots, N$. De plus, dans un mécanisme de révélation direct généralisé, chaque $d(.)$ maxime la somme des réponses.

d) Propriétés des mécanismes

Dans notre construction de mécanismes, nous sommes intéressés par un certain nombre de propriétés qui sont rassemblées ci-dessous.

Etant donné un mécanisme, soit $D^i(v^i(.)) \in S^i$ l'ensemble des stratégies dominantes de l'agent *i* lorsque sa vraie fonction d'évaluation est $v^i(.)$.

Définition 7 : Un mécanisme est dit *décisif* si et seulement si :

$$\forall i,\ \forall v^i(.) \in V^i,\ D^i(v^i(.)) \neq \phi$$

Soit, alors $S'^i = \bigcup_{v^i(.) \in V^i} D^i(v^i(.))$, l'ensemble des stratégies observables de l'agent *i*. Soit $S' = \prod_{i=1}^{N} S'^i$.

Définition 8 : Un mécanisme est dit *heureux* si et seulement si

$$\forall i,\ \forall s^i \in \Phi^i(v^i(.)),\ d(s) \text{ maxime } \Sigma v^i(.)$$

Un mécanisme généralisé est dit heureux si chaque sélection

$$d(.) \in \Phi(.) \text{ maxime } \Sigma v^i(.)$$

Un mécanisme heureux et décisif est dit *satisfaisant*.

L'utilité de la stratégie *s* pour l'agent *i* avec le mécanisme M s'écrit sans crainte de confusion :

$$u^i(s\,;M) = v^i(d(s)) + t^i(s)$$

Définition 9 : Un mécanisme de révélation est dit *motivant* si et seulement si la vérité est une stratégie dominante pour chaque agent, c'est-à-dire,

$$u^i(w^{-i}(.), v^i(.)\ ;\ MR) \geqslant u^i(w^{-i}(.), w^i(.)\ ;\ MR)$$

$$\forall w^{-i}(.) \in V^{-i},\ \forall w^i(.) \in V^i$$

Note : Un mécanisme de révélation motivant est décisif.

Si nous avons dans κ le programme d'inaction, noté 0, par définition $v^i(0) = 0$, $i = 1, \ldots, N$. Pour un mécanisme de révélation, tel que $0 \in \kappa$, une stratégie $w^i(.)$ est dite *normalisée* si $w^i(0) = 0$. Si toutes les stratégies sont normalisées, le mécanisme de révélation est dit *normalisé*.

B) Caractérisation

Sous l'hypothèse de séparabilité des fonctions d'utilité, nous montrons tout d'abord que les mécanismes de révélation heureux et motivants sont des mécanismes de Groves ; ensuite, nous montrons que tous les mécanismes satisfaisants sont isomorphes à des mécanismes de Groves (généralisés).

Théorème 1 [Groves et Loeb [1975]]

Un mécanisme de Groves est motivant.

Démonstration : Pour tout $w^{-i}(.) \in V^{-i}$ et tout $w^i(.) \in V^i$,

$$u^i(w^{-i}(.), v^i(.)\ ;\ MG) - u^i(w^{-i}(.), w^i(.)\,;MG) = v^i(d(w^{-i}(.), v^i(.)))$$

$$+ \Sigma w^{-i}(d(w^{-i}(.), v^i(.))) + h^i(w^{-i}(.)) - v^i(d(w^{-i}(.), w^i(.)))$$

$$- \Sigma w^{-i}(d(w^{-i}(.), w^i(.))) - h^i(w^{-i}(.)) = \operatorname*{Max}_{K \in \kappa} [v^i(K) + \Sigma w^{-i}(K)]$$

$$- [v^i(d(w^{-i}(.), w^i(.))) + \Sigma w^{-i}(d(w^{-i}(.), w^i(.)))] \geqslant 0$$

Q.E.D.

Théorème 2 [Groves [1974]]

L'ensemble des stratégies dominantes d'un mécanisme de Groves est $\{v^i(.) + \alpha^i\}$, où les α^i, $i = 1, \ldots, N$, sont des constantes arbitraires. Il existe une seule stratégie dominante normalisée correspondant à $\alpha^i = 0$, $i = 1, \ldots, N$.

Démonstration : Supposons qu'il existe une stratégie dominante, disons $v'^i(.)$, qui ne soit pas de la forme $v^i(.) + \alpha^i$. Il existe alors

$$\epsilon > 0\,,\ \alpha\,,\ K^* \in \kappa\,,\ K^{**} \in \kappa$$

tels que :

$$v'^i(K^*) = v^i(K^*) + \alpha$$

$$v'^i(K^{**}) = v^i(K^{**}) + \alpha + \epsilon$$

Nous pouvons choisir $w^{-i}(.)$, s.c.s., tels que :

$$\Sigma w^{-i}(K^*) = -\,v^i(K^*) - \alpha$$

$$\Sigma w^{-i}(K^{**}) = -\,v^i(K^{**}) - \alpha - \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Sigma w^{-i}(K) = -\sup\left[\sup_{K \in \kappa} v^i(K)\,,\ \sup_{K \in \kappa} v'^i(K)\right] - \alpha - \epsilon$$

pour $K \in \kappa$, $K \neq K^*$, $K \neq K^{**}$

La réponse $v^i(.)$ conduit au projet K^* puisque

$$v^i(K^*) + \Sigma w^{-i}(K^*) > v^i(K) + \Sigma w^{-i}(K) \qquad \forall K \neq K^*$$

De même, la réponse $v'^i(.)$ conduit au projet K^{**} puisque :

$$v'^i(K^{**}) + \Sigma w^{-i}(K^{**}) > v'^i(K) + \Sigma w^{-i}(K) \qquad \forall K \neq K^{**}$$

De plus, nous avons :

$$v^i(K^*) + \Sigma w^{-i}(K^*) > v^i(K^{**}) + \Sigma w^{-i}(K^{**})$$

$v'^i(.)$ n'est donc pas une stratégie dominante, une contradiction. Toutes les stratégies dominantes doivent être de la forme $\{v^i(.) + \alpha^i\}$. D'après le théorème 1, toutes les stratégies de la forme $\{v^i(.) + \alpha^i\}$ sont bien des stratégies dominantes.

Une stratégie normalisée de l'agent i est telle que $w^i(0) = 0$. Puisque par définition $v^i(0) = 0$, $\alpha^i = 0$ pour une stratégie dominante normalisée.

Q.E.D.

Corollaire 1 : Un mécanisme de Groves est satisfaisant.

Démonstration : D'après le théorème 2 et la définition d'un mécanisme de Groves, nous savons que la décision prise maxime la somme des fonctions d'évaluation. Il est donc heureux. Comme il est d'autre part motivant il est décisif et donc satisfaisant.

Q.E.D.

Corollaire 2 : L'ensemble des stratégies dominantes d'un mécanisme de révélation motivant et heureux est inclus dans l'ensemble $\{v^i(.) + \alpha i\}$ où les α^i, $i = 1, \ldots, N$, sont des constantes arbitraires. Il existe une seule stratégie dominante normalisée correspondant à $\alpha^i = 0$, $i = 1, \ldots, N$.

Démonstration : Comme dans le théorème 2, nous montrons tout d'abord qu'une stratégie dominante de l'agent i doit être de la forme $\{v^i(.) + \alpha^i\}$. $v^i(.)$ est une stratégie dominante puisque le mécanisme est motivant. Comme dans le théorème 2, c'est aussi la seule stratégie dominante normalisée.

Q.E.D.

Définition 10 : Un mécanisme de révélation direct satisfait la propriété A, si et seulement si, pour tout $i = 1, \ldots, N$,

a) $t^i(w(.))$ est indépendant de $w^i(.)$ pour des $w^i(.)$ qui produisent la même décision $d(w)$, c'est-à-dire, si pour $w^{-i}(.)$, $w^i(.)$, $w'^i(.)$

$$d(w^{-i}(.)\,,\ w^i(.)) = d(w^{-i}(.)\,,\ w'^i(.))$$

alors

$$t^i(w^{-i}(.)\,,\ w^i(.)) = t^i(w^{-i}(.)\,,\ w'^i(.))$$

b) $t^i(w^{-i}(.)\,,\ w^i(.)) - t^i(w^{-i}(.)\,,\ w'^i(.))$

$$= \Sigma w^{-i}(d(w(.))) - \Sigma w^{-i}\ (d(w'(.)))$$

où $\qquad d(w(.))$ maxime $\Sigma w^{-i}(.) + w^i(.)$ sur κ

et $\qquad d(w'(.))$ maxime $\Sigma w^{-i}(.) + w'^i(.)$ sur κ

Lemme : Un mécanisme est un mécanisme de Groves si et seulement si il satisfait la propriété A.

Démonstration : évidente.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer notre théorème de caractérisation fondamental.

Théorème 3 [Green et Laffont [1975a]]

Un mécanisme de révélation direct motivant est un mécanisme de Groves.

Démonstration : Nous considérons tour à tour la négation des deux parties de la propriété A.

Si a) n'est pas vérifié, il existe $w^{-i}(.)$, $w^i(.)$, $w'^i(.)$ qui conduisent à la même décision $K^* = d(w^{-i}(.), w^i(.)) = d(w^{-i}(.), w'^i(.))$ et tels que :

$$t^i(w^{-i}(.), w^i(.)) > t^i(w^{-i}(.), w'^i(.))$$

Soit $v^i(.) = w'^i(.)$. Nous avons :

$$t^i(w^{-i}(.), w^i(.)) + v^i(K^*) > t^i(w^{-i}(.), v^i(.)) + v^i(K^*)$$

$v^i(.)$ n'est donc pas une stratégie dominante, une contradiction.

Si b) n'est pas vérifié, il existe $w^{-i}(.)$, $w^i(.)$, $w'^i(.)$ tels que :

$$K^* \quad \text{maxime} \quad \Sigma w^{-i}(.) + w^i(.) \quad \text{sur} \quad \kappa$$

$$K^{*\prime} \quad \text{maxime} \quad \Sigma w^{-i}(.) + w'^i(.) \quad \text{sur} \quad \kappa$$

et $t^i(w^{-i}(.), w^i(.)) - t^i(w^{-i}(.), w'^i(.)) = \Sigma w^{-i}(K^*) - \Sigma w^{-i}(K^{*\prime}) + \epsilon$

pour un $\epsilon > 0$.

Considérons $\widetilde{w}'^i(.)$ défini de la façon suivante :

$$\widetilde{w}'^i(K^*) = -\Sigma w^{-i}(K^*)$$

$$\widetilde{w}'^i(K^{*\prime}) = -\Sigma w^{-i}(K^{*\prime}) + \delta \quad \text{avec} \quad 0 < \delta < \epsilon$$

$$\widetilde{w}'^i(K) = -C \quad \text{pour} \quad K \neq K^*, K \neq K^{*\prime}$$

$$\text{avec} \quad C > \max_{K \in \kappa} \Sigma w^{-i}(K)$$

$\widetilde{w}'^i(.)$ est s.c.s.

Notons qu'alors $K^{*\prime}$ maxime $\widetilde{w}'^i(.) + \Sigma w^{-i}(.)$ sur κ, et, par conséquent, d'après a) :

$$t^i(w^{-i}(.), \widetilde{w}'^i(.)) = t^i(w^{-i}(.), w'^i(.))$$

Nous avons donc :

$$t^i(w^{-i}(.), w^i(.)) - t^i(w^{-i}(.), \widetilde{w}'^i(.)) = \Sigma w^{-i}(K^*) - \Sigma w^{-i}(K^{*\prime}) + \epsilon$$

$$= -\widetilde{w}'^i(K^*) + \widetilde{w}'^i(K^{*\prime}) + \epsilon - \delta$$

Ainsi :

$$t^i(w^{-i}(.), w^i(.)) + \widetilde{w}'^i(K^*) > t^i(w^{-i}(.), \widetilde{w}'^i(.)) + \widetilde{w}'^i(K^{*\prime})$$

Par conséquent, lorsque $v^i(.) \equiv \widetilde{w}'^i(.)$, la réponse $w^i(.)$ est préférable, ce qui contredit le fait que le mécanisme est motivant.

Q.E.D.

Corollaire 3 : Si les fonctions d'évaluation admissibles sont restreintes à la classe des fonctions continues, la famille des mécanismes de Groves est identique à la classe des mécanismes de révélation directs motivants.

Démonstration : Il suffit de montrer que dans la démonstration du théorème 3, $\widetilde{w}'^i(.)$ peut être choisi continu et tel que :

1) $K^{*\prime}$ maxime $\widetilde{w}'^i(.) + \Sigma w^{-i}(.)$ sur κ

2) $\widetilde{w}'^i(K^{*\prime}) = -\Sigma w^{-i}(K^*)$

3) $\widetilde{w}'^i(K^{*\prime}) = -\Sigma w^{-i}(K^{*\prime}) + \delta$

Soit $\eta > 0$ tel que $\eta < |K^* - K^{*\prime}|$ et

$$\widetilde{w}'^i(K) = -\Sigma w^{-i}(K) \quad \text{pour} \quad K \notin [K^{*\prime} - \eta, K^{*\prime} + \eta]$$

$$= -\Sigma w^{-i}(K) + \delta\left(1 - \frac{|K - K^{*\prime}|}{\eta}\right) \quad \text{pour} \quad K \in [K^{*\prime} - \eta, K^{*\prime} + \eta]$$

Par construction $\widetilde{w}'^i(.)$ est continu puisque les $w^j(.)$, $j \neq i$, sont continus et satisfait 2) et 3). De plus, il est facile de voir que 1) est aussi satisfait puisque nous avons toujours :

$$\widetilde{w}'^i(K) + \Sigma w^{-i}(K) < \delta \quad \text{pour} \quad K \neq K^{*\prime}$$

Q.E.D.

Théorème 4 :

Un mécanisme de révélation normalisé, motivant et heureux est un mécanisme de Groves.

Démonstration : Puisque le mécanisme de révélation est motivant heureux et normalisé, les agents vont répondre leur fonction d'évaluation vraie $v^i(.)$, $i = 1, \ldots, N$ d'après le Corollaire 2. Puisque le mécanisme est heureux, nous pouvons dire que la décision est prise en maximant la somme des réponses. C'est donc un mécanisme de révélation direct, d'où le résultat d'après le théorème 3.

Q.E.D.

Nous pouvons maintenant étendre la caractérisation aux mécanismes satisfaisants.

Théorème 5 [Green et Laffont [1975a]]

Un mécanisme satisfaisant (S, f) qui satisfait la propriété d'unicité des stratégies dominantes est tel que :

$$\exists \psi^i, i = 1, \ldots, N \qquad \psi^i : S'^i \to V^i$$

$\exists$ mécanisme de Groves normalisé, $\{V, g\}$, tels que

$$f(s) = g[\psi^1(s^1), \ldots, \psi^N(s^N)]$$

Démonstration : Soit $D^i(v^i(.))$, l'unique stratégie dominante de l'agent i, lorsque la vérité est $v^i(.)$, $i = 1, \ldots, N$. A partir du mécanisme (S, f), nous construisons un mécanisme de révélation normalisé (V, ϕ) de la façon suivante. Soit

$$\phi(w(.)) = f[D(w(.))] \quad \text{pour tout} \quad w(.) \in V$$

où $V = \prod_{i=1}^{N} V^i$ et V^i est l'espace des fonctions d'évaluation normalisées et s.c.s.

Le mécanisme de révélation (V, ϕ) est bien défini puisque $D^i(v^i(.))$ est un singleton pour $i = 1, \ldots, N$. (V, ϕ) est motivant. Supposons en effet qu'il ne le soit pas. Pour des $v^i(.)$, $w^{-i}(.)$ donnés, il existe $w^i(.) \neq v^i(.)$ avec $\phi(w^{-i}(.), w^i(.))$ préféré par l'agent i à $\phi(w^{-i}(.), v^i(.))$, c'est-à-dire $f[D^{-i}(w^{-i}(.)), D^i(w^i(.))]$ préféré à $f[D^{-i}(w^{-i}(.)), D^i(v^i(.))]$ où

$$D^{-i}(w^{-i}(.)) = \\ [D^1(w^1(.)), \ldots, D^{i-1}(w^{i-1}(.)), D^{i+1}(w^{i+1}(.)), \ldots, D^N(w^N(.))]$$

ou encore

$$u^i(D^{-i}(w^{-i}(.)), D^i(w^i(.)) ; \{S, f\}) > u^i(D^{-i}(w^{-i}(.)), D^i(v^i(.)) ; \{S, f\})$$

ce qui contredit le fait que $D^i(v^i(.))$ est une stratégie dominante pour l'agent i.

Le mécanisme de révélation (V, ϕ) est heureux puisqu'il a les mêmes résultats que (S, f).

Par conséquent, (V, ϕ) est un mécanisme de révélation normalisé, motivant et heureux. D'après le théorème 4, c'est donc un mécanisme de Groves normalisé.

Enfin, pour montrer que les fonctions $(D^i)^{-1}(.)$, $i = 1, \ldots, N$ existent, nous démontrons que D^i est univoque, $i = 1, \ldots, N$. Supposons que D^i ne soit pas univoque. Il existe alors $v^i(.)$ et $v'^i(.)$ dans V^i, tels que $v^i(.) \neq v'^i(.)$ et $D^i(v^i(.)) = D^i(v'^i(.))$. Par définition $v^i(0) = v'^i(0) = 0$, mais puisque $v^i(.) \neq v'^i(.)$, il existe $K \in \kappa$ tel que $v^i(K) \neq v'^i(K)$.

Sans perte de généralité, soit alors K^* tel que :

$$v^i(K^*) - v'^i(K^*) = \epsilon$$

et :

$$A = \sup [\sup_{K \in \kappa} v^i(K), \sup_{K \in \kappa} v'^i(K)]$$

Nous pouvons alors choisir $v^{-i}(.)$ tels que :

$$\Sigma v^{-i}(K^*) = - v'^i(K^*) - \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Sigma v^{-i}(0) = 0$$

$$\Sigma v^{-i}(K) = - A - \epsilon$$

Par suite, il est clair que :

$$\Sigma v^{-i}(K^*) + v^i(K^*) > v^{-i}(K) + v^i(K) \qquad \forall K \in \kappa, K \neq K^*$$

et :

$$\Sigma v^{-i}(0) + v'^i(0) > \Sigma v^{-i}(K) + v'^i(K) \qquad \forall K \in \kappa, K \neq 0$$

Nous avons donc été capables de construire $v^{-i}(.)$ s.c.s, tels que $[v^{-i}(.), v^i(.)]$ et $[v^{-i}(.), v'^i(.)]$ devraient conduire à des décisions différentes. Or elles ne le font pas, contredisant le fait que (V, ϕ) est heureux.

Par conséquent, $D^i(.)$ est univoque pour $i = 1, \ldots, N$. Si nous définissons $\psi^i = (D^i)^{-1}(.)$ de S'^i dans V^i :

$$g[\psi^1(s^1), \ldots, \psi^N(s^N)] = f[D^1 \circ (D^1)^{-1}(s^1), \ldots, D^N \circ (D^N)^{-1}(s^N)] = f(s)$$

Q.E.D.

Si nous abandonnons l'hypothèse d'unicité dans le théorème 5, nous obtenons seulement une caractérisation plus faible. En effet, considérons l'exemple suivant :

Soit $\kappa = \{0,1\}$, $S^i = \mathbf{R}^2$, $s^i = (s^{i1}, s^{i2})$, $i = 1, \ldots, N$; définissons le mécanisme par :

$$d(s) = 1 \quad \text{si} \quad \Sigma s^{i1} \geqslant 0$$
$$= 0 \quad \text{si} \quad \Sigma s^{i2} < 0$$

$$t^i(s) = \Sigma s^{-i1} + \Sigma s^{-i2} \quad \text{si} \quad d(s) = 1$$
$$= \Sigma s^{-i2} \quad \text{si} \quad d(s) = 0$$
$$\text{pour } i = 1, \ldots, N.$$

L'ensemble des stratégies dominantes est alors :

$$D^i(v^i(.)) = \{(s^{i1}, s^{i2}) \in R^2 / s^{i1} = v^i(1)\}.$$

Par conséquent, le mécanisme ne peut être représenté sous la forme $g[\psi(s)]$ pour quelque mécanisme de Groves que ce soit, puisque les $t^i(s)$, $i = 1, \ldots, N$, ne sont pas constants sur $\prod_{i=1}^{N} D^i(v^i(.))$.

Cependant, on peut montrer que tous les mécanismes de Groves sont isomorphes à des mécanismes de Groves généralisés.

Théorème 6

Soit (S, f) un mécanisme satisfaisant. Il existe des fonctions ψ^i de S'^i dans V^i, $i = 1, \ldots, N$ et un mécanisme de Groves généralisé (V, G) tel que :

$$\bigcup_{s' \in S(s)} f(s') = G[\psi^1(s^1), \ldots, \psi^N(s^N)]$$

où $S(s) = \{s'/s$ et s' appartiennent au même $D(w(.))\}$.

Démonstration : Il est immédiat de vérifier que les théorèmes 2, 3, 4 sont vrais pour des mécanismes de révélation (directs) généralisés. La démonstration du théorème 6 suit alors les lignes de la démonstration du théorème 4 avec quelques différences notées ci-dessous.

$D^i(v^i(.))$ est maintenant l'ensemble des stratégies dominantes de l'agent i, lorsque sa vraie fonction d'évaluation est $v^i(.)$, $i = 1, \ldots, N$. Nous construisons un mécanisme de révélation normalisé et généralisé de la façon suivante. Soit V^i l'ensemble des fonctions d'évaluation s.c.s. et normalisées et soit :

$$\Phi(w(.)) = f[D(w(.))] \qquad \forall w(.) \in V$$

Φ est maintenant une correspondance avec deux propriétés :

$s^1 \in D(v(.))$ et $s^2 \in D(v(.))$ impliquent que $d(s^1)$ et $d(s^2)$ maximent tous deux $\Sigma v^i(.)$, sinon le mécanisme ne serait pas heureux.

Egalement, $v^i(d(s^1)) + T^i(s^1) = v^i(d(s^2)) + T^i(s^2)$ sinon, il existerait $t^i(.) \in T^i(.)$ tel que, sans perte de généralité,

$$v^i(d(s^1)) + t^i(s^1) > v^i(d(s^2)) + t^i(s^2)$$

s^{i2} ne serait plus alors une stratégie dominante pour l'agent i.

Comme dans le théorème 5, on montre que (V, Φ) est motivant. D'après le théorème 4, (V, Φ) est un mécanisme de Groves normalisé et généralisé.

Maintenant si $v^i(.) \neq v'^i(.)$, alors $D^i(v^i(.)) \cap D^i(v'^i(.)) = \phi$. Supposons au contraire, qu'il existe $s^i \in D^i(v^i(.)) \cap D^i(v'^i(.))$. Dans ce cas, $v^i(.)$ et $v'^i(.)$ peuvent conduire au même projet K^*. Comme dans le théorème 5, on peut choisir $w^{-i}(.)$ de telle sorte que $v^i(.)$ et $v'^i(.)$ devraient conduire à différents projets, contredisant le fait que (V, Φ) soit heureux.

Il est donc possible de définir la fonction $\psi^i(.) = (D^i)^{-1}(.)$, $i = 1, \ldots, N$ qui est telle que :

$$D^i \circ (D^i)^{-1}(s^i) = S^i(s^i) = \{s'^i / s^i \text{ et } s'^i \text{ appartiennent au même } D^i(v^i(.))\}$$

Alors :

$$\Phi[\psi^1(s^1), \ldots, \psi^N(s^N)] = f[D^1 \circ (D^1)^{-1}(s^1), \ldots, D^N \circ (D^N)^{-1}(s^N)]$$
$$= \bigcup_{s' \in S(s)} f(s)$$

Q.E.D.

4. EQUILIBRE DU BUDGET DE L'ETAT

Une difficulté importante associée aux mécanismes étudiés dans les sections précédentes est qu'ils n'équilibrent pas de façon automatique le budget de l'institution qui organise la consultation des agents économiques. En effet, la somme des transferts nécessaires pour amener les agents à révéler la vérité, $\Sigma t_i(w)$ n'est nulle qu'en des circonstances fortuites. Ces déficits ou surplus peuvent être absorbés par imposition ou subvention en dehors du mécanisme, mais il est nécessaire, pour conserver la propriété de rationalité individuelle, de supposer que les agents ne réalisent pas l'existence de ces impôts ou subventions lorsqu'ils formulent leurs réponses aux questions du mécanisme.

En vue de cette faiblesse, Groves et Ledyard [1975] ont construit une famille de mécanismes qui, en présence de biens publics, permettent d'atteindre des optima de Pareto dans un cadre d'équilibre général. Pour obtenir ces résultats, ils doivent en raison des théorèmes de caractérisation des sections précédentes, affaiblir le résultat de Groves [1973] en ce qui concerne les propriétés de non manipulation. La révélation des vraies dispositions marginales à payer pour les biens publics a lieu à l'équilibre ; en d'autres mots, Groves et Ledyard [1975] doivent abandonner le résultat selon lequel la vérité est une stratégie dominante, qui élimine tous les problèmes de théorie des jeux de nature non coopérative. De plus, la nécessité d'une procédure de tâtonnement pour atteindre l'équilibre suggère que la question de manipulation la plus pertinente concerne la manipulation le long du processus dynamique qui conduit à l'équilibre (voir à ce sujet Hurwicz [1975]).

Les mécanismes étudiés dans la section 3 ont, par la propriété de stratégie dominante, des possibilités d'applications importantes (voir Green et Laffont [1974] [1975b]). C'est pourquoi il est crucial de montrer que le problème soulevé ci-dessus peut être résolu de façon satisfaisante pour ne pas remettre en cause l'intérêt des mécanismes de Groves. Notre objectif dans cette section est de montrer d'une part que la somme des transferts peut être rendue négligeable, et d'autre part, que si on redistribue cette somme de transferts la stratégie optimale des agents est très proche de la vérité. Ces résultats sont établis dans le cas d'un projet unique de taille fixe, c'est-à-dire $\kappa = \{0,1\}$.

A) Impossibilité d'équilibrer le budget

Nous montrons dans cette sous-section qu'il est impossible de trouver un mécanisme de Groves particulier, c'est-à-dire, une fonction

$$h(.) = (h^1(.), \ldots, h^N(.))$$

particulière, telle que la somme des transferts nécessaires soit nulle quelles que soient les vraies dispositions à payer. Ce théorème d'impossibilité montre que l'on doit s'orienter vers des solutions approchées si on veut conserver la propriété de stratégie dominante. Diverses notions de solution approchée sont explorées par la suite.

Théorème 7 : Il n'existe pas de mécanisme de Groves tel que :

$$\Sigma t^i(w) = 0 \qquad \forall w \in V$$

Démonstration : Nous allons raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe une fonction vectorielle $h(.)$ telle que :

$$\Sigma t^i(w) = 0 \qquad \forall w \in V$$

Considérons tout d'abord le cas N = 2. Soit w^{1+}, w^{1-}, w^2 tel que $w^{1+} + w^2 > 0$ et $w^{1-} + w^2 < 0$. Par définition, nous avons alors :

(1) $$w^{1+} + w^2 + h^1(w^2) + h^2(w^{1+}) = 0$$

(2) $$h^1(w^2) + h^2(w^{1-}) = 0$$

Soustrayons (2) de (1) ; nous obtenons :

(3) $$w^{1+} + h^2(w^{1+}) - h^2(w^{1-}) = -w^2$$

Si nous varions w^2 de sorte que $w^{1+} + w^2$ reste positif, nous avons par (3) une contradiction puisque le membre de gauche ne dépend pas de w^2.

Cette démonstration peut être généralisée à $N \geqslant 3$. Considérons $w^{o1}, \ldots, w^{oN}$ et A tels que :

(4) $$-(N-1)A < \Sigma w^{oi} < -(N-2)A \quad , \quad A > 0$$

Nous utilisons la notation suivante :

$h^k(0^{\ell \ldots p})$ est la fonction h^k avec pour argument $w^{0i} + A$ au lieu de w^{oi} sauf pour les indices $i = \ell, \ldots, p$.

Puisque $\Sigma w^{oi} + (N-1)A > 0$, on a :

(5) $$\sum_{i \neq N} h^i(0^N) + h^N(w^o) = -(N-1)[\Sigma w^{oi} + (N-1)A]$$

L'idée de la démonstration est de soustraire successivement de (5), les termes qui comportent un zéro, puis 2 zéros, etc. Dans (5), il y a C^1_{N-1} termes à éliminer.

On utilise alors le fait que :

$$\Sigma w^{oi} + (N-2)A < 0$$

pour écrire (N – 1) équations :

(6) $$\sum_{i \neq N} h^i(0^{j,N}) + h^N(0^j) = 0$$ que l'on peut récrire :

(7) $$\sum_{\substack{i \neq N \\ i \neq j}} h^i(0^{j,N}) + h^j(0^N) + h^N(0^j) = 0$$

Chaque $h^i(0^N)$ dans (5) peut être supprimé en soustrayant l'équation i dans (7) d'où :

$$-\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{\substack{i \neq N \\ i \neq j}} h^i(0^{j,N}) + h^N(w^o) - \sum_{j=1}^{N-1} h^N(0^j)$$
$$= -(N-1)[\Sigma w^{oi} + (N-1)A]$$

Ce faisant on a donc introduit dans l'équation C^1_{N-1} (N – 2) termes avec deux zéros. On ignore toujours les termes correspondant à $h^N(.)$ car ils ne contiennent pas w^{oN}.

Si maintenant on utilise le fait que :

$$\Sigma w^{oi} + (N-3)\,A < 0 \qquad \text{on peut écrire :}$$

C^2_{N-1} équations qui contiennent $C^2_{N-2} \times 2$ termes avec deux zéros. Mais

$$C^2_{N-1} \times 2 = C^1_{N-1} \times (N-2)$$

c'est-à-dire qu'avec ces équations on peut exactement (par symétrie) supprimer les termes avec deux zéros ; on a toutefois introduit ainsi des termes avec trois zéros.

A l'étape k, on a C^k_{N-1} $(N-1-k)$ termes à éliminer, mais on peut écrire :

$$C^{k+1}_{N-1} \qquad \text{équations qui contiennent}$$

C^{k+1}_{N-1} $(k+1)$ termes appropriés c'est-à-dire $\dfrac{(N-1)\ldots(N-k+1)}{k\,!}$ soit exactement C^k_{N-1} $(N-1-k)$.

Lorsque à l'étape (N – 2) on introduit les termes avec N zéros, on en introduit :

$$C^{N-2}_{N-1} \times (N-2) = (N-1)(N-2)$$

Par symétrie il ne reste plus qu'à prémultiplier l'équation (obtenue car $\Sigma w^{oi} < 0$)

$$\sum_{i \neq N} h^i(w^{oi}) + h^N(w^{oi}) = 0 \quad , \quad \text{par } (N-2)$$

pour obtenir une équation dans laquelle dans le membre de gauche on n'a que des fonctions du type $h^N(.)$ et à droite $-(N-1)\,[\Sigma w^{oi} + (N-1)\,A]$.

Le membre de droite contient w^{oN} alors que le membre de gauche ne le contient pas, d'où une contradiction en modifiant w^{oN} dans un voisinage qui conserve les inégalités (4).

Q.E.D.

B) Le mécanisme à pivot

Nous considérons le mécanisme à pivot qui correspond au choix particulier suivant de la fonction $h^i(.)$ dans la famille de mécanismes de Groves :

$$h^i(w^{-i}) = -\Sigma w^{-i} \quad \text{si} \quad \Sigma w^{-i} \geqslant 0$$
$$= 0 \quad \text{si} \quad \Sigma w^{-i} < 0$$

La règle de transferts est alors, pour tout $i = 1, \ldots, N$:

$$t^i(w) = 0 \quad \text{si} \quad \Sigma w^i \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \Sigma w^{-i} \geqslant 0$$
$$= \Sigma w^{-i} \quad \text{si} \quad \Sigma w^i \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \Sigma w^{-i} < 0$$
$$= -\Sigma w^{-i} \quad \text{si} \quad \Sigma w^i < 0 \quad \text{et} \quad \Sigma w^{-i} \geqslant 0$$
$$= 0 \quad \text{si} \quad \Sigma w^i < 0 \quad \text{et} \quad \Sigma w^{-i} < 0$$

Notons que le mécanisme conduit à des transferts qui sont toujours négatifs, de sorte qu'on fait toujours face à un excédent à redistribuer. Les agents qui payent la taxe sont ceux dont la réponse change le signe de l'agrégat – ces agents sont des pivots. Ils paient le montant du dommage qu'ils imposent aux autres participants par leur réponse. Ce mécanisme est l'analogue, dans le cas des biens publics, du mécanisme d'enchères proposé par Vickrey [1961], dans lequel l'objet de l'enchère revient à l'agent qui a proposé le montant le plus élevé à un prix égal à la deuxième enchère. Clarke [1971] avait proposé ce mécanisme dans le cas des biens publics indépendamment de Groves.

C) Approche statistique

Nous considérons les dispositions à payer des agents comme les résultats de tirages successifs indépendants dans une population donnée représentée par une distribution de probabilité absolument continue F(.). Nous pouvons calculer ainsi la somme espérée des taxes levées par le mécanisme à pivot pour un projet quelconque. Si le mécanisme est utilisé pour évaluer de nombreux projets publics potentiels, nous serons satisfaits si la somme espérée est négligeable.

Soit F(.) la distribution de la disposition à payer d'un agent et $F_{N-1}(.)$ la distribution de la somme x des N – 1 autres agents. D'après la définition du mécanisme à pivot, l'agent est un pivot

$$\text{si} \quad |x| < |v|$$
$$\text{et} \quad v < 0 < x$$
$$\text{ou} \quad x < 0 < v$$

L'agent qui est un pivot doit payer $|x|$.

La somme espérée des paiements est donc :

$$E_N = N \int_{-\infty}^{+\infty} dF(v) \int_{\{x \mid |x|<|v| \text{ et } xv<0\}} |x|\, dF_{N-1}(x)$$

Tout d'abord nous démontrons de façon générale que la somme espérée des impôts croît seulement comme la racine carrée de la taille de la population quand la moyenne de la distribution est nulle et converge vers zéro lorsque le nombre d'agents croît quand la moyenne de la distribution est non nulle. Ensuite nous examinons un cas particulier pour acquérir quelque intuition sur la vitesse de convergence.

Théorème 8 : Si la fonction de répartition F(.) est absolument continue, et à densité continue, si la variance de F(.) est bornée et normalisée à un

– et si, de plus, la densité $f(.)$ est à mode unique égal à zéro

$$\lim_{N\to\infty} \frac{E_N}{\sqrt{N}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \quad \text{quand} \quad \mu = 0$$

– et si, de plus, $\forall\alpha$, $N^\alpha f_N(x)$ converge uniformément vers zéro quand N tend vers l'infini pour $\mu \neq 0$

$$\forall\alpha, \lim_{N\to\infty} N^\alpha E_N = 0 \quad \text{quand} \quad \mu \neq 0$$

Démonstration : Considérons tout d'abord le cas $\mu = 0$.

Nous voulons évaluer la limite quand N tend vers l'infini de :

$$\frac{1}{\sqrt{N}} E_N = \sqrt{N} \int_{-\infty}^{+\infty} dF(v) \int_{\{x/|x|<|v| \text{ et } xv<0\}} |x|\, dF_{N-1}(x)$$

Soit $y = \dfrac{x}{\sqrt{N-1}}$ et $G_{N-1}(.)$ la fonction de répartition de y.

D'après le théorème de Lindeberg-Lévy, $G_{N-1}(.)$ converge en tout point vers la fonction de répartition normale qui est absolument continue. Par conséquent, la densité $g_{N-1}(y)$ converge presque partout vers la densité de la loi normale. Remarquons que le maximum de $g_{N-1}(y)$ est toujours 0. Puisqu'au point 0, $g_{N-1}(y)$ tend vers $1/\sqrt{2\pi}$, la suite des fonctions $g_{N-1}(.)$ est uniformément bornée par une constante A.

$$\frac{E_N}{\sqrt{N}} = \sqrt{N} \int_{-\infty}^{0} f(v)\, dv \int_0^{-v} x f_{N-1}(x)\, dx - \sqrt{N} \int_0^{+\infty} f(v)\, dv \int_{-v}^{0} x f_{N-1}(x)\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{N}{N-1}} \int_{-\infty}^{0} f(v)\, dv \int_0^{-v} x g_{N-1}\left(\frac{x}{\sqrt{N-1}}\right) dx$$

$$+ \sqrt{\frac{N}{N-1}} \int_0^{+\infty} f(v)\, dv. \int_{-v}^{0} (-x)\, g_{N-1}\left(\frac{x}{\sqrt{N-1}}\right) dx$$

Puisque :

$$\left| f(v)\, x g_{N-1}\left(\frac{x}{\sqrt{N-1}}\right)\right| < A\, |f(v)\, x|$$

et :

$$\int_{-\infty}^{0} f(v)\, dv \int_0^{-v} x dx + \int_0^{\infty} f(v)\, dv \int_{-v}^{0} (-x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v^2}{2} f(v)\, dv = \frac{1}{2}$$

D'après le théorème de Lebesgue :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{E_N}{\sqrt{N}} \int_{-\infty}^{0} f(v)\, dv \int_0^{-v} x \lim_N g_{N-1}\left(\frac{x}{\sqrt{N-1}}\right) dx +$$

$$\int_0^{+\infty} f(v)\, dv \int_{-v}^{0} (-x) \lim_N g_{N-1}\left(\frac{x}{\sqrt{N-1}}\right) dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$$

Considérons maintenant le cas $\mu \neq 0$:

$$N^\alpha E_N = N^\alpha \int_{-\infty}^{0} f(v)\, dv \int_0^{-\infty} x f_{N-1}(x)\, dx - N^\alpha \int_0^{\infty} f(v)\, dv.$$

$$\int_{-v}^{0} x f_{N-1}(x)\, dx$$

D'après l'hypothèse une application du théorème de Lebesgue nous donne le résultat.

Q.E.D.

Supposons que les v_i sont distribués de façon indépendante selon une loi normale de moyenne zéro et de variance unité. Dans ce cas :

$$E_N = 2N \int_{-\infty}^{0} dF(v) \int_0^{-v} x\, dF_{N-1}(x)$$

$$= \frac{N}{\pi\sqrt{N-1}} \int_{-\infty}^{0} e^{-v^2/2}\, dv \int_0^{-v} x e^{-x^2/2(N-1)}\, dx$$

$$= \frac{N\sqrt{N-1}}{\pi} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}v^2} (1 - e^{-v^2/2(N-1)})\, dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [N\sqrt{N-1} - (N-1)\sqrt{N}]$$

Mais :

$$\sqrt{N-1} = \sqrt{N} - \frac{1}{2\sqrt{N}} - \frac{1}{8N\sqrt{N}} + \dots$$

D'où :

$$E_N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sqrt{N}}{2} - \frac{1}{8\sqrt{N}} + \dots \right]$$

Par conséquent, les paiements espérés par tête décroissent comme $\frac{1}{\sqrt{8\pi N}}$ pour N grand.

D) Mécanisme presque satisfaisant avec un budget de l'Etat équilibré

Le résultat précédent est intéressant et peut justifier l'approche d'équilibre partiel utilisée si l'on est prêt à considérer que la taxe par tête est si petite en général que les agents n'en tiennent pas compte. On peut ne pas être complètement satisfait par un tel résultat dans la mesure notamment où la force de l'incitation décroît avec la taille de l'économie.

Aussi, la question suivante surgit-elle : supposons que l'on redistribue les taxes perçues par le mécanisme et que les agents aient conscience de cette redistribution. Est-ce que les agents ont encore intérêt à dire la vérité ?

Pour répondre à cette question, il faut préciser la redistribution envisagée, ici une redistribution égale, ainsi que les anticipations des agents concernant les dispositions à payer des autres agents. Ici nous supposons que chaque agent croît que les évaluations des autres sont issues indépendamment d'une population dont la fonction de répartition est F(.). Le résultat de cette section est que, dans ce cadre, la réponse optimale de l'agent approche la vérité lorsque l'économie croît. De plus, la probabilité qu'une bonne décision soit prise tend vers 1 quand le nombre d'agents tend vers l'infini.

Théorème 9 : Si la fonction de répartition F(.) est absolument continue et à variance bornée et la densité $f(.)$ est à mode unique (zéro) et symétrique autour de zéro, et si $\lim_{N\to\infty} \sqrt{N} f_N(x)$ converge uniformément vers une constante, la réponse de l'agent converge vers la vérité lorsque le nombre d'agents tend vers l'infini.

Démonstration : Exprimons tout d'abord l'espérance mathématique de l'utilité d'un agent qui donne une réponse w ($\geqslant 0$ sans perte de généralité). Il y a N agents et x dénote la somme des N – 1 autres.

L'utilité espérée du projet lui-même est :

$$(8) \qquad \int_{-w}^{\infty} v \, dF_{N-1}(x)$$

La taxe qui lui est imposée est :

$$(9) \qquad \int_{-w}^{0} x \, dF_{N-1}(x)$$

car pour $w > 0$ l'agent est un pivot si et seulement si $-w < x < 0$.

Cependant, d'après le processus de redistribution des taxes choisi $1/N^{\text{ième}}$ de sa propre taxe lui est reversé de sorte que sa taxe nette est :

$$(10) \qquad \frac{N-1}{N} \int_{-w}^{0} x \, dF_{N-1}(x)$$

Enfin, il lui est reversé $1/N^{\text{ième}}$ des taxes de tous les autres agents.

Considérons un agent pivot typique différent de l'agent étudié ; x désigne maintenant la somme des réponses des N – 2 autres agents. La taxe espérée pour cet agent est alors :

$$(11) \int_{-\infty}^{-w} dF_{N-2}(x) \int_{-w-x}^{\infty} (w+x)\, dF(Z) - \int_{-w}^{\infty} dF_{N-2}(x) \int_{-\infty}^{-w-x} (w+x)\, dF(Z)$$

le premier terme correspondant au cas de l'agent pivot fait réaliser le projet et le deuxième terme au cas où l'agent fait échouer le projet.

L'espérance de gain de l'agent étudié est alors :

$$(12) \frac{(N-1)}{N} \left[\int_{-w}^{\infty} dF_{N-2}(x) \int_{-\infty}^{-w-x} (w+x)\, dF(Z) - \int_{-\infty}^{-w} dF_{N-2}(x) \int_{-w-x}^{\infty} (w+x)\, dF(Z) \right]$$

L'espérance de gain total est, pour une réponse $w \geqslant 0$:

$$(13) \qquad \int_{-w}^{\infty} v\, dF_{N-1}(x) + \frac{(N-1)}{N} \int_{-w}^{0} x\, dF_{N-1}(x) + \frac{(N-1)}{N} \cdot \left[\int_{-w}^{\infty} dF_{N-2}(x) \int_{-\infty}^{-w-x} (w+x)\, dF(Z) - \int_{-\infty}^{-w} dF_{N-2}(x) \int_{-w-x}^{\infty} (w+x)\, dF(Z) \right]$$

Nous savons que la fonction (8) + (9), qui correspond au mécanisme originel, est maximée pour $w = v$ par la propriété de stratégie dominante unique.

Le terme supplémentaire $-\frac{1}{N}\int_{-w}^{0} x\, dF_{N-1}(x)$, qui correspond à la diminution de sa propre taxe, est symétrique autour de zéro où il réalise son minimum et est monotone de part et d'autre de zéro. Par conséquent, le maximum de (8) + (10) est atteint en un point v^* qui a le même signe que v et est plus grand en valeur absolue. De fait :

$$v^* = \frac{N}{N-1} v \quad \text{c'est-à-dire } v^* \text{ est borné } \forall N.$$

Considérons maintenant (12). Posons les changements de variables suivants :

$u = x + w$ dans la première intégrale et

$v = -x - w$ dans la deuxième intégrale.

Nous obtenons :

$$\frac{(N-1)}{N} \int_0^{\infty} f_{N-2}(u-w)\, u F(-u)\, du + \int_0^{\infty} f_{N-2}(-v-w)\, v\, [1 - F(v)]\, dv$$

Puisque $f(.)$ et $f_{N-2}(.)$ sont symétriques autour de zéro :

$$F(-u) = 1 - F(u)$$
$$f_{N-2}(-v-w) = f_{N-2}(v+w)$$

D'où :

$$\frac{N-1}{N}\left[\int_0^{\infty} f_{N-2}(u-w)\, u\,(1 - F(u))\, du + \int_0^{\infty} f_{N-2}(v+w)\, v\,[1 - F(v)]\, dv\right]$$

Il est clair dès lors que cette fonction de w est symétrique autour de zéro.

Si le mode est unique et en zéro, cette fonction est décroissante sur sa branche positive et croissante sur sa branche négative ; elle prend son maximum en zéro, de sorte que le maximum de (8) + (10) + (11) appartient à l'intérieur de l'intervalle $[0, v^*]$ et est donc caractérisé par un zéro de la dérivée de (8) + (10) + (11).

Considérons maintenant cette dérivée égale, après quelques manipulations, à :

$$(14) \qquad v f_{N-1}(-w) - \frac{N-1}{N} w \,.\, f_{N-1}(-w) +$$

$$\frac{N-1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} dF_{N-2}(x) \int_{-\infty}^{-w-x} dF(Z) - \frac{N-1}{N}\int_{-\infty}^{-w} dF_{N-2}(x) -$$

$$- \frac{N-1}{N}\int_{-\infty}^{+\infty} (w+x) f(-w-x)\, dF_{N-2}(x) = 0$$

Considérons tout d'abord le dernier terme de (14) :

$$-\frac{(N-1)}{N}\int_{-\infty}^{+\infty} (w+x) f(-w-x)\, dF_{N-2}(x) =$$

$$= \frac{N-1}{N}\int_{-\infty}^{+\infty} (w+x) f_{N-2}(x)\, dF(-w-x)$$

Nous sommes intéressés à calculer :

$$(15) \lim_{N\to\infty} \sqrt{N}\,.\,\frac{N-1}{N}\int_{-\infty}^{+\infty} (w+x) f_{N-2}(x)\, dF(-w-x) = \lim_{N\to\infty} \sqrt{N}\, g_N(w)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{N-1}{N}\int_{-\infty}^{+\infty} (w+x)\sqrt{N} f_{N-2}(x)\, dF(-w-x)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (w+x)\sqrt{N} f_{N-2}(x)\, dF(-w-x) = \int_{-\infty}^{0} + \int_0^{\infty}$$

Considérons tout d'abord $\int_0^{\infty}$ et effectuons le changement de variable $w + x = u$; on obtient : (par symétrie de $f(.)$) :

$$\int_0^{\infty} u\sqrt{N} f_{N-2}(u-w) f(u)\, du$$

Or $|u\sqrt{N} f_{N-2}(u-w) f(u)| \leqslant 2\, K u f(u)$ puisque $\sqrt{N} f_{N-2}(u-w)$ est uniformément borné par K ; $uf(u)$ est intégrable sur $[0, \infty[$ car $f(.)$ a une variance finie. Par le théorème de Lebesgue

$$\int_0^{\infty} u\sqrt{N} f_{N-2}(u-w) f(u)\, du = K\int_0^{\infty} u f(u)\, du$$

En traitant de façon analogue le cas $u < 0$, on obtient finalement :

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{N}\, g_N(w) = 0$$

Par conséquent, $\sqrt{N}\, g_N(w)$ converge uniformément vers zéro dans l'intervalle $[0, v^*]$ quand N tend vers l'infini.

Considérons les termes 3 et 4 de (14) que l'on a écrit :

$$h_N(w) = \frac{N-1}{N}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dF_{N-2}(x) \int_{-\infty}^{-w-x} dF(Z) - \int_{-\infty}^{-w} dF_{N-2}(x)\right]$$

$$h'_N(w) = -\frac{N-1}{N}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(-w-x)\, f_{N-2}(x)\, dx - f_{N-2}(-w)\right]$$

$$= -\frac{N-1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} [f_{N-2}(x) - f_{N-2}(-w)]\, dF(-w-x)$$

Puisque $\sqrt{N}\,[f_{N-2}(x) - f_{N-2}(-w)]$ est uniformément borné, on peut de nouveau appliquer le théorème de Lebesgue :

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{N}\, h'_N(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim \sqrt{N}\,[f_{N-2}(x) - f_{N-2}(-w)]\, dF(-w-x) = 0$$

Puisque $\sqrt{N}\, h'_N(w)$ converge uniformément vers 0 sur $[0, v^*]$, et que $\sqrt{N}\, h_N(0) = 0$, $\sqrt{N}\, h_N(w)$ converge uniformément vers zéro sur $[0, v^*]$, (14) peut être récrit comme :

$$\left[v - \frac{N-1}{N} w\right] f_{N-1}(-w) + h_N(w) + g_N(w) = 0$$

Multipliant par $\sqrt{N}$:

$$\left[v - \frac{N-1}{N} w\right] \sqrt{N} f_{N-1}(-w) + \sqrt{N}\, h_N(w) + \sqrt{N}\, g_N(w) = 0$$

Nous obtenons d'après les résultats ci-dessus que w tend vers la vérité v

Q.E.D.

Ainsi, le mécanisme avec redistribution égale du surplus induit asymptotiquement la révélation de la vérité

D'après la démonstration du théorème précédent, nous savons que la réponse optimale $w_N(v^i)$ de l'agent i lorsque l'échantillon est de taille N est telle que :

a) $w_N(.)$ est une fonction intégrable de v^i.

b) $w_N(v^i)$ tend vers v^i quand N tend vers l'infini, pour tout v^i.

c) $|w_N(v^i) - v^i| < |v^i|$

d) $w_N(v^i) = -w_N(-v^i)$.

Pour démontrer que le mécanisme est asymptotiquement heureux, il suffit de montrer que :

$$\text{(16)} \qquad \Pr\left[\sum_{i=1}^{N} v^i \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} w_N(v^i) \leqslant 0\right]$$

tend vers zéro quand $N \to \infty$. Ainsi la probabilité de prendre une mauvaise décision tend vers zéro quand $N \to \infty$.

Théorème 10 : Sous les hypothèses du théorème 9, la probabilité que le mécanisme soit heureux tend vers 1 quand le nombre d'agents tend vers l'infini.

Démonstration : Notons tout d'abord que (16) est équivalent à

$$\text{(17)} \qquad \Pr\left[\frac{\sum_{i=1}^{N} v^i}{\sqrt{N}} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \frac{\sum_{i=1}^{N} w_N(v^i)}{\sqrt{N}} \leqslant 0\right] \to 0 \quad \text{quand} \quad N \to \infty$$

Notons :

$$u_N^i = \frac{v^i}{\sqrt{N}}$$

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} u_N^i$$

$$\epsilon_N^i = \frac{w_N(v^i)}{\sqrt{N}}$$

$$\epsilon_N = \sum_{i=1}^{N} \epsilon_N^i$$

$$X_N = [u_N, \epsilon_N]$$

Soit $X = [X^1, X^2]$ le vecteur aléatoire normal de moyenne 0 et de matrice des variances et covariances $\begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \sigma^2 \end{bmatrix}$

D'après le théorème de Varadarajan nous aurons montré que X_N tend en loi vers X si nous montrons que pour tout

$$(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R},\ \lambda_1 u_N + \lambda_2 \epsilon_N \quad \text{tend vers} \quad \lambda_1 X^1 + \lambda_2 X^2$$

c'est-à-dire vers la loi normale de moyenne 0 et de variance $(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \sigma^2$.

Soit $a_N^i = \lambda_1 u_N^i + \lambda_2 \epsilon_N^i$ et soit F_N^i la distribution de probabilité de a_N^i. Soit enfin

$$a_N = \lambda_1 u_N + \lambda_2 \epsilon_N$$

Pour démontrer ce point, nous utilisons le théorème de Lindeberg-Feller.

Soit $\sigma_\infty^2 = \lim_{N\to\infty} \text{Var}\, a_N$: le théorème spécifie que si

$$\sigma_\infty^2 > 0 \quad \text{et si} \quad \forall u_0 > 0, \sum_{i=1}^{N} \int_{|u|\geq u_0} u^2\, dF_N^i \to 0$$

quand $N \to \infty$, alors a_N tend vers la loi normale de moyenne zéro et de variance σ_∞^2

Il nous reste donc à montrer que $\sigma_\infty^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2\, \sigma^2$ et que la condition de Lindeberg-Feller est satisfaite.

Soit : $$e_N(v^i) = w_N(v^i) - v^i$$

Notons d'abord que $E e_N(v^i) = 0$, puisque la distribution de v^i est symétrique et que $w_N(v^i) = - w_N(- v^i)$.

$$a_N^i = \frac{1}{\sqrt{N}} [(\lambda_1 + \lambda_2) v^i + \lambda_2\, e_N(v^i)]$$

$$\sigma_N^{i2} = \frac{1}{N} [(\lambda_1 + \lambda_2)^2\, \sigma^2 + 2\lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)\, E\, v^i e_N(v^i) + \lambda_2^2\, E\, e_N(v^i)^2]$$

Soit : $$\sigma_N^2 = \sum_{i=1}^{N} \sigma_N^{i2} = (\lambda_1 + \lambda_2)^2\, \sigma^2 + 2\lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E\, v^i e_N(v^i) + \lambda_2^2\, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E\, e_N(v^i)^2$$

Mais : $$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E\, v^i e_N(v^i) = E\, v^i e_N(v^i) = \int_{-\infty}^{+\infty} v^i e_N(v^i) f(v^i)\, dv^i = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_N(v^i)\, dv^i$$

avec : $|\Psi_N(v^i)| < v^{i2} f(v^i)$ intégrable, par c)

$\Psi_N(v^i) \to 0\ ;\ N \to \infty \quad \forall v^i$ par b)

Donc, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

$$E\, v^i e_N(v^i) \to 0 \quad \text{quand} \quad N \to \infty$$

De la même façon :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E\, e_N(v^i)^2 = E\, e_N(v^i)^2 \to 0 \quad \text{quand} \quad N \to \infty$$

Par conséquent : $$\sigma_N^2 \to (\lambda_1 + \lambda_2)^2\, \sigma^2$$

Considérons maintenant la condition de Lindeberg-Feller :

$$\int_{|u|\geq u_0} u^2\, dF_N^i = \int_A \frac{[\lambda_1 v^i + \lambda_2 w_N(v^i)]^2}{N}\, dF(v^i)$$

où : $$A = \{v^i / |(\lambda_1 + \lambda_2) v^i + \lambda_2\, e_N(v^i)| > \sqrt{N}\, u_0\}$$

Cette intégrale est en fait indépendante de i :

$$|\lambda_1 v^i + \lambda_2 w_N(v^i)|^2 \leqq \lambda_1^2 v^{i2} + \lambda_2^2 w_N(v^i)^2 + 2\lambda_1\lambda_2\, |v^i w_N(v^i)|$$
$$\leqq (\lambda_1 + 2\lambda_2)^2\, v^{i2} \quad \text{par } c)$$

$$\int_A u^2\, dF_N^i \leqq \frac{(\lambda_1 + 2\lambda_2)^2}{N} \int_A v^{i2}\, dF(v^i)$$

Puisque $\int v^{i2}\, dF(v^i)$ est fini, il suffit de montrer que $\mathbf{R}\backslash A \to \mathbf{R}$, quand $N \to \infty$ pour montrer que $\int_A v^{i2}\, dF(v^i)$ est arbitrairement petit (de plus ce sera indépendamment de i) :

$$\mathbf{R}\backslash A = \{v / |\lambda_1 v + \lambda_2 w_N(v)| \leqslant u_0 \sqrt{N}\}$$

Mais $|\lambda_1 v + \lambda_2 w_N(v)| \leqslant (\lambda_1 + 2\lambda_2)\, |v|$

$$\forall v,\ \exists N_0, \text{ tel que pour } N > N_0,\ |v| \leqslant \frac{u_0 \sqrt{N}}{\lambda_1 + 2\lambda_2}$$

Donc $\mathbf{R}\backslash A \to \mathbf{R}$ et :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N^*,\ N > N^*, \left| \int_A v^i\, dF(v^i) \right| < \frac{\epsilon}{(\lambda_1 + 2\lambda_2)^2}$$

D'où $\forall u_0$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N^* : \forall N > N^*$ implique

$$\left| \sum_{i=1}^{N} \int_{|u|\geq u_0} u^2\, dF_N^i \right| < \epsilon$$

Nous avons donc montré que X_N converge en loi vers X; par conséquent $\forall \epsilon > 0, \exists N_0$ tel que $N > N_0$ implique

$$|\Pr[u_N \gtrless 0 \text{ et } \epsilon_N \lesseqgtr 0] - \Pr[X^1 \gtrless 0 \text{ et } X^2 \lesseqgtr 0]| < \epsilon$$

Puisque $\Pr[X^1 \gtrless 0 \text{ et } X^2 \lesseqgtr 0] = 0$, nous avons le résultat.

Q.E.D.

ANNEXE MATHÉMATIQUE

Nous donnons dans cette annexe un énoncé précis des principaux théorèmes mathématiques utilisés. Nous invitons le lecteur à se reporter au chapitre 1 de la «*Théorie de la Valeur*», traduction française, chez Dunod, de Debreu (1959) et à l'annexe mathématique, par J.C. Milleron, des «*Leçons de Théorie Microéconomique*», Malinvaud (1969), s'il rencontre des concepts mathématiques qui ne lui sont pas familiers.

Théorème du maximum (Berge (1966))

Si $f(x, y)$ est une fonction numérique continue sur $X \times Y$(1) et si $\Gamma(.)$ est une correspondance continue de X dans Y telle que $\Gamma(x) \neq \phi$ pour tout x :

1) $M(x) = \max \{f(x, y) / y \in \Gamma(x)\}$ est une fonction numérique continue sur X ;

2) $\Phi(x) = \{y / y \in \Gamma(x) \text{ et } f(x, y) = M(x)\}$ est une correspondance semi-continue supérieurement (s.c.s.) de X dans Y.

Théorème de Kakutani (Berge (1966))

Soit C un convexe compact non vide de $\mathbf{R}^n$; si $\Gamma(.)$ est une correspondance s.c.s. de C dans C, et si, pour tout x, l'ensemble $\Gamma(x)$ est convexe non-vide, il existe un point x_0 dans C tel que : $x_0 \in \Gamma(x_0)$.

Théorème de Knaster – Kuratowski – Mazurkiewicz (Berge (1966))

Soient $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$ des ensembles fermés recouvrant le n-simplexe $S_n = [a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}]$ de sorte que, pour tout i, l'ensemble F_i contienne la face S_{n-1}^i opposée à a_i ; alors, l'intersection de tous les F_i est non vide.

(1) X et Y sont des espaces topologiques.

Théorème de Minkovski (Rockafellar (1970))

Soient A et B deux sous-ensembles convexes non vides de $\mathbf{R}^n$ tels que $A \cap B = \phi$. Alors, il existe un hyperplan qui sépare les ensembles A et B, c'est-à-dire tel qu'il existe :

$$p \neq 0 \,, \; p \in \mathbf{R}^n$$

tel que :

$$px \leqq py \qquad \forall x \in A \,, \; \forall y \in B$$

Théorème de séparation (Rockafellar (1970))

Soit C un ensemble convexe de $\mathbf{R}^n$ et soit D un sous-ensemble convexe non vide de C (par exemple, un point). Pour qu'il existe un hyperplan non trivial supportant C et contenant D, il est nécessaire et suffisant que D soit disjoint de l'intérieur relatif de C.

Théorème de Kuhn et Tucker (Huard (1965))

Soient $f(.)$ et $g_j(.)$, $j = 1, \ldots, J$ des fonctions réelles dérivables. Si une condition de régularité est satisfaite et si x^0 est un maximum de $f(x)$ sous les contraintes $g_j(x) \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, J$, il existe un vecteur (non nul) λ dont toutes les composantes sont positives ou nulles tel que :

(1) $$\operatorname{grad} f(x^0) + \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \operatorname{grad} g_j(x^0) = 0$$

et

(2) $$\sum_{j=1}^{J} \lambda_j \, g_j(x^0) = 0$$

Les λ_j, $j = 1, \ldots, J$, sont les multiplicateurs de Kuhn et Tucker. Si les fonctions $f(.)$ et $g_j(.)$, $j = 1, \ldots, J$, sont concaves, les conditions de Kuhn et Tucker (1) (2) sont suffisantes.

Théorème de convergence dominée de Lebesgue (Loève (1963))

Soit $(f_n(.))$ une suite de fonctions réelles définies sur X telles que $|f_n(.)| \leqq g$ presque partout et où g est intégrable,

Si $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to \infty$ presque partout dans X, alors :

$$\int_X f_n(x)\, dx \to \int_X f(x)\, dx$$

quand $n \to \infty$

Théorème central limite de Lindeberg – Levy (Rao (1965))

Soit $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et telles que $E[X_n] = \mu$ et $\operatorname{Var}[X_n] = \sigma^2$ existent. Alors, la fonction de répartition de

$$Y_n = \frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \quad \text{avec } \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

Théorème central limite de Lindeberg – Feller (Rao (1965))

Soit $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et soit G_n la fonction de répartition de X_n. De plus $\mu_n = E(X_n)$ et $\sigma_n^2 = \operatorname{Var}(X_n) \neq 0$ existent. Soit

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i)}{C_n} \quad \text{et} \quad C_n = \Big(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \Big)^{1/2}$$

Alors $\lim\limits_{n \to \infty} \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \dfrac{\sigma_i}{C_n} = 0$ et Y_n tend en loi vers la loi normale centrée réduite est équivalent à :

$$\forall \epsilon > 0 \,, \; \lim_{n \to \infty} \frac{1}{C_n^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{|x - \mu_i| > \epsilon C_n} (x - \mu_i)^2 \, dG_i(x) = 0$$

Théorème de Varadarajan (Rao (1965))

Soit F_n la fonction de répartition d'une variable aléatoire de dimension k, $(X_n^{(1)}, \ldots, X_n^{(k)})$, $n = 1, 2, \ldots$, et soit $F_{\lambda n}$ la fonction de répartition de la fonction linéaire $\lambda_1 X^{(1)} + \ldots + \lambda_k X^{(k)}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que F_n converge en loi vers une fonction de répartition F d'une variable de dimension k est que $F_{\lambda n}$ converge vers une limite pour tout λ.

Théorème de Lions (Lions (1968)

On considère la fonction $J(v) = J_1(v) + J_2(v)$ et on suppose que les fonctions $J_i(.)$, $i = 1, 2$, sont continues, convexes, que $J_1(v)$ est différentiable et tend vers l'infini si $|v|$ tend vers l'infini et que $J(v)$ est strictement convexe. Alors, l'unique élément u tel que $\inf_v J(v) = J(u)$ est caractérisé par :

$$J_1'(u)(v-u) + J_2(v) - J_2(u) \geqslant 0 \quad \forall v$$

On considère un jeu à n joueurs défini par sa fonction caractéristique $\mathbf{v}(.)$ qui associe à toute coalition C l'ensemble des vecteurs d'utilité qu'elle peut réaliser.

On dit qu'une famille de coalitions $\mathcal{C}$ est équilibrée s'il existe une fonction $\delta(.)$, de $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{R}_+$ telle que :

$$\sum_{\substack{C \in \mathcal{C} \\ i \in C}} \delta(C) = 1 \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

Soit enfin $N = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$

Théorème de Scarf (Scarf (1967))

Si pour toute famille équilibrée de coalitions on a :

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} \mathbf{v}(C) \subset \mathbf{v}(N)$$

alors le cœur du jeu est non vide.

RÉFÉRENCES BILIOGRAPHIQUES

AOKI M. (1971). – «Two Planning Processes for an Economy with Production Externalities», *International Economic Review, 12,* 403-413.

ARROW K.J. (1951). – *Social Choice and Individual Values,* J. Wiley and Sons, New York.

ARROW K.J. (1969). – «The Organization of Economic Activity : Issues Pertinent to the Choice of Market versus Non-Market Allocation», in *Joint Economic Committee,* TheAnalysis and Evaluation of Public Expenditures : The PPB System, Washington, D.C. : Government Printing Office, 47-64.

ARROW K.J. et G. DEBREU (1954). – «Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy», *Econometrica, 22,* 265-290.

ARROW K.J. et F. HAHN (1971). – *General Competitive Analysis,* Holden Day, San Francisco.

ARROW K.J. et R.C. LIND (1970). – «Uncertainty and the Evaluation of Public Investment Decisions», *American Economic Review, 60,* 642-654.

AUMANN R.J. (1964). – «Market with a Continuum of Traders», *Econometrica, 32,* 1-17.

AUMANN R.J. (1967). – «A Survey of Cooperative Games without Side Payments», in *Essays in Mathematical Economics in Honor of O. Morgenstern,* M. Shubik (ed.), Princeton.

AYRES R.U. et A. KNEESE (1969). – «Production, Consumption, and Externalities», *American Economic Review, 53,* 403-414.

BERGE C. (1966). – *Espaces Topologiques et Fonctions Multivoques,* Dunod, Paris.

BLACK D. (1948). – «On the Rationale of Group Decision-Making», *Journal of Political Economy, 56,* 23-24.

BOHM P. (1970). – «Pollution, Purification et Théorie des Effets Externes», *Annales de l'INSEE.*, 3.

BOWEN H. (1943). – «The Interpretation of Voting in the Allocation of Economic Resources», *Quarterly Journal of Economics, 58,* 27-48.

BUCHANAN J.M. (1969). – «External Diseconomies, Corrective Taxes and Market Structure», *American Economic Review, 59,* 174-176.

BUCHANAN J.M. et M. KAFOGLIS (1963). – «A Note on Public Goods Supply», *American Economic Review, 53,* 403-414.

BUCHANAN J.M. et W.C. STUBBLEBINE (1962). – «Externality», *Economica, 29,* 371-384.

CHAMPSAUR P. (1974). – «Note sur le Noyau d'une Economie avec Production», *Econometrica, 42,* 933-946.

CHAMPSAUR P., ROBERTS D. et R. ROSENTHAL (1976). – «On Cores in Economies with Public Goods», *International Economic Review, 16,* 751-764.

CHIPMAN J.S. (1970). – «External Economies of Scale and Competitive Equilibrium», *Quarterly Journal of Economics, 84,* 351-385.

CLAPHAM J.H. (1922). – «Of Empty Boxes», *Economic Journal, 32,* 305-314.

CLARKE E.H. (1971). – «Multipart Pricing of Public Goods», *Public Choice,* 19-33.

COASE R.H. (1960). – «The Problem of Social Cost», *Journal of Law and Economics, 3,* 1-44.

COLLOMB B. et A. ZYLBERBERG (1975). – «Critère du Profit et Objectifs Quantitatifs à travers une Procédure de Planification Décentralisée», *Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique,* n° A124-1275.

DANIEL T.E. (1975). – «A Revised Concept of Distributional Equity», *Journal of Economic Theory, 11,* 94-109.

DAVIS O.A. et A. WHINSTON (1962). – «Externalities, Welfare and the Theory of Games», *Journal of Political Economy, 70,* 241-262.

DAVIS O.A. et A. WHINSTON (1966). – «On Externalities, Information and the Government Assisted Invisible Hand», *Economica, 33,* 303-318.

DEBREU G. (1959). – *Theory of Value,* Cowles Commission Monograph, Wiley, New York, trad. franç. *Théorie de la Valeur,* Dunod, 1966.

DEBREU G. et H. SCARF (1963). – «A Limit Theorem on the Core of An Economy», *International Economic Review, 4,* 235-246.

DIAMOND P.A. (1967). – «The Role of a Stock Market in a General Equilibrium Model with Technological Uncertainty», *American Economic Review, 2,* 133-165.

DIAMOND P.A. (1973). – «Consumption Externalities and Imperfect Corrective Pricing», *Bell Journal of Economics and Management Science,* Automne, 526-538.

DIAMOND P.A. et J.A. MIRRLEES (1973). – «Aggregate Production with Consumption Externalities», *Quarterly Journal of Economics, 87,* 1-24.

DREZE J. (1970). – «Market Allocation under Uncertainty», *European Economic Review, 2,* 133-165.

DREZE J. et D. de la VALLEE POUSSIN (1971). – «A Tâtonnement Process for Public Goods», *Review of Economic Studies, 38,* 133-150.

DUBINS L.E. et E.M. SPANIER (1968). – «How to Cut a Cake Fairly», *American Mathematical Monthly, 68,* 1-17.

EDGEWORTH F.Y. (1881). – *Mathematical Psychics,* Kegan, London.

ELLIS H. et W. FELLNER (1943). – «External Economies and Diseconomies», *American Economic Review, 23,* 493-511.

FELDMAN A. et A. KIRMAN (1974). – «Fairness and Envy», *American Economic Review, 64,* 995-1005.

FOLEY D. (1967). – «Resource Allocation and the Public Sector», *Yale Economic Essays, 7,* Spring.

FUCHS G. and G. LAROQUE (1974). – «Continuity of Equilibria for Economies with Vanishing External Effects», *Journal of Economic Theory, 9,* 1-22.

GIBBARD A., (1973). – «Manipulation of Voting Schemes. A General Result», *Econometrica,* 41, 587-601.

GREEN J. et E. SHESHINSKI (1974). – «Direct VS. Indirect Remedies for Externalities», D.P., University of California at Berkeley.

GROVES T. (1973). – «Incentives in Teams», *Econometrica, 41,* 617-631.

GROVES T. (1974). – «Information, Incentives and the Internalization of Production Externalities», D.P. N° 87, Northwestern University.

GROVES T. et J. LEDYARD (1975). – «An Incentive Mechanism for Efficient Resource Allocation in General Equilibrium with Public Goods», *D.P.* n° 119, Northwestern University.

GROVES T. et M. LOEB (1975). – «Incentives and Public Inputs», *Journal of Public Economics, 4,* 211-226.

GREEN J. et J.J. LAFFONT (1974). – «On the Revelation of Preferences for Public Goods», *Technical Report n° 140*, Stanford University.

GREEN J. et J.J. LAFFONT (1975a). – «Characterization of Statisfactory Mechanisms for the Revelation of Preferences for Public Goods», *Econometrica, 45*, 427-438.

GREEN J. et J.J. LAFFONT (1975b). – «Strength of Incentives for S.I.I.C. Mechanisms», Harvard University.

HEAL G. (1969). – «Planning without Prices», *Review of Economic Studies*.

HEAL G. (1971). – «Planning, Prices and Increasing Returns», *Review of Economic Studies, 38*, 281-294.

HEAL G. (1973). – «The Theory of Economic Planning», North-Holland, Amsterdam-London.

HELLER W.P. et D. STARRETT (1974). – «On the Nature of Externalities», *D.P.*, University of California, San Diego.

HENDERSON J.V. (1974). – «A Note on the Economics of Public Intermediate Inputs», *Economica, 41*, 322-327.

HUARD P. (1965). – Mathematiques des Programmes Economiques, Dunod, Paris.

HURWICZ L. (1972). – *On Informationally Decentralized Systems*, in R. Radner and C.B. McGuire, eds, Decision and Organization, North Holland, Amsterdam.

HURWICZ L. (1975). – «Nash Equilibrium and Pareto Optimaly for Public and Private Goods», presented at the NSF-NBER Conference on Decentralization, Princeton University.

KAIZUKA K. (1965). – «Public Goods and Decentralisation of Production», *Review of Economics and Statistics, 47*, 118-120.

KOLM S.C. (1971). – «Justice et Equité», *C.E.P.R.E.M.A.P.*, Paris.

KOLM S.C. (1975). – «Rendement Qualitatif et Financement Optimal des Politiques d'Environnement», *Econometrica, 43*, 93-114.

KURZ M. (1974). – «Experimental Approach to the Determination of the Demand for Public Goods», *Journal of Public Economics, 3*, 329-348.

LAFFONT J.J. (1972). – Thèse de 3[e] Cycle, Mathématiques Appliquées, Paris.

LAFFONT J.J. et G. LAROQUE (1976). – «Existence d'un Equilibre de Concurrence Imparfaite», *Econometrica, 44*, 283, 294.

LAFFONT J.J. et R. GUESNERIE (1976). – «Taxing Price Makers», *C.E.P.R.E.M.A.P.*

LEDYARD J. et D.J. ROBERTS (1974). – «On the Incentive Problem with Public Goods», *D.P. N° 116*, Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science, Northwestern University.

LELAND H.E. (1973). – «Capital Asset Markets, Production and Optimality : A Synthesis», *Technical Report n° 115*, Stanford University, California.

LESOURNE J. (1977). – «External Diseconomies in Consumption and Monopoly Pricing : A Comment», *Econometrica, 45*, 519-526.

LINDAHL E. (1919). – *Die Gerechtigkeit der Besteuerung, Lund*, Traduction anglaise dans Musgrave and Peacock (1958).

LIONS J.L. (1968). – *Contrôle Optimal de Systèmes Gouvernés par des Equations aux Dérivées Partielles*, Dunod, Paris.

LIONS J.L. et R. TEMAM (1966). – «Eclatement et Décentralisation en Calcul des Variations», *C.R.A.S.*, Paris, *263*, 563-565.

LOEVE M. (1963). – *Probability Theory*, Van Nostrand, New York.

LUSKI I. et LUSKY R. (1975). – «External Diseconomies in Consumption and Monopoly Pricing», *Econometrica, 43*, 223-230.

MALINVAUD E. (1967). – «Decentralized Procedures for Planning», dans *Malinvaud et Bacharach* (ed.), Activity Analysis in the Theory of Growth and Planning, Mac Millan.

MALINVAUD E. (1969). – *Leçon de Théorie Microéconomique*, Dunod, Paris.

MALINVAUD E. (1972). – «Prices for Individual Consumption, Quantity Indicators for Collective Consumption», *Review of Economic Studies, 39*, 385-405.

MARSHALL A. (1961). – *Principles of Economics*, 8[e] édition, MacMillan.

MEADE J.E. (1952). – «External Economies and Diseconomies in a Competitive Situation», *Economic Journal, 62*, 54-67.

MILLERON J.C. (1972). – «Theory of value with Public Goods : A Survey Article», *Journal of Economic Theory, 5*, 419-477.

MODIGLIANI F. et M.H. MILLER (1958). – «The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment», *American Economic Review, 48*, 261-297.

MURAKAMI Y. et T. NEGISHI (1964). – «A Note on a Formulation of External Economy», *International Economic Review, 5*, 328-334.

MUSGRAVE R. (1959). – *The Theory of Public Finance*, Mc Graw Hill, New York.

MUSGRAVE R. et A.T. PEACOCK (1958). – *Classics in the Theory of Public Finance*, Mac Millan, London.

NEWBERY J. (1974). – «Experimental Approach to the Determination of the Demand for Public Goods : a Comment», *Journal of Public Economics, 3*, 425-429.

NIKAIDO M. (1971). – *Convex Structures and Economic Theory*, Academic Press, New York.

PAZNER E. et D. SCHMEIDLER (1974). – «A Difficulty in the Concept of Fairness» *The Review of Economic Studies, 61*, 441-443.

PEARCE D. et S. STURMEY (1967). – «Les Effets Externes et l'Antagonisme entre Bien-Etre Individuel et Bien-Etre Collectif», *Analyse et Prévision*, juillet-août.

PIGOU A.C. (1922). – «Empty Economic Boxes. A Reply», *Economic Journal, 32*, 458-465.

PIGOU A.C. (1960). – *The Economics of Welfare*, 4e Edition, MacMillan. 1ère édition : 1920.

PLOTT C.R. (1966). – «Externalities and Corrective Taxes», *Economica, 33*, 84-87.

RAO C.R. (1965). – *Linear Statistical Inference*, John Wiley, London.

ROCKAFELLAR T. (1970). – *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton.

ROSENTHAL R. (1971). – «External Economies and Cores», *Journal of Economic Theory, 3*, 182-187.

SAMUELSON P. (1954). – «The Pure Theory of Public Expenditures», *Review of Economics and Statistics, 36*, 387-389.

SAMUELSON P. (1955). – «Diagrammatic Exposition of a Theory of Public Expenditures», *Review of Economics and Statistics, 37*, 350-356.

SAMUELSON P. (1969). – «Pure Theory of Public Expenditure and Taxation», in *Public Economics*, Margolis, J. and H. Guitton (eds), Mac Millan-St Martin Press, New York, 98-123.

SANDMO A. (1972a). – «Optimality Rules for the Provision of Collective Factors of Production», *Journal of Public Economics, 1*, 149-157.

SANDMO A. (1972b). – «Discount Rates for Public Investment under Uncertainty», *International Economic Review 13*, 287-302.

SANDMO A. (1975). – «Optimal Taxation in the Presence of Externalities», *The Swedish Journal of Economics, 77*, 86-98.

SATTERTHWAITE M.A. (1975). – «Strategy-Proofness and Arrow's Conditions : Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions», *Journal of Economic Theory, 10*, 187-217.

SAVAGE L.J. (1971). – «Elicitation of Personal Probabilities and Expectations», *Journal of the American Statistical Association, 66*, 783-801.

SCARF H. (1967). – «The Core of an N-Person Game», *Econometrica, 35*, 50-69.

SCARF H. (1971). – «On the Existence of a Cooperative Solution for a General Class of N-Person Games», *Journal of Economic Theory, 3*, 169-181.

SCHMEIDLER D. et VIND K. (1972). – «Fair Net Trades», *Econometrica, 40*, 637-642.

SCITOVSKY T. (1954). – «Two Concepts of External Economies», *Journal of Political Economy, 62*, 70-82.

SHAPLEY L. et SHUBIK M. (1969). – «On the Core of an Economic System with Externalities», *American Economic Review, 59*, 678-684.

SIDGWICK H. (1887). – *Principles of Political Economy*, Mac Millan, New York

STARRETT D. (1972). – «Fundamental non Convexities in the Theory of Externalities», *Journal of Economic Theory, 4*, 180-199.

STARRETT D. (1973). – «Note on Externalities and the Core». *Econometrica, 41*, 179-183.

STARRETT D. et R. ZECKHAUSER (1971). – «Treating External Diseconomies-Markets or Taxes», *Kennedy School of Government*, Harvard.

STEINHAUS H. (1948). – «The Problem of Fair Division», *Econometrica, 16*, 101-104.

SRAFFA P. (1926). – «The Laws of Returns under Competitive Conditions», *The Economic Journal, 36*.

THOMPSON E.A. (1967). – «A Pareto Optimal Group Decision Process», *Papers on Non-Market Decision Making*, University of Virginia.

THOMPSON E.A. (1968). – «The Perfectly Competitive Production of Collective Goods», *Review of Economics and Statistics, 50,* 1-12.

TURVEY R. (1963). – «On Divergences Between Social Cost and Private Cost», *Economica, 10,* 309-313.

VARIAN H. (1974). – «Equity, Envy and Efficiency», *Journal of Economic Theory», 9,* 63-91.

VICKREY W. (1961). – «Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders», *Journal of Finance, 16,* 8-37.

VINER J. (1931). – «Cost Curves and Supply Curves», *Zeitschrift für National Ökonomie, 3,* 23-46.

WEITZMAN M. (1970). – «Iterative Multi-Level Planning with Production Targets», *Econometrica, 38,* 50-65.

WELLISZ S. (1964). – «On External Diseconomies and the Government Assisted Invisible Hand», *Economica, 31,* 345-362.

WICKSELL K. (1896). – *Finanztheoretische Untersuchungen und das Steuerwesen Schweden's,* Jena, Germany, Traduction anglaise dans Musgrave and Peacock (1958).

SYMBOLES UTILISES

R : droite réelle

$\subset$: inclus dans

$\cup$: union

$\cap$: intersection

$\in$: appartient à

$\exists$: il existe

$\nexists$: il n'existe pas

$\forall$: pour tout

$\sum_{i=1}^{N}$: somme pour $i = 1$ à N

$\prod_{i=1}^{N}$: produit pour $i = 1$ à N

ϕ : ensemble vide

int : intérieur au sens topologique

front : frontière au sens topologique

X\Y : ensemble des éléments de l'ensemble X qui ne sont pas dans l'ensemble Y.

AX : cône asymptotique de l'ensemble X à l'origine, c'est-à-dire, cône formé des directions non bornées de X.

GZ(.) : graphe de la correspondance Z(.) de X dans Y, c'est-à-dire, l'ensemble $\{(x, y)/x \in X, y \in Z(x)\}$

$\succ$: préféré à

$\succsim$: préféré ou indifférent à

fog : application composée de f et de g définie par $\text{fog}(x) = f[g(x)]$

E(.) : opérateur espérance mathématique

cov $(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$: covariance des variables aléatoires $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$

$n!$: factorielle n soit $n(n-1)\ldots 2 . 1$

C_n^p : $\dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$