Toulouse School of Economics

Concours BLSES 2025

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 1 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On note id_E l'application identité de E

1. On dit qu'un endomorphisme p est un projecteur de E si $p \circ p = p$. Soit p un projecteur de E.
   (a) Dans quel(s) cas p est-il bijectif ? (sur 1 pt)
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$. (sur 1 pt)
   (c) Déterminer les valeurs propres de p. (sur 1 pt)
2. Soient p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$. On pose $f = p + q$ et $g = p - q$.
   (a) Le réel -1 est-il une valeur propre de f ? (sur 1 pt)
   (b) Montrer que g est un projecteur de E si et seulement si $p \circ q = q \circ p = q$. (sur 1 pt)
   (c) Déterminer $f^3 - 3f^2 + 2f$. (sur 1 pt)
   (d) Déterminer les valeurs propres possibles de f. (sur 1 pt)
   (e) Montrer que 0 est valeur propre de f si et seulement si $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \neq \{0_E\}$. (sur 1 pt)
   (f) Montrer que 2 est valeur propre de f si et seulement si $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \neq \{0_E\}$. (sur 2 pt)

Toulouse School of Economics

CONCOURS BLSES 2025

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 1 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Un serveur brise en moyenne trois verres et une assiette par mois. Notons X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de verres cassés et Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre d'assiettes cassées par ce serveur. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre 3 et Y suit une loi une loi de Poisson de paramètre 1. X et Y sont supposées indépendantes.

1. Donner les lois de probabilité des variables aléatoires X et Y. (sur 1 pt)
2. Quelle est la loi de $X + Y$? (sur 1 pt)
3. Calculer la probabilité d'un mois sans assiette ni verre cassé. (sur 1 pt)
4. Ce serveur maladroit casse aussi des bols. Notons Z la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de bols cassés involontairement en une année. On suppose que Z suit une loi de Poisson de paramètre 5. Si le soir du 31 décembre, le serveur n'a pas cassé au moins 5 bols dans l'année, il fête cela en brisant des bols pour avoir au moins le minimum de 5 bols cassés sur l'année. Soit W la variable aléatoire qui représente le nombre de bols cassés par an après le soir du 31 décembre.

   Exprimer W en fonction de Z. (sur 3 pt)
5. Donner la loi de probabilité et l'espérance de W. (sur 4 pt)

Toulouse School of Economics

Concours BLSES 2025

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 2 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune N boules indiscernables au toucher :

- L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire.
- L'urne U_2 contient N boules blanches.

1. Une première expérience aléatoire : On effectue des tirages sans remise dans l'urne U_1, jusqu'à l'obtention de la boule noire. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire. On note, pour tout entier naturel $i \geq 1$:
   - N_i l'événement « on tire une boule noire lors du i-ième tirage ».
   - B_i l'événement « on tire une boule blanche lors du i-ième tirage ».

   (a) En décrivant soigneusement les événements utilisés, calculer $\mathbb{P}(X = k)$, pour tout k dans $\{1, 2, 3\}$. (sur 1.5 pt)

   (b) Déterminer la loi de la variable aléatoire X. (sur 1.5 pt)

   (c) Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire. (sur 1 pt)

2. Une deuxième expérience aléatoire : On choisit une des deux urnes au hasard et on tire dans l'urne choisie une par une les boules sans remise jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie. On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués. On note :
   - C_1 l'événement « on choisit l'urne U_1 ».
   - C_2 l'événement « on choisit l'urne U_2 ».

   (a) Montrer que pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$:
   $$\mathbb{P}(Y = j | C_1) = \frac{1}{N}.$$
   (sur 1 pt)

   (b) Pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$, calculer $\mathbb{P}(Y = j | C_2)$. (sur 1.5 pt)

   (c) Montrer que :
   $$\mathbb{P}(Y = j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N} & \text{si } j \in [\![1, N-1]\!] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2N} & \text{si } j = N \end{cases}$$
   (sur 2 pt)

   (d) Calculer l'espérance de Y. (sur 2 pt)

Toulouse School of Economics

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 2 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}.$$

1. Montrer que I_n est bien définie. (sur 1 pt)
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n. (sur 5 pt)
3. En déduire la valeur de I_3. (sur 4 pt)

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 3 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un jeu consiste à tirer une boule dans une urne contenant $n+1$ boules équiprobables numérotées de 0 à n. Si on tire un numéro k :

- on gagne k euros si k est pair,
- on perd k euros si ce numéro est impair.

On note X la variable aléatoire égale au numéro tiré et G le gain de ce jeu.

1. Exprimer G en fonction de X. (sur 1 pt)
2. On suppose que la loi de X est uniforme.
   (a) Le joueur a-t-il plus de chances de gagner ou de perdre de l'argent ? (sur 2 pt)
   (b) Montrer que $\mathbb{E}(G)$, l'espérance de G, vaut
   $$\mathbb{E}(G) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\ .$$
   (sur 1 pt)
   (c) Calculer $\mathbb{E}(G)$ selon que n est pair ou impair. (sur 1 pt)
3. Dans cette partie on suppose que la loi de X est binomiale de paramètres n et $p \in]0,1[$.
   (a) Montrer que pour tout $1 \leq k \leq n$ on a :
   $$\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}\ .$$
   (sur 1 pt)
   (b) Montrer qu'il existe un entier λ que l'on précisera tel que :
   $$\mathbb{E}(G) = \lambda(1-p)^n \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{k+1}\ .$$
   (sur 2 pt)
   (c) Calculer $\mathbb{E}(G)$. (sur 2 pt)
   (d) Pour quelles valeurs de p le jeu est-il favorable au joueur ? (sur 1 pt)
4. Dans cette dernière question on suppose que l'urne contient uen infinité de boules numérotées à partir de 1 et que la loi de X est une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Le jeu est-il favorable au joueur ? (sur +2 pt)

Toulouse School of Economics

Concours BLSES 2025

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 3 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Soit f la fonction définie par

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x\,\mathrm{e}^{x\left(y^2+1\right)} \end{array}.$$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. (sur 1 pt)
2. Montrer que f admet au plus un extremum local. (sur 1 pt)
3. Montrer que f admet exactement un extremum local et déterminer sa nature et sa valeur. (sur 2 pt)
4. (a) Soit la fonction g définie par

$$g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\,\mathrm{e}^{x} \end{array}.$$

   Montrer que :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \geq g(x)\ .$$

   (sur 2 pt)

   (b) En étudiant la fonction g, déterminer l'extremum global de f. (sur 2 pt)

   (c) L'extremum peut-il être strict ? (sur 2 pt)

Concours BLSES 2025

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 4 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. On effectue une succession de tirages équiprobables d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste avant le $(k+1)$-ème tirage.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note

- B_k l'événement « on tire une boule blanche au k-ème tirage »,
- R_k l'événement « on tire une boule rouge au k-ème tirage ».

1. Déterminer la loi de X_0. (sur 1 pt)
2. Déterminer la loi de X_1. (sur 1 pt)
3. Déterminer la loi de X_2. (sur 1 pt)
4. Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer le support de X_k. (sur 1 pt)
5. Soient $k \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in [\![1, k+1]\!]$.
   (a) Pour $i \notin \{j, j+1\}$, déterminer $\mathbb{P}(X_{k+1} = i | X_k = j)$. (sur 0.5 pt)
   (b) Déterminer $\mathbb{P}(X_{k+1} = j | X_k = j)$ et $\mathbb{P}(X_{k+1} = j+1 | X_k = j)$. (sur 2 pt)
   (c) Pour tout $i \in [\![1, k+2]\!]$, en déduire $\mathbb{P}(X_{k+1} = i)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_k = i)$ et $\mathbb{P}(X_k = i-1)$. (sur 2.5 pt)
6. Retrouver la loi de X_2. (sur 1 pt)

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 4 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n \geq 1$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} .$$

1. Montrer que u_n est strictement croissante. (sur 1 pt)
2. Énoncer l'inégalité des accroissements finis. (sur 1 pt)
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} . \tag{1}$$

   (sur 1.5 pt)
4. Déduire de (1) que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n \geq 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) .$$

   (sur 2 pt)
5. Déduire de (1) que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n \leq 2\sqrt{n} .$$

   (sur 2 pt)
6. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} .$$

   (sur 1.5 pt)
7. Montrer que u_n n'a pas de limite finie lorsque n tend vers $+\infty$. (sur 1 pt)

Toulouse School of Economics

Concours BLSES 2025

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 5 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Pour tout entier $n \geq 0$, on considère la suite de terme général u_n défini par :

$$u_n = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^n(x)}{\sin(x)} \mathrm{d}x \, .$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. (sur 1 pt)
2. Calculer u_1. (sur 1 pt)
3. Dériver la fonction
$$\begin{array}{rcl} [\pi/6, \pi/2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right) \end{array} .$$
(sur 1.5 pt)
4. En déduire la valeur de u_0. (sur 1.5 pt)
5. (a) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout n :
$$0 \leq u_n \leq \alpha \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n .$$
(sur 1.5 pt)
   (b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (sur 1 pt)
   (c) Déterminer la nature de la série de terme général u_n. (sur 1 pt)
6. Montrer que pour tout entier n on a :
$$u_{n+2} = u_n - \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} .$$
(sur 1.5 pt)

Toulouse School of Economics

CONCOURS BLSES 2025

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 5 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Un mobile se déplace sur un axe réel de la façon suivante : à l'instant 0, il est au point 0. Puis, si le mobile est à l'instant n sur le point d'abscisse k, alors à l'instant $n+1$, il sera sur le point d'abscisse $k+1$ avec probabilité $p \in]0,1[$ et en 0 sinon. On appelle X_n la variable égale à l'abscisse du mobile à l'instant n.

1. Déterminer la loi de X_0. (sur 0.5 pt)
2. Déterminer la loi de X_1. (sur 1.5 pt)
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $X_n(\Omega)$. (sur 2 pt)
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer $\mathbb{P}(X_n = k)$ en fonction de X_{n-1}. (sur 2 pt)
5. En déduire une expression de l'espérance de X_n en fonction de n et p. (sur 4 pt)

Toulouse School of Economics

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 6 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — On dispose de deux pièces truquées :

- la pièce A pour laquelle la probabilité de faire pile vaut $p \in]0,1[$,
- la pièce B dont la probabilité de faire pile vaut $q \in]0,1[$ avec $q \neq p$.

Un joueur peut choisir parmi ces deux pièces et effectuer autant de lancers qu'il le souhaite, mais il ne sait pas laquelle des deux pièces A ou B a le plus de chances de réaliser le côté pile. Il adopte la stratégie suivante :

- Il choisit la première pièce au hasard et la lance. S'il fait pile il relance la même pièce, sinon il effectue un lancer avec l'autre pièce.
- Il répète cette stratégie pendant tout le jeu : S'il fait pile il relance la même pièce, sinon il effectue un lancer avec l'autre pièce.

Pour tout $i \geq 1$, on note E_i l'événement « le i-ième tirage est fait avec la pièce A » et par G_i l'événement « le i-ième lancer est un pile ».

1. (a) Déterminer $\mathbb{P}(E_{i+1} \mid \overline{E_i})$.
   (b) Montrer que :
   $$\mathbb{P}(E_{i+1}) = (p+q-1)\mathbb{P}(E_i) + 1 - q \ .$$
   (c) Pour tout $i \geq 1$, on pose
   $$u_i = \mathbb{P}(E_i) - \frac{1-q}{2-p-q} \ .$$
   Déterminer la nature de la suite $(u_i)_{i\geq 1}$.
   (d) Déterminer $\mathbb{P}(E_i)$ en fonction de p et q.
2. (a) Exprimer $\mathbb{P}(G_i)$ en fonction de $\mathbb{P}(E_i)$.
   (b) Montrer que
   $$\mathbb{P}(G_i) = -\frac{(q-p)^2}{2(2-p-q)}(p+q-1)^{i-1} + \frac{p+q-2pq}{2-p-q}$$
3. Le i-ième lancer vient de donner pile. Quelle est la probabilité qu'il ait eu lieu avec la pièce A ?
4. (a) Déterminer la limite de $\mathbb{P}(G_i)$ quand $i \to +\infty$.
   (b) Lorsque $p > q$ et i sont assez grands montrer que :
   $$q < \mathbb{P}(G_i) < p \ .$$
   (c) Que pensez-vous de la stratégie du joueur ?

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 6 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Pout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère

$$D : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array},$$

où $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

1. Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad D^k(P) = P^{(k)}.$$
3. En déduire que D est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier N_0 tel que pour tout $k \geq N_0$, $D^k(P) = 0$.
4. Montrer que la série de terme général D^k converge.
5. Déterminer la représentation matricielle A de D dans la base canonique $\{\mathbb{1}, \cdots, X^n\}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ où $\mathbb{1} : x \mapsto 1$ et pour tout $k \geq 1$, $X^k : x \mapsto x^k$.
6. Montrer que la limite de la série est bijective, et que sa réciproque admet pour représentation matricielle dans la base canonique $I_{n+1} - A$, où I_{n+1} est la matrice identité d'ordre $n+1$.
7. On considère l'endomorphisme Δ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :
$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k(P).$$
Montrer que :
$$P(X+1) = \Delta(P)(X).$$

Toulouse School of Economics

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 7 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \,.$$

1. Montrer que
$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} \,.$$
(sur 1 pt)
2. En déduire que
$$\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1 \,.$$
(sur 1 pt)
3. En déduire un équivalent de H_n. (sur 0.5 pt)
4. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$ par
$$u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \,.$$
Justifier que la série de terme général u_n est convergente. (sur 1.5 pt)
5. On considère la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie pour $n \geq 1$ par
$$v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
Justifier que la série de terme général v_n est convergente. (sur 0.5 pt)
6. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n = H_n - \ln(n)$. Pour $n \geq 2$, exprimer $f_n - f_{n-1}$, en fonction de u_n. (sur 2 pt)
7. En déduire que (f_n) converge. (sur 1 pt)
8. Quel est le signe de u_n pour $n \geq 2$? (sur 1 pt)
9. Quel est le signe de v_n pour $n \geq 1$? (sur 0.5 pt)
10. Démontrer que, pour tout $N \geq 2$,
$$\sum_{n=2}^{N} \big(\ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln(n)\big) = \ln(N+1) - \ln(N) - \ln(2).$$
(sur 1 pt)

11. On note, pour $N \geq 1$,

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n \quad \text{et} \quad T_N = \sum_{n=1}^{N} v_n \ .$$

Déduire des deux questions précédentes que les suites $(S_N)_N$ et $(T_N)_N$ sont adjacentes.
(sur +2 pt)

Toulouse School of Economics

Concours BLSES 2025

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 7 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — On dispose d'une pièce équilibrée et on effectue des lancers de cette pièce de manière indépendante. Pour k entier supérieur ou égal à 2, on note X la variable aléatoire qui prend pour valeur k si l'on obtient pour la première fois pile puis face aux lancers $k-1$ et k, X prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note

- P_k l'événement « obtenir pile au k-ème tirage »,
- F_k l'événements « obtenir face au k-ème tirage ».

1. Pour tout $k \geq 2$, déterminer $\mathbb{P}(X = k | P_1)$. (sur 1 pt)
2. Pour tout $k \geq 3$, déterminer $\mathbb{P}(X = k | F_1)$ en fonction de $\mathbb{P}(X = k-1)$. (sur 1 pt)
3. En déduire, pour tout $k \geq 3$, l'expression de $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X = k-1)$ et de k. (sur 2 pt)
4. Pour tout $k \geq 2$, on pose $u_k = 2^k \, \mathbb{P}(X = k)$. Déterminer la nature de la suite $(u_k)_{k \geq 2}$. (sur 2 pt)
5. En déduire la loi de X. (sur 1 pt)
6. Montrer que pour tout $q \in]0, 1[$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \, q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3} \, .$$

   (sur +2 pt)
7. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer. (sur 3 pt)

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 8 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Soit U la matrice carrée d'ordre 2 dont tous les coefficients valent 1.

On considère l'application φ définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & \mathrm{Tr}(UM)\,U \,. \end{array}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. (sur 1 pt)
2. Déterminer $\varphi(U)$. (sur 1 pt)
3. Montrer que :
$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(U)\,.$$
(sur 1 pt)
4. Déterminer la dimension du noyau de φ. (sur 1 pt)
5. (a) Montrer que 0 est une valeur propre de φ. (sur 0.5 pt)
   (b) Déterminer la dimension de l'espace propre associé à 0. (sur 0.5 pt)
   (c) Trouver une base de l'espace propre associé à 0. (sur 1.5 pt)
6. Supposons que λ soit une valeur propre non nulle de φ. Montrer que
$$E_\lambda(\varphi) \subset \mathrm{Im}(\varphi)\,,$$
où E_λ est l'espace propre associé à la valeur propre λ. (sur 1 pt)
7. (a) Montrer que φ est diagonalisable. (sur 1 pt)
   (b) Exhiber une base de vecteurs propres et la matrice de φ dans cette base. (sur 1.5 pt)

Toulouse School of Economics

Concours BLSES 2025

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 8 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} .$$
(sur 1 pt)

2. Déterminer
$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} .$$
(sur 2.5 pt)

3. Déterminer
$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} .$$
(sur 2.5 pt)

4. En déduire
$$\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} .$$
(sur 4 pt)

Concours BLSES 2025

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 9 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Soient $n \geq 3$, $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes et $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On note $\mathcal{B}_n = (\mathbb{1}, X, \cdots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ où $\mathbb{1} : x \mapsto 1$ et, pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, $X^k : x \mapsto x^k$.

On considère l'application φ définie par

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}_n[x] & \to & \mathbb{R}[x] \\ & P & \mapsto & \varphi(P) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{x-2}^{x+2} P(t)\mathrm{d}t \end{array} \right. . \end{array}$$

1. (a) Montrer que φ est une application linéaire. (sur 1 pt)
   (b) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$. (sur 1 pt)
2. Lorsque $n = 3$, déterminer la matrice représentative de φ dans la base $\mathcal{B}_3$. (sur 2 pt)
3. *On revient au cas général et on prend $n \geq 3$ jusqu'à la fin de l'exercice.*
   (a) Montrer que A_n, la matrice représentative de φ dans la base $\mathcal{B}_n$, est triangulaire supérieure. (sur 2 pt)
   (b) Déterminer le spectre de φ. (sur 1 pt)
   (c) Déterminer une base des espaces propres associés aux éléments du spectre de φ. (sur +2 pt)
   (d) En déduire que φ n'est pas diagonalisable. (sur 1 pt)
   (e) Montrer que si P est de degré 2 alors P ne peut pas être vecteur propre de φ. (sur 2 pt)
   (f) Montrer que si P est vecteur propre de φ de degré supérieur ou égal à 1 alors P' est aussi vecteur propre de φ. (sur +2 pt)

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 9 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages équiprobables successifs d'une boule dans l'urne suivant le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule qui vient d'être tirée.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

1. Déterminer la loi de X_1. (sur 2 pt)
2. Déterminer la loi de X_2. (sur 3 pt)
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, conjecturer la loi de X_n. (sur 1 pt)
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_n. (sur 4 pt)

Toulouse School of Economics

CONCOURS BLSES 2025

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 10 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Nous allons étudier la position d'un point mobile sur la droite des réels. Au temps $t = 0$, le point a pour abscisse 0. Après chaque seconde, le point mobile avance d'une unité, recule d'une unité ou reste sur place avec la même probabilité $1/3$.

On note $M_{n,t}$ l'événement : « Le point mobile est au point d'abscisse n après t secondes ».

1. Déterminer $\mathbb{P}(M_{0,0})$. (sur 0.5 pt)
2. Déterminer $\mathbb{P}(M_{n-1,t+1}|M_{n,t})$, $\mathbb{P}(M_{n,t+1}|M_{n,t})$ et $\mathbb{P}(M_{n+1,t+1}|M_{n,t})$. (sur 0.5 pt)
3. Soit G_n l'événement, « Le point effectue son premier déplacement vers la gauche après exactement n secondes ».
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que
   $$\mathbb{P}(G_n) = \frac{2^{n-1}}{3^n} .$$
   (sur 2 pt)
   (b) Calculer la probabilité de l'événement : « Le point effectue au moins un déplacement vers la gauche ». (sur 2 pt)
4. Soit D_n l'événement, « Le point est a une abscisse paire après n secondes ». Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n = \mathbb{P}(D_n)$.
   (a) Déterminer u_0. (sur 0.5 pt)
   (b) Déterminer $\mathbb{P}(D_{n+1}|D_n)$. (sur 0.5 pt)
   (c) Déterminer $\mathbb{P}(D_{n+1}|\overline{D_n})$. (sur 0.5 pt)
   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire que
   $$u_{n+1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}u_n .$$
   (sur 1.5 pt)
   (e) Conclure. (sur 2 pt)

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 10 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, 2e_2 + e_3, 3e_3)$ une autre base de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ ayant les mêmes coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. (sur 4 pt)
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs ayant les mêmes coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. (sur 4 pt)
3. Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, à quelle condition existe-t-il un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ ayant les mêmes composantes dans deux bases distinctes de $\mathbb{R}^n$? (sur 2 pt)

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche nº 11 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} .$$

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$. Montrer que la fonction

$$t \mapsto f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)$$

   est intégrable sur $[0, \pi]$.

2. Montrer que

$$\int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) \mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1} f(0) + \frac{2}{2n+1} \int_0^{\pi} f'(t) \cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) \mathrm{d}t .$$

3. Montrer que

$$\left| \int_0^{\pi} f'(t) \cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^{\pi} |f'(t)| \mathrm{d}t .$$

4. Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) \mathrm{d}t.$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose,

$$A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt).$$

   Vérifier que, pour $t \in]0, \pi]$, on a

$$A_n(t) = \frac{\sin\left((2n+1)t/2\right)}{2\sin(t/2)} .$$

6. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^{\pi} (at^2 + bt) \cos(nt) \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

7. Déterminer une relation entre S_n et

$$\int_0^{\pi} (at^2 + bt) A_n(t) \mathrm{d}t .$$

8. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Toulouse School of Economics

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 11 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Soient a et b deux réels. On considère U_3 la matrice carrée de taille 3 dont tous les coefficients valent 1. On définit la matrice carrée de taille 3, $M_{a,b}$ de terme général

$$\begin{cases} a & \text{si } i = j \\ b & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer $M_{a,b}$.
2. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $M_{a,b} = \alpha I_3 + \beta U_3$.
3. Calculer $M_{a,b}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Soit n un entier supérieur ou égal à 2, on considère U_n la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients valent 1. On définit la matrice carrée de taille n, $M_{a,b}$ de terme général
$$\begin{cases} a & \text{si } i = j \\ b & \text{sinon.} \end{cases}$$
Calculer $M_{a,b}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Toulouse School of Economics

Concours BLSES 2025

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 12 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Une commode contient une infinité de tiroirs numérotés $1, 2, 3, \cdots$. Un joueur ouvre les tiroirs un à un, en commençant par le premier. Chaque tiroir contient :

- soit une clé, avec probabilité $p \in]0, 1[$,
- soit rien, avec probabilité $1 - p$.

Le contenu de chaque tiroir est indépendant de celui des autres. Le joueur s'arrête dès qu'il trouve une clé.

1. (a) On note T la variable aléatoire donnant le numéro du premier tiroir contenant une clé. Quelle est la loi de T ? (sur 0.5 pt)
   (b) Calculer $\mathbb{P}(T > n)$. (sur 1 pt)
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de T. (sur 1 pt)
   (d) Le joueur parie que la clé se trouve parmi les k premiers tiroirs. Calculer la probabilité qu'il gagne son pari. (sur 2 pt)
   (e) Montrer que cette probabilité tend vers 1 lorsque k tend vers l'infini. (sur 1 pt)
2. En fait, certains tiroirs sont piégés : si le joueur ouvre un tiroir dont le numéro est un multiple de 5, une alarme se déclenche. On suppose que même si l'alarme sonne, le joueur continue à chercher jusqu'à ce qu'il trouve une clé.
   (a) On note A l'événement « le joueur déclenche au moins une alarme au cours de sa recherche ». Déterminer $\mathbb{P}(A)$ en fonction de p. (sur 1.5 pt)
   (b) Lorsque p tend vers 0, déterminer la probabilité que le joueur déclenche au moins une alarme. (sur 1 pt)
   (c) Quel est le nombre moyen d'alarmes déclenchées par le joueur ? (sur 2 pt)

Toulouse School of Economics

CONCOURS BLSES 2025

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 12 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On considère $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n([a,b])$.

1. Montrer que

$$\int_a^b f^{(n)}(x)g(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\big(f^{(n-k-1)}(b)g^{(k)}(b) - f^{(n-k-1)}(a)g^{(k)}(a)\big) + (-1)^n\int_a^b f(x)g^{(n)}(x)\mathrm{d}x\ ,$$

où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f. (sur 3 pt)

2. On pose $Q_n(x) = (1-x^2)^n$ et $P_n(x) = Q_n^{(n)}(x)$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré de P_n. (sur 1 pt)
   (b) Montrer que, pour tout $k \leq n-1$, il existe un polynôme A_k tel que

$$Q_n^{(k)}(x) = A_k(x)(x^2-1)^{n-k}\ .$$

   (sur 2 pt)
   (c) En déduire que, pour tout $k \leq n-1$, $Q_n^{(k)}(1) = 0$. (sur 1 pt)
   (d) Pour tout polynôme L de degré inférieur ou égal à $n-1$, déterminer

$$\int_{-1}^1 L(x)\,P_n(x)\mathrm{d}x\ .$$

   (sur 3 pt)

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 13 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p un réel de $]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

On s'intéresse à une épreuve de saut en hauteur au cours de laquelle un athlète doit sauter dans l'ordre n hauteurs numérotées $1, 2, \cdots, n$. L'athlète ne pouvant accéder à la hauteur suivante que s'il a réussi à sauter la hauteur précédente. L'épreuve s'arrête lorsque l'athlète échoue son saut à une hauteur donnée ou bien lorsqu'il a réussi à sauter les n hauteurs.

On admet que la probabilité de passer d'une hauteur à une autre est constante et égale à p, la probabilité de passer la hauteur 1 étant, elle aussi, égale à p. Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ on dit que le niveau de l'athlète est k s'il réussit à sauter la hauteur k et échoue à sauter la hauteur $k+1$. On dit que le niveau de l'athlète est n s'il réussit à sauter les n hauteurs et on dit que le niveau de l'athlète est 0 s'il échoue dès la hauteur 1.

1. (a) On note X_n le niveau atteint par l'athlète. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n.
   (b) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X_n = 0)$.
   (c) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note R_k l'évènement « l'athlète réussit à passer la hauteur k ». Écrire l'événement $(X_n = n)$ à l'aide de certains des événements R_k.
   (d) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X_n = n)$.
   (e) Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, déterminer l'événement $(X_n = k)$ à l'aide de certains des événements R_k.
   (f) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X_n = k)$.
2. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) = 1$.
3. Déterminer $\mathbb{E}(X_n)$, l'espérance de X_n, en fonction de n et de p.
4. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) \ .$$

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 13 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(x))^n \, dx .$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante.
3. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression de I_{n+2} en fonction de I_n et I_{n+2}.
5. En déduire I_{n+2} en fonction de I_n.
6. Déterminer la limite de la suite
$$\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} .$$

Toulouse School of Economics

Concours BLSES 2025

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 14 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$f_n : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^n} \end{array}$$

et

$$J_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations de la fonction f_n. (sur 0.5 pt)
2. Montrer que J_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. (sur 0.5 pt)
3. Calculer J_2. (sur 1 pt)
4. Pour chaque $x \in [0,1]$ déterminer la limite lorsque n tend vers l'infini de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. (sur 1.5 pt)
5. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 1. (sur 2 pt)
6. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. (sur 0.5 pt)
7. Soit $\varepsilon \in [0,1[$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\int_{1-\varepsilon}^1 f_n(x)\mathrm{d}x \leq \varepsilon\ .$$
(sur 1 pt)
8. Soit $\varepsilon \in [0,1[$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\int_0^{1-\varepsilon} f_n(x)\mathrm{d}x \geq \frac{1-\varepsilon}{1+(1-\varepsilon)^n}\ .$$
(sur 1.5 pt)
9. En déduire la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. (sur 1.5 pt)

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 14 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, 2e_2 + e_3, 3e_3)$ une autre base de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ ayant les mêmes coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. (sur 4 pt)
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs ayant les mêmes coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. (sur 4 pt)
3. Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, à quelle condition existe-t-il un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ ayant les mêmes composantes dans deux bases distinctes de $\mathbb{R}^n$? (sur 2 pt)

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 15 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — On lance à répétition une pièce qui donne pile avec probabilité $p \in]0,1[$. On arrête les lancers dès que la face « pile » est apparue pour la deuxième fois. On note X la variable aléatoire donnant le nombre total de lancers effectués. On s'intéresse à la loi de la variable aléatoire X.

1. Quel est le support de X ? (sur 1 pt)
2. Soit $n \geq 2$. Déterminer $\mathbb{P}(X = n)$. (sur 1 pt)
3. Montrer que pour tout $q \in]0,1[$,
$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}\ .$$
(sur 2 pt)
4. Montrer que
$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1\ .$$
(sur 2 pt)
5. Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X. (sur 2 pt)
6. Étudier qualitativement le comportement de $\mathbb{E}(X)$ lorsque p tend vers 0 et lorsque p tend vers 1. Interpréter. (sur 2 pt)

Toulouse School of Economics

Concours BLSES 2025

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 15 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$\operatorname{Im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,|\, y = x \right\}, \quad \operatorname{rang}(B) = 3, \quad \operatorname{rang}(AB) = 2.$$

1. Déterminer une base de $\operatorname{Im}(A)$. (sur 0.5 pt)
2. $\operatorname{Im}(A)$ est-elle une droite vectorielle ? (sur 0.5 pt)
3. Discuter du nombre de solution du système suivant :
$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$
(sur 0.5 pt)
4. À quelle(s) condition(s) sur a, b et c le système suivant a t-il une solution
$$AX = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} ?$$
(sur 0.5 pt)
5. Soit $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Discuter des solutions du système
$$BX = Y.$$
(sur 0.5 pt)
6. Montrer que $\operatorname{Im}(AB) \subset \operatorname{Im}(A)$. (sur 1.5 pt)
7. Montrer que $\operatorname{Im}(AB) = \operatorname{Im}(A)$. (sur 2 pt)
8. Soit $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Discuter des solutions du système
$$ABX = Y .$$
(sur 2 pt)
9. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que
$$NB = 0 .$$
Montrer que $N = 0$. (sur 2 pt)

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 16 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Soit X une variable aléatoire continue de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \in [0,1], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f_X est une densité de probabilité. (sur 1 pt)
2. Calculer l'espérance de X, $\mathbb{E}(X)$, et sa variance $\text{Var}(X)$. (sur 1.5 pt)
3. Déterminer la fonction de répartition F_X de X. (sur 1.5 pt)
4. On définit la variable $Y = X^2$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y. (sur 1.5 pt)
   (b) En déduire la densité f_Y de Y. (sur 1.5 pt)
   (c) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$. (sur 0 pt)
5. Comparer $\mathbb{E}(Y)$ avec $(\mathbb{E}(X))^2$ et en déduire la variance de X. (sur 0 pt)
6. On définit la variable $Z = 1 - X$.
   (a) Déterminer la densité f_Z de Z. (sur +1.5 pt)
   (b) Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\text{Var}(Z)$. (sur +1.5 pt)
7. Soit $W = \min(X, Z)$.
   (a) Déterminer l'événement $\{W \leq w\}$ pour $w \in [0,1]$. (sur 1.5 pt)
   (b) En déduire la fonction de répartition F_W. (sur 1.5 pt)

Concours BLSES 2025

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 16 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — On considère la fonction f définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{xy}-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}y \end{array}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f. (sur 1.5 pt)
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition. (sur 1.5 pt)
3. Calculer $f(x,x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$. (sur 0.5 pt)
4. On se place désormais sur le domaine $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$. Déterminer les points critiques de f. (sur 2 pt)
5. Peut-on déterminer la nature des points critiques obtenus (minimum local, maximum local, point selle) ? (sur 2 pt)
6. Déterminer la valeur de f en ces points critiques. (sur 0.5 pt)
7. Les points critiques sont-il des minima globaux ? (sur 2 pt)

Toulouse School of Economics

Concours BLSES 2025

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 17 : Première partie – Problème avec préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — Soit $E = \mathbb{R}^3$.

1. On considère le sous-ensemble :

$$F = \{(x, y, z) \in E \mid x - 2y + z = 0\}.$$

   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. (sur 1 point pt)

   (b) Déterminer un supplémentaire K de F dans E. (sur 1 point pt)

   (c) Déterminer la matrice de la projection sur F de direction K dans la base canonique. (sur 2 points pt)

2. (a) On pose $G = \text{vect}\{(1, 1, 1)\}$ et $H = \text{vect}\{(1, 2, 3)\}$. Montrer que G et H sont supplémentaires dans F. (sur 2 points pt)

   (b) On pose $u = (x, y, z)$ un vecteur de F. Déterminer l'image de u par la projection sur G de direction H dans la base canonique. (sur 2 points pt)

3. On considère

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x + \pi/4) \end{array}.$$

   (a) Montrer que f appartient à $\text{vect}(\cos, \exp, \sin)$. (sur 1 point pt)

   (b) On pose $g = \cos + \exp + \sin$ et $h = \cos + 2\exp + 3\sin$. Montrer que f est combinaison linéaire de g et h. (sur 1 point pt)

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 17 : Deuxième partie – Exercice sans préparation,
- Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice. — On effectue des tirages successifs dans une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire et :

— Si on pioche une boule noire on s'arrête.

— Si on tire une boule blanche, on double le nombre de boules blanches et on continue.

Soit A_n : « la boule noire n'est pas tirée lors des n premiers tirages ».

1. Si la boule noire n'est pas tirée lors des n premiers tirages, quelle est la composition de l'urne pour le prochain tirage ?
2. On note $u_n = \mathbb{P}(A_n)$. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n \cdot \frac{2^n}{2^n + 1} .$$
3. On pose $v_n = -\ln(u_n)$. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) .$$
4. (a) Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(1+x) \leq x .$$
   (b) Montrer alors que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_1 \leq 1 - \frac{1}{2^n} .$$
   (c) Justifier que $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers un réel l, puis que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers un réel strictement positif.
5. Quelle est la probabilité que la boule noire soit tirée ?

Toulouse School of Economics

CONCOURS BLSES 2025

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 1 : Première partie – Problème avec préparation - corrigé,

1. (a) Si $p = \mathrm{id}$, il est clair que p est bijectif et vérifie $p \circ p = p$.

   Réciproquement, si p est bijectif, p^{-1} existe qui vérifie $p^{-1} \circ p = \mathrm{id}$. On a alors comme $p \circ p = p$ que :
   $$p = (p^{-1} \circ p) \circ p = p^{-1} \circ (p \circ p) = p^{-1} \circ p = \mathrm{id}.$$

   (b) Soit $v \in \mathrm{Im}(p)$. Il existe $u \in E$ tel que $v = p(u)$ et on a alors :
   $$(p - \mathrm{id})(v) = (p - \mathrm{id})(p(u)) = (p \circ p)(u) - p(u) = 0_E.$$
   Soit $w \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id})$, on a $p(w) = w$, c'est-à-dire que $w \in \mathrm{Im}(p)$.

   (c) λ est une valeur propre de p si et seulement si il existe $v \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $p(v) = \lambda v$. On a donc
   $$\lambda v = p(v) = p \circ p(v) = p(\lambda v) = \lambda p(v) = \lambda^2 v,$$
   soit $\lambda = \lambda^2$ car v est non nul, autrement dit $\lambda \in \{0, 1\}$.

2. (a) Supposons qu'il existe $v \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(v)p(v) + q(v) = -v$. En composant par p et par $-q$, on obtient :
   $$\begin{cases} p(v) + p \circ q(v) & = & -p(v) \\ -q \circ p(v) - q(v) & = & q(v)\ . \end{cases}$$
   En additionnant, cela donne $p(v) = q(v)$. Donc $f(v) = 2p(v) = -v$ c'est-à-dire que $-1/2$ serait valeur propre de p, ce qui est absurde.

   (b) L'application g est une application linéaire comme combinaison linéaire d'endomorphismes de E. De plus g est un projecteur de E si et seulement si :
   $$\begin{array}{rl} & (p-q) \circ (p-q) = p - q \\ \iff & p - p \circ q - q \circ p + q = p - q \\ \iff & p \circ q = q \circ p = q \end{array}$$

   (c) Comme p et q commutent, on a :
   $$\begin{aligned} f^3 - 3f^2 + 2f &= (p+q)^3 - 3(p+q)^2 + 2(p+q) \\ &= p^3 + 3p^2 \circ q + 3p \circ q^2 + q^3 - 3(p^2 + 2p \circ q + q^2) + 2(p+q) \\ &= p + 6p \circ q + q - 3p - 6p \circ q - 3q + 2p + 2q \\ &= 0_{\mathcal{L}(E)} \end{aligned}$$

(d) Le polynôme $X(X^2-3X+2)=X(X-1)(X-2)$ est annulateur de f donc les valeurs propres possibles de f sont 0, 1 et 2.

(e) Si 0 est une valeur propre de f, il existe un $v \in E\setminus\{0_E\}$ tel que

$$p(v)+q(v)=0_E\ . \tag{1}$$

donc, en composant par p et par $-q$, on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} p(v)+p\circ q(v) & = & 0_E \\ -q\circ p(v)-q(v) & = & 0_E\ . \end{array}\right.$$

En additionnant, on obtient :

$$p(v)-q(v)=0_E\ . \tag{2}$$

Dès lors, on additionant et en soustrayant (1) et (2), il vient :

$$p(v)=q(v)=0_E.$$

La réciproque est immédiate.

(f) Si 2 est une valeur propre de f, il existe un $v \in E\setminus\{0_E\}$ tel que

$$p(v)+q(v)=2v\ .$$

En composant par p et par q, on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} p(v)+p\circ q(v) & = & 2p(v) \\ q\circ p(v)+q(v) & = & 2q(v)\ . \end{array}\right.$$

En additionnant, on obtient :

$$p\circ q(v)+q\circ p(v)=p(v)+q(v)=2v.$$

Comme $p\circ q=q\circ p$ on a

$$p\circ q(v)=v \quad \text{et} \quad q\circ p(v)=v\ .$$

Ainsi $v\in \mathrm{Im}(p)\cap\mathrm{Im}(q)$.

Réciproquement, s'il existe $v\in(\mathrm{Im}(p)\cap\mathrm{Im}(q))\setminus\{0_E\}$, alors il existe x et y tels que

$$p(x)=v \quad \text{et} \quad q(y)=v\ .$$

En composant par p on obtient

$$p(x)=p(v)=p\circ q(y)\ .$$

Et en composant par q on obtient

$$q\circ p(x)=q(v)=q(y)\ .$$

D'où finalement

$$p(v)+q(v)=p(x)+q(y)=2v\ .$$

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 1 : Deuxième partie – Exercice sans préparation - corrigé,

1. — On modélise X comme une variable suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{3^k}{k!}\mathrm{e}^{-3}, \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}.$$

— De même, $Y \sim \mathcal{P}(1)$:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{1^k}{k!}\mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}.$$

2. Comme X et Y sont indépendantes, $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $3+1 = 4$:

$$X + Y \sim \mathcal{P}(4), \quad \text{donc } \mathbb{P}(X+Y = k) = \frac{4^k}{k!}\mathrm{e}^{-4}.$$

3. On a

$$\mathbb{P}(X+Y = 0) = \mathrm{e}^{-4}.$$

4.
5. Par union disjointe, on a pour tout $k \geq 5$

$$\mathbb{P}(W = k) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{5} \mathbb{P}(Z = j) & \text{si } k = 5 \\ \mathbb{P}(Z = k) & \text{si } k > 5\ . \end{cases}$$

Comme $Z \sim \mathcal{P}(5)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W) &= \sum_{k=5}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(Z = k) + 5 \cdot \mathbb{P}(Z < 5) \\ &= \mathbb{E}(Z) - \sum_{k=0}^{5} k\frac{5^k}{k!}\mathrm{e}^{-5} + 5\sum_{k=0}^{5} \frac{5^k}{k!}\mathrm{e}^{-5} \\ &= 5 + \sum_{k=0}^{5} (5-k)\frac{5^k}{k!}\mathrm{e}^{-5} \end{aligned}$$

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 2 : Première partie – Problème avec préparation - corrigé,

1. (a) On a :
$$\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(N_1)=\frac{1}{N}\,.$$
De même
$$\mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}(B_1\cap N_2)=\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(N_2|B_1)=\frac{N-1}{N}\frac{1}{N-1}=\frac{1}{N}\,.$$
Et
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=3)&=\mathbb{P}(B_1\cap B_2\cap N_3)=\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_3|B_1\cap B_2)\\&=\frac{N-1}{N}\frac{N-2}{N-1}\frac{1}{N-2}=\frac{1}{N}\,.\end{aligned}$$
(b) On a $X(\Omega)=[\![1,N]\!]$ et pour tout $k\in[\![2,N]\!]$,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k)&=P(B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}\cap N_k)\\&=\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1)\ldots\mathbb{P}(N_k|B_1\cap\cdots\cap B_{k-1})\\&=\frac{N-1}{N}\frac{N-2}{N-1}\cdots\frac{1}{N-(k-1)}\\&=\frac{1}{N}\,.\end{aligned}$$
Donc $X\hookrightarrow\mathcal{U}([\![1,N]\!])$.
(c) Comme $\mathbb{E}(X)=(N+1)/2$, le nombre moyen de tirage nécessaires à l'obtention d'une boule noire est $(N+1)/2$.

2. (a) Soit $j\in[\![1,N]\!]$. Si l'événement C_1 est réalisé, on effectue les tirages dans l'urne U_1 qui contient une boule noire. Donc nous sommes ramenés à l'expérience de la partie précédente. Ainsi
$$\forall j\in[\![1,N]\!],\qquad \mathbb{P}(Y=j|C_1)=\mathbb{P}(X=j)=\frac{1}{N}\,.$$
(b) Lorsqu'on effectue des tirages dans l'urne U_2 qui ne contient que des boules blanches, on est sûr d'être dans l'urne U_2 que lorsque toutes les boules ont été tirées. D'où
$$\mathbb{P}(Y=j|C_2)=0\quad\text{si}\quad 1\leqslant j\leqslant N-1\quad\text{et}\quad\mathbb{P}(Y=N|C_2)=1\,.$$

(c) (C_2, C_1) forme un système complet d'événement de probabilités non nulles. En appliquant la formule des probabilités totales à ce s.c.e, il vient

$$\mathbb{P}(Y = j) = \mathbb{P}(Y = j|C_1)\mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}(Y = j|C_2)\mathbb{P}(C_2) \ .$$

D'où :

- si $1 \leqslant j \leqslant N$,

$$\mathbb{P}(Y = j) = \mathbb{P}(Y = j|C_1)\mathbb{P}(C_1) + 0 = \frac{1}{N}.\frac{1}{2} \ .$$

- si $j = N$,

$$\mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{N}.\frac{1}{2} + 1.\frac{1}{2} \ .$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(Y = j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N} & \text{si} \quad j \in [\![1, N-1]\!] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2N} & \text{si} \quad j = N \ . \end{cases}$$

(d) Le support de Y est fini, d'où $\mathbb{E}(Y)$ existe et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{j=1}^{N} j\mathbb{P}(Y = j) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} j\mathbb{P}(Y = j) + N\mathbb{P}(Y = N) \\ &= \frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{N-1} j + \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{N(N-1)}{2}\frac{1}{2N} + \frac{N}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3N+1}{4} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{E}(N) = (3N + 1)/4$.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 2 : Deuxième partie – Exercice sans préparation - corrigé,

1. La fonction
$$x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)^n}$$
est continue sur $[0,1]$ en tant qu'inverse d'une fonction polynomiale continue qui ne s'annue pas sur l'intervalle $[0,1]$ car
$$(x^2+1)^n \geq 1 > 0\ .$$
Par continuité de l'intégrand sur $[0,1]$ l'intégrale est bien définie.

2. Comme u et v sont de classe $\mathcal{C}^1([0,1])$, une intégration par parties donne, en posant $u(x) = (x^2+1)^{-n}$ et $v'(x) = 1$,
$$I_n = \left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_0^1 + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}x.$$
Or,
$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}x = I_n - I_{n+1}.$$
Regroupant les termes, on trouve, pour $n > 0$
$$2nI_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{1}{2^n} \iff I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}.$$

3. Sachant que
$$I_1 = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4},$$
on trouve
$$I_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \text{ et } I_3 = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}.$$

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 3 : Première partie – Problème avec préparation - corrigé,

1. Le joueur gagne la valeur X si X est pair, et perd la valeur X si X est impair. Donc :
$$G = (-1)^X X.$$

2. (a) Si $n = 2l$ est pair : il y a n boules paires dont $n-1$ font gagner (0 est pair mais ne fait ni gagner ni perdre) et n boules impaires qui font perdre. Donc le joueur a plus de chance de perdre que de gagner.

   Si $n = 2l+1$ est impair : il y a $n+1$ boules paires dont n font gagner et n boules impaires qui font perdre. Donc le joueur a autant de chance de gagner que de perdre.

   Donc le joueur a plus de chance de perdre que de gagner.

   (b) G admet une espérance car c'est une variable aléatoire de support de cardinal fini. On a :
$$\mathbb{E}(G) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k.$$

   (c) Par regroupements deux à deux, on a
$$\begin{cases} \mathbb{E}(G) = 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \mathbb{E}(G) = -(l+1) & \text{si } n = 2l+1 \text{ est impair,} \end{cases}$$

3. (a) On a :
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

   (b) Comme $G = (-1)^X X$, G admet une espérance. On a, en utilisant la question précédente :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= n(1-p)^n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{-p}{1-p}\right)^k \\ &= n(1-p)^n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{k+1}. \end{aligned}$$

   Ce qui donne le résultat avec $\lambda = n$.

(c) Par la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^L = \sum_{k=0}^{L} \binom{L}{k} a^k b^{n-L}$$

appliquée à $a = p/(p-1)$, $b = 1$ et $L = n-1$ on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{p}{p-1}\right)^k = \left(1 + \frac{p}{p-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{2p-1}{p-1}\right)^{n-1} .$$

Donc

$$\mathbb{E}(G) = -np(1-p)^{n-1} \left(\frac{2p-1}{p-1}\right)^{n-1} = -np(1-p)^{n-1} \left(\frac{1-2p}{1-p}\right)^{n-1} = -np(1-2p)^{n-1} .$$

(d) Le jeu est favorable au joueur si et seulement si le gain est strictement positif, soit si et seulement si $(1-2p)^{n-1} > 0$. Donc le jeu est favorable au jouer si et seulement si $p > 1/2$ et n pair.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 3 : Deuxième partie – Exercice sans préparation - corrigé,

1. La fonction $(x,y) \to y$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $y \to y^2+1$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Donc $(x,y) \to y^2+1$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme composée. De plus $(x,y) \to x$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Donc $(x,y) \to x\,(y^2+1)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme produit. Donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme composée et produit.
2. (a) On a
$$\begin{aligned}\partial_x f\,(x,y) &= [1 + x\left(y^2+1\right)]\mathrm{e}^{x\left(y^2+1\right)}\\ \partial_y f\,(x,y) &= 2x^2y\mathrm{e}^{x\left(y^2+1\right)}\end{aligned}$$
   (b) Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, si f a un extremum local alors
$$\begin{cases}\partial_x f\,(x,y) = 0\\ \partial_y f\,(x,y) = 0\ .\end{cases}$$
   Autrement dit,
$$\begin{cases}2x^2y = 0\\ 1 + x\,(y^2+1) = 0\ .\end{cases}$$
   La première equation équivaut à $x=0$ ou $y=0$. Mais dans le cas $x=0$ la deuxième équation n'a pas de solution donc le seul point en lequel f peut présenter un extremum local est $A = (-1,0)$.
3. (a) On a
$$\begin{aligned}\partial^2_{x,x} f\,(x,y) &= [\left(y^2+1\right) + \left(x\left(y^2+1\right)+1\right)\left(y^2+1\right)]\mathrm{e}^{x\left(y^2+1\right)}\\ &= \left(y^2+1\right)\left(x\left(y^2+1\right)+2\right)\mathrm{e}^{x\left(y^2+1\right)}\\ \partial^2_{y,x} f\,(x,y) &= [4xy + 2x^2y(y^2+1)]\mathrm{e}^{x\left(y^2+1\right)}\\ &= 2xy[2 + x(y^2+1)]\mathrm{e}^{x\left(y^2+1\right)}\\ \partial^2_{y,y} f\,(x,y) &= [2x^2 + 2x^2y2x\,y]\mathrm{e}^{x\left(y^2+1\right)}\\ &= 2x^2\left(2x\,y^2+1\right)\mathrm{e}^{x\left(y^2+1\right)}\end{aligned}$$
   (b) On a alors au point $(-1,0)$:
$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) = \mathrm{e}^{-1},\quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1,0) = 0 \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,0) = 2\mathrm{e}^{-1}\ .$$
   Comme $r\,t - s^2 = 2\mathrm{e}^{-2} > 0$, sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, f admet un extremum local en $(-1,0)$.
   Et comme $r > 0$, c'est un minimum avec $f\,(-1,0) = -\mathrm{e}^{-1}$.

4. (a) On a
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) - x\mathrm{e}^x = x\left(\mathrm{e}^{x\left(y^2+1\right)} - \mathrm{e}^x\right) .$$
Comme $y^2 + 1 \geq 1$
- si $x \geq 0$, on a $x\left(y^2+1\right) \geq x$. Par croisance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$,
$$\mathrm{e}^{x\left(y^2+1\right)} \geq \mathrm{e}^x ,$$
et donc
$$x\left(\mathrm{e}^{x\left(y^2+1\right)} - \mathrm{e}^x\right) \geq 0 .$$
- si $x \leq 0$, on a $x\left(y^2+1\right) \leq x$, donc
$$\mathrm{e}^{x\left(y^2+1\right)} \leq \mathrm{e}^x$$
et donc
$$x\left(\mathrm{e}^{x\left(y^2+1\right)} - \mathrm{e}^x\right) \geq 0 .$$
Ainsi
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \geq x\mathrm{e}^x .$$

(b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = (x+1)\, e^x .$$
Donc g est décroissante sur $]-\infty, -1]$ et croissante sur $[-1, +\infty[$. Donc g admet sur $\mathbb{R}$ un minimum atteint en -1 qui vaut $-1/e$.

Donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \geq g(x) \geq g(-1) = -\mathrm{e}{-1}$.

Donc le minimum local est bien un minimum global de f.

(c) On a,
- pour tout $x \neq -1,\ g(x) > g(-1)$, donc si $x \neq -1,\ f(x,y) > -\mathrm{e}^{-1}$,
- pour $x = -1,\ f(-1,y) = -\mathrm{e}^{-\left(y^2+1\right)} > -\mathrm{e}^{-1}$ si $y \neq 0$

Donc le minimum de f est un minimum strict dans ces cas.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 4 : Première partie – Problème avec préparation - corrigé,

1. On a $X_0(\Omega) = \{1\}$ et $\mathbb{P}(X_0 = 1) = 1$ car il n'y a qu'une boule blanche dans l'urne avant le premier lancer.
2. On remarque tout d'abord que $X_1(\Omega) = [\![1, 2]\!]$.
   De plus, $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(B_1) = 1/2$ et $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(R_1) = 1/2$.
   Ainsi $X_1 \hookrightarrow U([\![1, 2]\!])$.
3. On remarque tout d'abord que $X_2(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.
   De plus,
   $$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(B_2|B_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$
   en utilisant la formule des probas composées avec $\mathbb{P}(B_1) \neq 0$.
   De même,
   $$\mathbb{P}(X_2 = 3) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(R_1)\,\mathbb{P}(R_2|R_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$
   Ainsi, comme la famille $([X_2 = 1], [X_2 = 2], [X_2 = 3])$ est un système complet d'événements, on en déduit que :
   $$\mathbb{P}(X_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 1) - \mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{2}{3}.$$
4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Au cours des k premiers tirages, on peut tirer $j \in [\![0, k]\!]$ boules rouges et donc rajouter dans l'urne j boules blanches pour avoir finalement $j + 1$ boules blanches avant le $k + 1$-ème tirage. Ainsi $X_k(\Omega) = [\![1, k + 1]\!]$.
5. (a) Entre les tirages k et $k + 1$, le nombre de boules blanches présentes dans l'urne peut rester le même ou augmenter de 1 .
   Ainsi, si $i \notin \{j, j + 1\}$,
   $$\mathbb{P}(X_{k+1} = i|X_k = j) = 0.$$
   (b) On a
   $$\mathbb{P}(X_{k+1} = j|X_k = j) = \mathbb{P}(B_{k+1}|X_k = j) = \frac{j}{k + 2}.$$
   Et
   $$\mathbb{P}(X_{k+1} = j + 1|X_k = j) = \mathbb{P}(R_{k+1}|X_k = j) = \frac{k + 2 - j}{k + 2}.$$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![1, k+2]\!]$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements. $\{[X_k = j]\}_{j \in [[\![1,k+1]\!]]}$ de probabilités non nulles, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{k+1} = i) &= \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{P}(X_k = j)\, \mathbb{P}(X_{k+1} = i | X_k = j) \\
&= \mathbb{P}(X_k = i)\, \mathbb{P}(X_{k+1} = i | X_k = i) + \mathbb{P}(X_k = i-1)\, \mathbb{P}(X_{k+1} = i | X_k = i-1) \\
&= \mathbb{P}(X_k = i)\, \frac{i}{k+2} + \mathbb{P}(X_k = i-1)\, \frac{3+k-i}{k+2}.
\end{aligned}$$

6. D'après la relation de la question précédente,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = 1) &= \frac{1}{3} \cdot \mathbb{P}(X_1 = 1) + 1 \cdot \mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \\
\mathbb{P}(X_2 = 2) &= \frac{2}{3} \cdot \mathbb{P}(X_1 = 2) + \frac{2}{3} \cdot \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \\
\mathbb{P}(X_2 = 3) &= 1 \cdot \mathbb{P}(X_1 = 3) + \frac{1}{3} \cdot \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

On retrouve donc bien la loi de X_2 déterminer à la question 1.(b).

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n$^\text{o}$ 4 : Deuxième partie – Exercice sans préparation - corrigé,

1. La suite u_n est bien définie car c'est une série finie de terme général toujours bien défini. De plus par positivité de $1/\sqrt{k}$, chaque terme ajouté à u_n est positif :
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > u_n,$$
donc la suite est strictement croissante.
2. Soient a et b deux réels tels que avec $a < b$. On considère $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, . On supose qu'il existe $m < M$ tels que :
$$\forall t \in]a, b[, \quad m \leq f'(t) \leq M \, .$$
On a
$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M \, .$$
3. On déduit de l'inégalité des accroissement finis :
$$\min_{[a,b]} f' \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \max_{[a,b]} f'.$$
On applique cette inégalité à la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, dérivable sur $[k, k+1]$ avec $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Ainsi :
$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$
4. En sommant le membre droite de l'inégalité entre 1 et n :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - 1.$$
5. En sommant le membre de gauche entre 1 et $n-1$ on obtient
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1 \leq 2\sqrt{n} \, .$$

6. On encadre :
$$2\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\leq\frac{u_n}{\sqrt{n}}\leq 2,$$
d'où
$$2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\leq\frac{u_n}{\sqrt{n}}\leq 2\ .$$
Par le théorème d'encadrement :
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{\sqrt{n}}=2\ .$$

7. La suite est croissante non-majorée donc
$$\lim_n u_n=\infty\ .$$

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 5 : Première partie – Problème avec préparation - corrigé,

1. Soit $n \in N$. Comme la fonction sinus est strictement positive sur l'intervalle $[\pi/6, \pi/2]$, la fonction $(x \longmapsto (\cos(x))^n/\sin(x))$ est continue (et positive) sur $[\pi/6, \pi/2]$ et $u_n \in \mathbb{R}$.
2. On a :
$$u_1 = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \mathrm{d}x = [\ln|\sin(x)|]_{\pi/6}^{\pi/2} = 0 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2).$$
3. La fonction $(x \mapsto (1-\cos(x))/\sin(x))$ est dérivable sur $[\pi/6, \pi/2]$ et strictement positive car :
$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \cos(x) \leq \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
d'où :
$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right], \quad 1 - \cos(x) \geq 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} > 0.$$
Le logarithme népérien étant dérivable sur $]0, +\infty[$, on déduit que la fonction est dérivable sur $[\pi/6, \pi/2]$ et sa fonction dérivée est définie par :
$$\Phi'(x) = -\frac{\left(\frac{(\cos(x)-1)\cos(x)}{\sin(x)^2} + 1\right)\sin(x)}{\cos(x) - 1} = \frac{1}{\sin(x)}.$$
4. En utilisant la question précédente, On a :
$$u_0 = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)} \mathrm{d}x = -\ln\left(2 - \sqrt{3}\right) > 0.$$
5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de l'intégrale, on a :
$$0 \leq u_n \leq \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)} \left(\max_{x \in [\pi/6, \pi/2]} \cos(x)\right)^n \mathrm{d}x \leq -\ln\left(2 - \sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$
   (b) Comme $0 < \sqrt{3}/2 < 1$, par passage à la limite dans l'encadrement précédent, on obtient $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
   (c) Comme $\sqrt{3}/2$ est dans $]-1, 1[$, la série converge. Par critère de comparaison des séries positives la série de terme général u_n converge aussi.
6. On a :
$$u_n - u_{n+2} = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{(\cos(x))^n(1 - (\cos(x))^2)}{\sin(x)} \mathrm{d}x = \int_{\pi/6}^{\pi/2} (\cos(x))^n \sin(x) \mathrm{d}x.$$
En faisant le changement de variables dérivable et strictement décroissant $y = \cos(x)$, on obtient :
$$u_n - u_{n+2} = \int_0^{\sqrt{3}/2} y^n \mathrm{d}y = \left[\frac{1}{n+1} y^{n+1}\right]_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}.$$

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 5 : Deuxième partie – Exercice sans préparation - corrigé,

1. Le support de X_0 est $\{0\}$ et $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$.
2. La variable aléatoire X_1 peut prendre les valeurs 0 et 1, car le mobile au temps 0 est au point 0 et peut rester à l'instant 1 au point d'abscisse 0 avec proba p ou retourner en 0 avec proba $1-p$. D'où $X_1(\Omega) = \{0,1\}$ avec $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1-p$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(n) : X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
   - D'après la question 1, $X_0(\Omega) = \{0\}$. D'où $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, le mobile à l'instant n peut se trouver au point d'abscisse k où $\in [\![0, n]\!]$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, si le mobile se trouve à l'instant n au point d'abscisse k, il se trouvera ensuite à l'instant $n+1$ au point d'abscisse 0 ou au point d'abscisse $k+1$. Au final, le mobile à l'instant $n+1$ peut se trouver au point d'abscisse k où $\in [\![0, n+1]\!]$. D'où, $X_{n+1}(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Par le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
4. Le mobile se trouve en k en $n+1$ s'il était en $k-1$ à l'instant n et il a avancé de 1. Donc
$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = k\right) = p\mathbb{P}\left(X_n = k-1\right) .$$
5. On note $m_n = \mathbb{E}[X_n]$. Alors :
$$\begin{aligned} m_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} k\,\mathbb{P}(X_{n+1} = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} kp\,\mathbb{P}(X_n = k-1) \\ &= p\sum_{j=0}^{n} (j+1)\,\mathbb{P}(X_n = j) \\ &= pm_n + p = p(1+m_n) . \end{aligned}$$
   On a donc la relation de récurrence :
$$m_{n+1} = p(m_n + 1), \quad m_0 = 0.$$
   D'où
$$m_n = \frac{p(1-p^n)}{1-p} .$$
   Finalement :
$$\mathbb{E}[X_n] = \frac{p(1-p^n)}{1-p}.$$

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 6 : Première partie – Problème avec préparation - corrigé,

1. (a) La probabilté de $(E_{i+1} \mid \overline{E_i})$ est égal à la probabilité que $(i+1)$-ème tirage est fait avec la pièce A sachant que le i-ème tirage est fait avec la pièce B. Si le tirage $i+1$-ème est fait avec la pièce A alors que le précédent a été fait avec la pièce B, cela siginifie que la pièce B a donné un face. Donc :

$$\mathbb{P}(E_{i+1} \mid \overline{E_i}) = \mathbb{P}(\text{le } i\text{-éme lancer avec } B \text{ a donné face}) = 1-q.$$

(b) On utilise la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(E_{i+1}) = \mathbb{P}(E_i)\mathbb{P}(E_{i+1} \mid E_i) + \mathbb{P}(\overline{E_i})\mathbb{P}(E_{i+1} \mid \overline{E_i}).$$

Or, si on a utilisé A au i-ième lancer :

$$\mathbb{P}(E_{i+1} \mid E_i) = \mathbb{P}(\text{le } i\text{-éme lancer avec } A \text{ a donné pile}) = p.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_{i+1}) &= \mathbb{P}(E_i)p + (1-\mathbb{P}(E_i))(1-q) \\ &= (p+q-1)\mathbb{P}(E_i) + (1-q).\end{aligned}$$

(c) On a vu que :

$$\mathbb{P}(E_{i+1}) = (p+q-1)\mathbb{P}(E_i) + (1-q).$$

Donc :

$$\begin{aligned}u_{i+1} &= \mathbb{P}(E_{i+1}) - \frac{1-q}{2-p-q} \\ &= (p+q-1)\mathbb{P}(E_i) + (1-q) - \frac{1-q}{2-p-q} \\ &= (p+q-1)u_i + (p+q-1)\frac{1-q}{2-p-q} + (1-q) - \frac{1-q}{2-p-q} \\ &= (p+q-1)u_i + (p+q-1) + \frac{1-q}{2-p-q}(p+q-1+2-p-q-1) \\ &= (p+q-1)u_i\end{aligned}$$

Donc $(u_i)_i$ est une suite géométrique de raison $p+q-1$.

(d) Comme E_1 vaut 1 avec proba 1/2 on a

$$u_1 = \mathbb{P}(E_1) - \frac{1-q}{2-p-q} = \frac{1}{2} - \frac{1-q}{2-p-q} = \frac{q-p}{2(2-p-q)} \ .$$

Donc

$$u_i = u_1(p+q-1)^{i-1} = \frac{q-p}{2(2-p-q)}(p+q-1)^{i-1} \ .$$

D'où

$$\mathbb{P}(E_i) = u_i + \frac{1-q}{2-p-q} = \frac{q-p}{2(2-p-q)}(p+q-1)^{i-1} + \frac{1-q}{2-p-q}.$$

2. (a) On a :

$$\mathbb{P}(G_i) = \mathbb{P}(E_i) \cdot p + (1 - \mathbb{P}(E_i)) \cdot q.$$

(b) On remplace avec l'expression de $\mathbb{P}(E_i)$:

$$\mathbb{P}(G_i) = \left(\frac{q-p}{2(2-p-q)}(p+q-1)^{i-1} + \frac{1-q}{2-p-q}\right) p \\ + \left(1 - \frac{q-p}{2(2-p-q)}(p+q-1)^{i-1} - \frac{1-q}{2-p-q}\right) q$$

En simplifiant, on trouve :

$$\mathbb{P}(G_i) = -\frac{(q-p)^2}{2(2-p-q)}(p+q-1)^{i-1} + \frac{p+q-2pq}{2-p-q}.$$

3. On veut :

$$\mathbb{P}(E_i \mid G_i) = \frac{\mathbb{P}(E_i \cap G_i)}{\mathbb{P}(G_i)} = \frac{p}{\mathbb{P}(G_i)}.$$

4. On a :

$$\lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(G_i) = \lim_{i\to\infty} -\frac{(q-p)^2}{2(2-p-q)}(p+q-1)^{i-1} + \frac{p+q-2pq}{2-p-q} = \frac{p+q-2pq}{2-p-q}$$

car $p \in]0,1[$ et $q \in]0,1[$ implique $|p+q-1| < 1$.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 6 : Deuxième partie – Exercice sans préparation - corrigé,

1. Un polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$ et par linéarité de la dérivée D est une application linéaire. De plus la dérivée d'un polynôme de degré au plus n est un polynômede degré au plus $n-1$ donc D est un endomorphisme.
2. On a $D^0 = I_{n+1}$ et si on suppose que $D^k(P) = P^{(k)}$ à un certain rang $k \in \mathbb{N}$, alors
$$D^{k+1}(P) = D(D^k(P)) = (P^{(k)})' = P^{(k+1)} .$$
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^k(P) = P^{(k)}$.
3. À chaque itération de D on diminue le degré du polynôme d'une unité. Donc si $\deg(P) \leq n$, nécessairement $P^{(n+1)}$ est le polynôme nul, donc D est nilpotent d'indice $n+1$.
4. La matrice canonique de D est la matrice d'ordre $n+1$ suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & \\ 0 & & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} .$$
5. En mulitpliant à gauche ou à droite par $I_{n+1} - A$, on obtient :
$$(I_{n+1} - A)(I_{n+1} + A + \ldots + A^n) = I_{n+1} - A^{n+1} = I_{n+1},$$
d'où la conclusion.
6. Considérons
$$P(x) = \sum_{i=0}^{2} a_i x^i .$$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a d'une part :
$$P(x+1) = a_0 + a_1 + a_2 + x(a_1 + 2a_2) + a_2 x^2 .$$
On a d'autre part
$$\Delta(P)(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} D^k(P)(x) = a_0 + a_1 + a_2 + x(a_1 + 2a_2) + a_2 x^2 .$$

Toulouse School of Economics

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 7 : Première partie – Problème avec préparation - corrigé,

1. Puisque la fonction $t \mapsto 1/t$ est décroissante et continue sur $[k, k+1]$, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq (k+1-k)\frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq (k-k+1)\frac{1}{k}\ .$$

2. Sommons l'inégalité de gauche pour $k = 1, \ldots, n$. On obtient, avec la relation de Chasles,

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq H_n \implies \ln(n+1) \leq H_n.$$

3. Si on somme l'inégalité de droite pour $k = 2, \ldots, n$, on trouve

$$H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(n).$$

4. Donc H_n est équivalent à $\ln(n)$.
5. En utilisant le développement limité $\ln(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$ au voisinage de 0, on trouve

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi,

$$u_n \sim_{+\infty} -\frac{1}{2n^2} \leq 0.$$

Par comparaison à une série de Riemann, $\sum_n u_n$ converge.

6. De même, on prouve que

$$v_n \sim_{+\infty} \frac{1}{2n^2}$$

ce qui prouve pour la même raison la convergence de $\sum_n v_n$.

7. On a

$$\begin{aligned} f_n - f_{n-1} &= \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= u_n. \end{aligned}$$

8. On a
$$\sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=2}^{n} (f_k - f_{k-1}) = f_n - f_1 \ .$$
Or, $u_1 = f_1 = 1$. On a donc
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = f_n \ .$$
Donc $(f_n)_n$ est la suite des sommes partielles de la série convergente de terme général u_n. Ce qui implique que $(f_n)_n$ converge vers γ.
9. De $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \geq -1$, on déduit que
$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n}$$
d'où l'on tire pour $n \geq 2$
$$u_n \leq 0.$$
On a trivialement $u_1 = 1 > 0$.
10. De même,
$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \ .$$
Donc $v_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.
11. Par téléscopage on obtient le résultat.
12. Par les résultat précédents (S_n) est décroissante, car pour tout $n \geq 2$ $u_n < 0$. de même (T_n) est croissante car $v_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$. De plus on a
$$\begin{aligned} S_N - T_N &= u_1 - v_1 + \sum_{n=2}^{N} (u_n - v_n) \\ &= \ln(2) + \sum_{n=2}^{N} \big(\ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln(n) \big) \end{aligned}$$
en utilisant les propriétés fonctionnelles du logarithme. Ainsi, par la question précédente,
$$S_N - T_N = \ln(N+1) - \ln(N) = \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) \ .$$
e membre de droite tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. Les suites $(S_N)_n$ et $(T_N)_n$ sont donc adjacentes, de limite γ.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 7 : Deuxième partie – Exercice sans préparation - corrigé,

1. Sachant que P_1 est réalisé, l'évènement $(X = k)$ est réalisé si et seulement si $P_2P_3 \dots P_{k-1}F_k$ se réalise. Comme les lancers se font de manière indépendante, on a

$$\mathbb{P}(X = k|P_1) = \mathbb{P}(P_2P_3 \dots P_{k-1}F_k|P_1) = \frac{1}{2^{k-1}} \; .$$

2. Sachant que F_1 est réalisé, l'évènement $(X = k)$ est réalisé si et seulement si on obtient le premier pile-face au bout de $k - 2 + 1 = k - 1$ lancers. D'où

$$\mathbb{P}(X = k|F_1) = \mathbb{P}(X = k - 1) \; .$$

3. Soit $k \geq 3$. En appliquant la formule des probabilités totales, avec (P_1, F_1) système complet d'évènements, on obtient pour tout $k \geq 3$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(P_1)\,\mathbb{P}(X = k|P_1) + \mathbb{P}(F_1)\,\mathbb{P}(X = k|F_1) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X = k - 1) \\ &= \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X = k - 1) \; . \end{aligned}$$

4. Soit $k \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2^{k+1}\mathbb{P}(X = k + 1) \\ &= 2^{k+1}\left(\frac{1}{2^{k+1} + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X = k)}\right) \quad \text{car } k + 1 \geq 3 \\ &= 2^k\mathbb{P}(X = k) + 1 \\ &= u_k + 1 \; . \end{aligned}$$

Donc la suite $(u_k)_k$ est arithmétique de raison 1. Le premier terme de cette suite est

$$u_2 = 4\mathbb{P}(X = 2) = 4\frac{1}{4} = 1 \; .$$

Ainsi pour tout $k \geq 2$

$$u_k = 1 + (k - 2) = k - 1 \; .$$

5. Donc pour tout $k \geq 2$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{u_k}{2^k} = (k - 1)\,2^{-k} \; .$$

6. On a
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$
En dérivant on obtient la formule :
$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \quad \text{pour } 0 < q < 1.$$
D'où le résultat annoncé en multipliant par q les deux membres de l'égalité.

   En dérivant une seconde fois on obtient
$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}\ .$$
On obtient le résultat en multipliant par q^2 les deux membres de l'égalité.

7. Comme $X(\Omega) = \{0\} \cup \{k \in \mathbb{N},\ k \geq 2\}$, $\mathbb{E}(X)$ existe si et seulement si $\sum_{k\geq 2} k\mathbb{P}(X = k)$ converge, puisque la série et à termes positifs.

   Soit $n \geq 2$. On pose
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} k\mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=2}^{n} k\,(k-1)\,2^{-k} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n} k\,(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}\ . \end{aligned}$$
D'après la question précédente la série converge absolument vers
$$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} k\,(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 4\ .$$
   Ainsi
$$\sum_{k\geq 2} k\mathbb{P}(X = k) = 4\ .$$
   Conclusion : $\mathbb{E}(X)$ existe et vaut 4.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 8 : Première partie – Problème avec préparation - corrigé,

1. φ est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si $M, M' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a par la linéarité de la trace :

$$\begin{aligned} \varphi(M + \lambda \cdot M') &= \mathrm{Tr}(U(M + \lambda \cdot M')) \cdot U \\ &= \mathrm{Tr}(UM + \lambda \cdot UM') \cdot U \\ &= (\mathrm{Tr}(UM) + \lambda \mathrm{Tr}(UM')) \cdot U \\ &= \mathrm{Tr}(UM) \cdot U + \lambda \mathrm{Tr}(UM') \cdot U \\ &= \varphi(M) + \lambda \cdot \varphi(M'). \end{aligned}$$

2. En particulier pour $M = U$, on obtient :

$$\varphi(U) = \mathrm{Tr}(U^2) \cdot U = \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot U = 4U.$$

3. L'inclusion $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Vect}(U)$ découle de la définition de φ. De plus, comme vu précédemment, on a $U \in \mathrm{Im}(\varphi)$ et finalement cette inclusion est une égalité.
4. D'après le théorème du rang, comme φ est linéaire et $\dim(\mathcal{M}_2)(\mathbb{R}) < +\infty$ on a :

$$\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - \mathrm{rg}(\varphi) = 4 - 1 = 3\ .$$

5. (a) Comme $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{0_{2\times 2}\}$, 0 est bien une valeur propre de φ.
   (b) On a $\dim E_0 = 3$.
   (c) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Comme $U \neq 0$ on a :

$$\varphi(M) = 0_{2\times 2} \iff \mathrm{Tr}(UM) = 0 \iff \sum_{1 \leq i,j \leq 2} M_{i,j} = 0$$

   Cette famille est génératrice de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Or il est facile de voir que la famille à 3 éléments suivante est libre :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de φ. Il existe donc $M \neq 0_{n\times n}$ telle que : $\varphi(M) = \lambda \cdot M$. Par définition donc une telle matrice M appartient à $\mathrm{Im}(\varphi)$.
7. (a) D'après la question 2, comme U est non-nulle, 4 est une valeur propre de φ. Comme E_0 est de dimension 3, l'espace propre E_4 est nécessairement de dimension un et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = E_0 \oplus E_4$. Autrement dit, φ est diagonalisbale dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de φ est contituée des matrices de la question 5. c) et de U. La matrice de φ dans cette nouvelle base est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

Toulouse School of Economics

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 8 : Deuxième partie – Exercice sans préparation - corrigé,

1. On reconnaît le développement de Newton pour $(x+(1-x))^n = 1^n = 1$, donc :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1 \, .$$
2. On remarque que, pour $1 \leq k \leq n$,
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \, .$$
Donc :
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \, .$$
Posons $j = k-1$, on a :
$$= nx \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = nx \, .$$
(car la somme vaut 1 comme au point 1 avec $n-1$).
3. Pour $k \geq 2$ on a :
$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2} \, .$$
Donc
$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} \, .$$
Posons $j = k-2$, on a :
$$= n(n-1)x^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^j (1-x)^{(n-2)-j} = n(n-1)x^2 \, .$$
4. On développe le carré :
$$\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(x^2 - \frac{2kx}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \, .$$
On scinde en trois termes :

-

$$\sum x^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x^2$$

-

$$\sum 2kx \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 2x \cdot nx = 2nx^2$$

-

$$\sum k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Finalement :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} .$$

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 9 : Première partie – Problème avec préparation - corrigé,

1. (a) Soient P et Q dans $\mathbb{R}_n[x]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale

$$\varphi(P+\lambda Q)(x) = \frac{1}{4}\int_{x-2}^{x+2}(P(t)+\lambda Q(t))\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left(\int_{x-2}^{x+2}P(t)\mathrm{d}t + \lambda\int_{x-2}^{x+2}Q(t)\mathrm{d}t\right)$$
$$= \varphi(P)(x) + \lambda\varphi(Q)(x),$$

donc φ est linéaire.

(b) Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. On a

$$\varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\left[t^{k+1}\right]_{x-2}^{x+2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\left[(x+2)^{k+1} - (x-2)^{k+1}\right] .$$

Par la formule du binôme de Newton :

$$(x+2)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}x^j 2^{k+1-j} \quad \text{et} \quad (x-2)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}x^j(-2)^{k+1-j} .$$

Donc $\varphi(P)$ est un polynôme de degré au plus $n+1$ dont le coefficient dominant est

$$a_n\left[\binom{n+1}{n+1}2^0 - \binom{n+1}{n+1}(-2)^0\right] = 0 .$$

Donc $\varphi(P)$ est de degré au plus n et donc dans $\mathbb{R}_n[x]$.

2. On calcule :

$$\varphi(\mathbb{1})(x) = \frac{1}{4}\int_{x-2}^{x+2} 1\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\cdot(x+2-(x-2)) = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1.$$

Donc $\varphi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$.

$$\varphi(X)(x) = \frac{1}{4}\int_{x-2}^{x+2} t\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{t^2}{2}\right]_{x-2}^{x+2} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{(x+2)^2-(x-2)^2}{2}\right) = x$$

Donc $\varphi(X) = X$. On calcule :

$$\varphi(X^2)(x) = \frac{1}{4}\int_{x-2}^{x+2} t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{t^3}{3}\right]_{x-2}^{x+2} = \frac{1}{4}(12x^2+16)\ .$$

Donc :

$$\varphi(X^2)(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{12x^2+16}{3} = x^2+\frac{4}{3}.$$

De plus

$$\begin{aligned}\varphi(X^3)(x) = \frac{1}{4}\int_{x-2}^{x+2} t^3 \mathrm{d}t &= \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{t^4}{4}\right]_{x-2}^{x+2}\\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{(x+2)^4-(x-2)^4}{4}\\ &= \frac{1}{16}\cdot\left[(x^4+8x^3+24x^2+32x+16)-(x^4-8x^3+24x^2-32x+16)\right]\\ &= x^3+4x.\end{aligned}$$

On en déduit la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\ .$$

3. (a) Soit pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

un polynôme de $\mathbb{R}_k[X]$. On a

$$\varphi(P) = \sum_{j=0}^{k}\frac{a_j}{j+1}\left[t^{j+1}\right]_{x-2}^{x+2} = \sum_{j=0}^{k}\frac{a_j}{j+1}\left[(x+2)^{j+1}-(x-2)^{j+1}\right]\ .$$

Donc $\varphi(P)$ est un polynôme de degré au plus $k+1$ dont le coefficient dominant est

$$a_k\left[\binom{k+1}{k+1}2^0-\binom{k+1}{k+1}(-2)^0\right] = 0\ .$$

Donc $\varphi(P)$ est de degré au plus k. Donc la représentation matricielle de φ est triangulaire supérieure.

(b) En reprenant la formule ci-dessus le coefficient de degré k a pour coefficient

$$\frac{1}{4(k+1)}\left[\binom{k+1}{k}2-\binom{k+1}{k}(-2)\right] = 1\ .$$

La représentation matricielle de φ est telle que tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1. Donc le spectre est réduit à 1.

(c)

(d) Si A_n était diagonalisable il existerait une matrice inversible P telle que $A_n = PIP^{-1} = I_n$ ce qui est un contradiction donc A_n n'est pas diagonalisable.

(e) Si P est de degré 2 de la forme

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ ,$$

avec $a_2 \neq 0$. Alors on a

$$\varphi(P) = a_0 + a_1 x + a_2 \left(x^2 + \frac{4}{3} \right)$$

donc $\varphi(P) = P$ si et seulement si

$$a_0 + \frac{4}{3} a_2 = a_0 \Leftrightarrow a_2 = 0$$

(f) Soit P un vecteur propre : $\varphi(P) = P$. En dérivant les deux membres de l'inégalité on obtient $\varphi(P)' = P'$. Or comme $x \mapsto x+2$ et $x \mapsto x-2$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, par le théorème fondamental du calcul intégral et par dérivation composée on a

$$\varphi(P)'(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(P(x+2) - P(x-2) \right),$$

tandis que :

$$\varphi(P')(x) = \frac{1}{4} \int_{x-2}^{x+2} P'(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{4} \cdot \left(P(x+2) - P(x-2) \right).$$

Donc $P' = \varphi(P)' = \varphi(P')$ ce qui prouve que P' est aussi vecteur propre si $P' \neq 0$.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 9 : Deuxième partie – Exercice sans préparation - corrigé,

Notons B_k l'événement « la k-ème boule est blanche » et N_k l'événement « la k-ème boule est noire ».

1. Le support de X_1 est $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$, car lors du premier tirage on peut tirer une boule noire ($X_1 = 0$) ou une boule blanche ($X_1 = 1$). De plus on a $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/2$ et $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/2$. D'où $X_1 \hookrightarrow U([\![0, 1]\!])$.
2. Le support de X_2 est $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, car lors des deux premiers tirages il est possible d'obtenir deux boules noires ou une boule noire et une boule blanche ou deux boules blanches. Déterminons $\mathbb{P}(X_2 = 0)$. On a :

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}(N_2|N_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \,.$$

   De même :

$$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

   Et :

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 0) - \mathbb{P}(X_2 = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

   D'où $X_2 \hookrightarrow U([\![0, 2]\!])$.
3. On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow U([\![0, n]\!])$.
4. Montrons par récurrence la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $\mathcal{P}(n)$:

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1} \,.$$

   - Initialisation : $X_1 \hookrightarrow U([\![0, 1]\!])$ d'après la q.1.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est à dire

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1} \,.$$

   Montrons que

$$\forall k \in [\![0, n+1]\!], \qquad \mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+2} \,.$$

Soit $k \in [\![0, n+1]\!]$. Étant donné que d'un tirage à l'autre le nombre de boules blanches tirées au total ne peut qu'augmenter de 0 (si on tire une noire) ou de 1 (si on tire une blanche), on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = k) &= \mathbb{P}(N_{n+1}|X_n = k)\mathbb{P}(X_n = k) + \mathbb{P}(B_{n+1}|X_n = k-1)\mathbb{P}(X_n = k-1)\\ &= \frac{(n+2)-(k+1)}{n+2}\frac{1}{n+1} + \frac{(k-1)+1}{n+2}\frac{1}{n+1}\\ &= \frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

D'où $X_{n+1} \hookrightarrow U([\![0, n+1]\!])$.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \hookrightarrow U([\![0, n]\!])$

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 10 : Première partie – Problème avec préparation - corrigé,

1. $\mathbb{P}(M_{0,0}) = 1$.
2. $\mathbb{P}(M_{n-1,t+1}|M_{n,t}) = \mathbb{P}(M_{n,t+1}|M_{n,t}) = \mathbb{P}(M_{n+1,t+1}|M_{n,t}) = 1/3$.
3. (a) La probabilité d'un déplacement vers la gauche à chaque seconde est $1/3$, les déplacements sont indépendants. Si B_i est l'événement « Le point se déplace vers la gauche après la i-ème seconde », on a $\mathbb{P}(B_i) = 1/3$ et les B_i sont indépendants. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(G_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{B_i} \cap B_n) = \mathbb{P}(B_n) \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(\overline{B_i}) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2^{n-1}}{3^n}.$$

   (b) Les événements G_n sont disjoints et deux à deux incompatibles, donc

$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} G_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(G_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1.$$

   Note : On peut aussi raisonner sur l'événement contraire, et introduire la suite décroissante des « pas de déplacement à gauche lors des n premières secondes ».

4. (a) $u_0 = 1$ (après 0 secondes, le point se trouve à l'origine qui est paire).
   (b) $\mathbb{P}(D_{n+1}|D_n) = 1/3$ (le point reste sur place).
   (c) $\mathbb{P}(D_{n+1}|\overline{D_n}) = 2/3$ (le point se déplace vers la gauche ou vers la droite).
   (d) D_n et son contraire forment un système complet d'événements, d'après le théorème de la probabilité totale,

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \mathbb{P}(D_{n+1}) &= \mathbb{P}(D_n)\mathbb{P}(D_{n+1}|D_n) + \mathbb{P}(\overline{D_n})\mathbb{P}(D_{n+1}|\overline{D_n}) \\ &= \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}(1-u_n) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}u_n \,. \end{aligned}$$

   (e) La suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique. On pose $v_n = u_n - l$ où l est la limite (ou le point fixe) :

$$l = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}l \quad \Longrightarrow \quad l = \frac{1}{2}.$$

   Alors, v_n vérifie

$$v_{n+1} = -\frac{1}{3}v_n.$$

Donc, v_n est une suite géométrique de raison $-1/3$:

$$v_n = v_0 \left(-\frac{1}{3}\right)^n,$$

d'où

$$u_n = v_n + \frac{1}{2} = v_0 \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}.$$

En utilisant $u_0 = 1$, on trouve $v_0 = 1/2$. Finalement, on trouve l'expression

$$u_n = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}.$$

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 10 : Deuxième partie – Exercice sans préparation - corrigé,

1. Soit $v \in \mathbb{R}^3$ un vecteur qui a les mêmes composantes (x_1, x_2, x_3) dans les deux bases. On a alors :

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = x_1(e_1 + e_2) + x_2(2e_2 + e_3) + x_3(3e_3) \quad (\star)$$

Or, en développant le second membre, on trouve que :

$$x_1(e_1 + e_2) + x_2(2e_2 + e_3) + x_3(3e_3) = x_1e_1 + (x_1 + 2x_2)e_2 + (x_2 + 3x_3)e_3$$

L'égalité $(\star)$ se traduit matriciellement par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Autrement dit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - I = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ce noyau n'est pas réduit au vecteur nul donc il existe au moins une solution.

2. On a :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

D'où $\mathcal{S} = \{(2x_3, -2x_3, x_3),\ x_3 \in \mathbb{R}\}$. Les vecteurs ayant mêmes coordonnées dans les deux bases sont ceux de cette droite.

3. Plus généralement, il existera un vecteur de mêmes composantes dans les bases B et B' de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si la matrice de passage de B à B' admet 1 pour valeur propre.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 11 : Première partie – Problème avec préparation - corrigé,

1. La fonction est continue sur l'intervalle $[0,\pi]$ donc elle est intégrable sur $[0,\pi]$.
2. Une intégration par parties donne
$$\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1}f(0) + \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(t)\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t\ .$$
3. On a par existence des intégrale, les bornes étant croissantes et par inégalité triangulaire
$$\left|\int_0^\pi f'(t)\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^\pi |f'(t)|\mathrm{d}t,$$
4. Il est d'une part clair que $2f(0)/(2n+1)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. D'autre part, comme $2/(2n+1)>0$
$$0 \leq \left|\frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(t)\cos\big((2n+1)t/2\big)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi |f'(t)|\mathrm{d}t.$$
Le membre de droite de cette inégalité tend vers 0, donc on a bien prouvé que
$$\lim_n \int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t = 0.$$
5. On calcule l'intégrale en faisant deux intégrations par parties, les fonctions étant $\mathbb{C}^1([0,\pi])$:
$$\begin{aligned}\int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)dt &= \left[(at^2+bt)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (2at+b)\frac{\sin(nt)}{n}\mathrm{d}t \\ &= 0 - \left[(2at+b)\frac{-\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2a\frac{\cos(nt)}{n^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{(2a\pi+b)(-1)^n - b}{n^2}.\end{aligned}$$
6. On écrit pour tout $[\![1,n]\!]$, $\cos(kt) = \Re\mathrm{e}(\mathrm{e}^{ikt})$ et on utilise la somme d'une série géométrique de raison différente de 1 (puisque $t\in]0,\pi]$). On obtient
$$\begin{aligned}A_n(t) &= \frac{1}{2} + \Re\mathrm{e}\left(\frac{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{i(n+1)t}}{1-\mathrm{e}^{it}}\right) = \frac{1}{2} + \Re\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{i(n+1)t/2}\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sin(nt/2)\cos((n+1)t/2)}{\sin(t/2)}.\end{aligned}$$
Une petite formule de trigonométrie donne
$$A_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin(t/2)} \times \big(\sin((2n+1)t/2) + \sin(-t/2)\big)$$
ce qui finalement donne le résultat.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 11 : Deuxième partie – Exercice sans préparation - corrigé,

1. On a
$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

2. On a :
$$M_{a,b} = (a-b)I_3 + bU_3.$$

3. Comme les matrices I_3 et U_3 commutent, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$
$$M_{a,b}^k = \sum_{l=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} (a-b)^{k-l}(bU_3)^l. \tag{3}$$
De plus la matrice $V_3 := U_3/3$ vérifie :
$$V_3^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = V_3.$$
L'égalité (1) devient :
$$\begin{aligned} M_{a,b}^k &= (a-b)^k I_3 + \sum_{l=1}^{k} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} (a-b)^{k-l}(bn)^l V_3 \\ &= (a-b)^k I_3 + ((a-b+3b)^k - (a-b)^k)V_3 \\ &= (a-b)^k I_3 + \frac{(a+2b)^k - (a-b)^k}{3} U_3. \end{aligned}$$

4. De même lorsque $n \geq 3$, on a
$$M_{a,b} = (a-b)I_n + bU_n.$$
D'où pour tout $k \in \mathbb{N}$
$$M_{a,b}^k = \sum_{l=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} (a-b)^{k-l}(bU_3)^l. \tag{4}$$
Or $V_n ;= U_n/3$ vérifie $V_n^2 = V_n$ donc
$$M_{a,b}^k = (a-b)^k I_n + \frac{(a-b+bn)^k - (a-b)^k}{n} U_n\ .$$

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 12 : Première partie – Problème avec préparation - corrigé,

1. (a) Chaque tiroir contient une clé avec probabilité p, et les événements sont indépendants. La variable aléatoire T est donc la position du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes.

$$T \sim \text{loi géométrique}(p) \text{ sur } \mathbb{N}^* .$$

   (b) C'est la probabilité d'avoir n échec :

$$\mathbb{P}(T > n) = (1-p)^n .$$

   (c) On a :

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}, \quad \mathbb{V}(T) = \frac{1-p}{p^2}.$$

   (d) Le joueur gagne s'il trouve la clé parmi les k premiers tiroirs, c'est-à-dire si $T \leq k$:

$$\mathbb{P}(T \leq k) = 1 - \mathbb{P}(T > k) = 1 - (1-p)^k.$$

   (e) Comme $p \in]0, 1[$, on a $0 < 1 - p < 1$, donc $(1-p)^k \to 0$ quand $k \to \infty$. Ainsi :

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(T \leq k) = 1.$$

2. (a) L'alarme se déclenche lorsqu'un tiroir numéroté multiple de 5 est ouvert. Le joueur ouvre les tiroirs de 1 à N, donc il faut qu'il y ait au moins un multiple de 5 strictement inférieur à N, c'est-à-dire que $N \geq 6$. Cela correspond au cas où le joueur subit au moins 5 échecs avant de trouver la clé.

   Or, pour une loi géométrique de paramètre p, la probabilité d'avoir au moins 5 échecs est :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(N \geq 6) = (1-p)^5.$$

   (b) On a :

$$\lim_{p\to 0} \mathbb{P}(A) = \lim_{p\to 0} (1-p)^5 = 1.$$

   Lorsque p est très petit, il faut en moyenne beaucoup de tentatives avant de trouver la clé, donc le joueur ouvre presque sûrement un tiroir piégé.

(c) Notons X le nombre d'alarmes déclenchées. On a

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N>k\}} \cdot \mathbf{1}_{\{5|k\}}.$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N > k \text{ et } 5 \mid k).$$

Or $\mathbb{P}(N > k) = (1-p)^k$. Donc :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{m=1}^{\infty} (1-p)^{5m}.$$

C'est une série géométrique de raison $(1-p)^5$, donc :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{(1-p)^5}{1-(1-p)^5}.$$

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 12 : Deuxième partie – Exercice sans préparation - corrigé,

1. Procédons par récurrence sur n. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété

$$\int_a^b f^{(n)}(x)g(x)\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(f^{(n-k-1)}(b)g^{(k)}(b) - f^{(n-k-1)}(a)g^{(k)}(a)\right) + (-1)^n\int_a^b f(x)g^{(n)}(x)\mathrm{d}x\ .$$

   - Par la formule d'intégration par parties $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   - Supposons que $\mathcal{P}(n-1)$ soit vraie à un certain rang n. Soit $h = f'$, qui est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$. La formule au rang $n-1$ appliquée à h et g donne

$$\int_a^b h^{(n-1)}g = \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\left(h^{(n-1-k-1)}(b)g^{(k)}(b) - h^{(n-1-k-1)}(a)g^{(k)}(a)\right) + (-1)^{n-1}\int_a^b hg^{(n-1)}$$

   soit

$$\int_a^b f^{(n)}g = \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\left(f^{(n-k-1)}(b)g^{(k)}(b) - f^{(n-k-1)}(a)g^{(k)}(a)\right) + (-1)^{n-1}\int_a^b f'g^{(n-1)}.$$

   Par intégration par parties du dernier terme,

$$\int_a^b f'g^{(n-1)} = f(b)g^{(n-1)}(b) - f(a)g^{(n-1)}(a) - \int_a^b fg^{(n)}$$

   on obtient que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et donc que $\mathcal{P}$ est héréditaire.
   - Donc $\mathcal{P}$ est vraie à tout rang n.
2. Q_n est un polynôme de degré $2n$, donc P_n, sa dérivée n-ième, est un polynôme de degré n.
3. Soit pour k la propriété $\mathcal{P}(k)$: « il existe un polynôme A_k tel que $Q_n^{(k)}(x) = A_k(x)(x^2 - 1)^{n-k}$ ».
   - la propriété est vraie au rang 0 avec $A_0 = 1$.
   - Supposons que la propriété soit vraie à un certain rang $k \leq n-2$. Alors il existe A_k tel que

$$Q_n^{(k+1)}(x) = \left[A_k(x)(x^2-1)^{n-k}\right]' = \left[A_k'(x) - 2xA_k(x)\right](x^2-1)^{n-k+1}$$

   La propriété est donc héréditaire en prenant $A_{k+1} = A_k'(x) - 2xA_k(x)$ tant que $k \leq n-1$.

- Donc pour tout $k \leq n-1$, $Q_n^{(k)}(x)$ peut s'écrire sous la forme $A(x)(x^2-1)^{n-k}$ où A est un polynôme.

4. Pour tout $k \leq n-1$, il existe un polynôme A tel que $Q_n^{(k)}(x) = A(x)(x^2-1)^{n-k}$
5. D'après la formule démontrée à la question 1 on a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_n L &= \int_{-1}^{1} Q_n^{(n)} L \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \big(Q_n^{(n-k-1)}(1) L^{(k)}(1) - Q_n^{(n-k-1)}(-1) L^{(k)}(1)\big) + (-1)^n \int_{-1}^{1} Q_n L^{(n)}.\end{aligned}$$

Or d'une part pour tout $k \leq n-1$, on a $Q_n^{(k)}(1) = Q_n^{(k)}(-1) = 0$. Et d'autre part $L^{(n)} \equiv 0$ car L est de degré inférieur ou égal à $n-1$. Donc l'intégrale recherchée est nulle.

Toulouse School of Economics

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 13 : Première partie – Problème avec préparation - corrigé,

1. (a) L'athlète peut échouer dès le premier saut, auquel cas $X_n = 0$. Il peut aussi réussir à passer les n hauteurs de saut, auquel cas $X_n = n$. Toutes les valeurs intermédiaires étant possible, on en déduit que $X_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$.

   (b) $[X_n = 0]$ correspond à un échec dès la première hauteur, ce qui arrive avec probabilité $1 - p$. Ainsi,
$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p = q$$

   (c) On a :
$$[X_n = n] = R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n$$

   (d) D'après la formule des probabilités composées il vient :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = n) &= \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)\\ &= \mathbb{P}(R_1)\,\mathbb{P}(R_2|R_1) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(R_n|\cap_{i=1}^{n-1} R_i\right)\\ &= p \times p \times \cdots \times p\\ &= p^n\ .\end{aligned}$$

   (e) Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$.
$$(X_n = k) = \left(R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap \bar{R}_{k+1}\right)\ .$$

   (f) Toujours d'après la formule des probabilités composées, on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = k) &= \mathbb{P}\left(R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap \bar{R}_{k+1}\right)\\ &= \mathbb{P}(R_1)\,\mathbb{P}(R_2|R_1) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(R_k|\cap_{j=1}^{k-1} R_j\right)\mathbb{P}\left(\bar{R}_{k+1}|\cap_{j=1}^{k} R_j\right)\\ &= p \times p \times \cdots \times p \times q\\ &= p^k q\ .\end{aligned}$$

   Pour $k = 0$, on a $p^k q = q = \mathbb{P}(X_n = 0)$ et la formule reste donc valable pour $k = 0$.

2. On a :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n = k) + \mathbb{P}(X_n = n)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} p^k q + p^n\\ &= q \times \frac{1 - p^n}{1 - p} + p^n = 1 - p^n + p^n\\ &= 1\ .\end{aligned}$$

3. Le support de X_n étant fini, X_n admet donc une espérance qui vaut :

$$\mathbb{E}\left(X_n\right) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}\left(X_n = k\right) = \sum_{k=1}^{n-1} kqp^k + np^n = (1-p)p\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} + np^n \; .$$

4. D'après le cours l'espérance d'une loi géométrique de paramètre $p \in [0,1]$ vaut $1/p$. Or cette espérance vaut aussi par définition de l'espérance

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p$$

où $q = 1-p$. Donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \; .$$

Donc en revenant au calcul de la question précédente on a donc en prenant $p = q$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} = \frac{1}{(1-p)^2} \; .$$

Comme, par croissance comparée np^n tend vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$, il suit que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(X_n\right) = \frac{(1-p)p}{(1-p)^2} = \frac{p}{1-p} \; .$$

Toulouse School of Economics

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 13 : Deuxième partie – Exercice sans préparation - corrigé,

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin^n$ est continue sur $[0, \pi/2]$ donc I_n existe.

1. Calculons les premiers termes :
$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1,$$
$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1-\cos(2x))\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin^n x \geq 0$ sur $[0, \pi/2]$ donc $I_n \geq 0$. Comme $\sin x \in [0, 1]$, si n augmente, $\sin^n x$ décroît donc la fonction intégrée décroît, et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. La suite (I_n) est positive et décroissante, donc elle converge.
4. On utilise une intégration par parties sur I_n, avec :
$$u = \sin^{n-1}(x), \quad \mathrm{d}v = \sin(x)\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}u = (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x)\mathrm{d}x, \quad v = -\cos(x).$$
Alors :
$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\mathrm{d}x = -\left[\sin^{n-1}(x)\cos(x)\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x.$$
Le terme de bord est nul, donc :
$$I_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x)(1-\sin^2(x))\mathrm{d}x = (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$
5. On obtient :
$$nI_n = (n-1)I_{n-2} \quad \Rightarrow \quad I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$
Par changement d'indice, on a aussi :
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n.$$
6. Comme I_n est décroissante on a
$$I_n \geq I_{n+1} \geq I_{n+2} \ .$$
En divisant tout par $I_n > 0$ il vient
$$1 \geq \frac{I_{n+1}}{I_n} \geq \frac{I_{n+2}}{I_n} \ .$$
Donc par le théorème d'encadrement et la question précédente
$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1 \ .$$

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 14 : Première partie – Problème avec préparation - corrigé,

1. La fonction f_n est dérivable sur $[0,1]$ et
$$f_n'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} \ .$$
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est décroissante sur $[0,1]$ et vaut 1 en 0 et 1/2 en 1.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $[0,1]$ donc son intégrale est définie sur tout intervalle. Donc J_n est bien définie.
3. Une primitive de
$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$
est Arctan donc
$$J_2 = \mathrm{Arctan}(1) - \mathrm{Arctan}(0) = \frac{\pi}{4} \ .$$
4. Pour tout $x \in [0,1[$, on a
$$\lim_n f_n(x) = 1 \ .$$
En 1 on a
$$\lim_n f_n(1) = \frac{1}{2} \ .$$
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut montrer que $J_{n+1} \geq J_n$. Pour tout $x \in [0,1]$, $x^{n+1} \leq x^n$ (car $x \in [0,1]$), donc par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$0 < 1 + x^{n+1} \leq 1 + x^n \Rightarrow \frac{1}{1+x^{n+1}} \geq \frac{1}{1+x^n}.$$
Par intégration et par croissance de l'intégrale :
$$J_{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^{n+1}}\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x = J_n.$$
Donc la suite (J_n) est croissante.
Pour tout $x \in [0,1]$, on a $x^n \geq 0$, donc $1 + x^n \geq 1$ et ainsi $f_n(x) \leq 1$. Donc par croissance de l'intégrale :
$$J_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 1\mathrm{d}x = 1.$$
6. Donc la suite (J_n) est croissante et majorée. Comme $(J_n)_n$ est croissante et majorée, elle converge vers une limite $\ell \in [0,1]$.

7. Pour tout $x \in [1-\varepsilon, 1]$,
$$\frac{1}{1+x^n} \leq 1 \ .$$
Donc par croissance de l'intégrale on a :
$$\int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{1}{1+x^n} \mathrm{d}x \leq \varepsilon \ .$$

8. Pour tout $x \in [0, 1-\varepsilon]$, on a
$$1 + x^n \leq 1 + (1-\varepsilon)^n \Rightarrow \frac{1}{1+x^n} \geq \frac{1}{1+(1-\varepsilon)^n}.$$
Donc par croissance de l'intégrale :
$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{1+x^n} \mathrm{d}x \geq \frac{1-\varepsilon}{1+(1-\varepsilon)^n}.$$

9. On a
$$|J_n - 1| = 1 - J_n = 1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} \mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \ .$$
Donc J_n tend vers 1 quand n tend vers ∞.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 14 : Deuxième partie – Exercice sans préparation - corrigé,

1. Soit $v \in \mathbb{R}^3$ un vecteur qui a les mêmes composantes (x_1, x_2, x_3) dans les deux bases. On a alors :

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = x_1(e_1 + e_2) + x_2(2e_2 + e_3) + x_3(3e_3) \quad (\star)$$

Or, en développant le second membre, on trouve que :

$$x_1(e_1 + e_2) + x_2(2e_2 + e_3) + x_3(3e_3) = x_1e_1 + (x_1 + 2x_2)e_2 + (x_2 + 3x_3)e_3$$

L'égalité $(\star)$ se traduit matriciellement par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Autrement dit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - I = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ce noyau n'est pas réduit au vecteur nul donc il existe au moins une solution.

2. On a :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

D'où $\mathcal{S} = \{(2x_3, -2x_3, x_3),\ x_3 \in \mathbb{R}\}$. Les vecteurs ayant mêmes coordonnées dans les deux bases sont ceux de cette droite.

3. Plus généralement, il existera un vecteur de mêmes composantes dans les bases B et B' de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si la matrice de passage de B à B' admet 1 pour valeur propre.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 15 : Première partie – Problème avec préparation - corrigé,

Exercice. — 1. Le Support de X est $\{2, 3, 4, \cdots\}$.

2. Pour que le deuxième « pile » tombe au rang n, il faut :
   — qu'il y ait exactement un seul « pile » parmi les $n-1$ premiers lancers : ceci est un événement de probabilité
   $$\binom{n-1}{1} p(1-p)^{n-2} = (n-1)p(1-p)^{n-2}.$$
   — que le n-ième lancer soit un « pile » : ceci est un événement de probabilité p.
   Donc finalement :
   $$\mathbb{P}(X = n) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}.$$
3. On a
   $$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$
   En dérivant on obtient la formule :
   $$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \quad \text{pour } 0 < q < 1.$$
   En dérivant une seconde fois on obtient
   $$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}\ .$$
4. $$\sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)p^2(1-p)^{n-2}.$$
   Posons $k = n-2$, donc $n = k+2$, et $k \in \mathbb{N}$. On obtient :
   $$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)p^2(1-p)^k.$$
   En posant $q = 1-p$ et en utilisant la question précédente, on obtient :
   $$\sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = p^2 \cdot \frac{1}{p^2} = 1.$$

5. $$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)p^2(1-p)^{n-2}.$$

   Posons $k = n - 2$, donc $n = k + 2$, et on obtient :

   $$\mathbb{E}(X) = p^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)(1-p)^k = \frac{2}{p}.$$

6. Étude qualitative :
   - Lorsque $p \to 0$, la pièce donne pile très rarement. Il faut attendre longtemps pour obtenir deux piles. On a alors $\mathbb{E}(X) \to \infty$.
   - Lorsque $p \to 1$, on obtient pile presque à chaque lancer. Le second pile arrive dès le 2éme lancer avec probabilité proche de 1. On a donc $\mathbb{E}(X) \to 2$.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 15 : Deuxième partie – Exercice sans préparation - corrigé,

Exercice. —

1. On calcule $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\{(1,1,0),(0,0,1)\}$.
2. L'image de A est un plan vectoriel.
3. Le système a une solution car $1 = 1$. De plus comme $\mathrm{rang}(A) = 2$, par le théorème du rang,
$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3 - \mathrm{rang}(A) = 3 - 2 = 1.$$
Donc il y a une infinité de solutions car un système linéaire admet une unique solution si et sulement si son système homogène associé admet une unique solution.
4. Ce système a des solutions si et seulement si $a = b$ et dans ce cas il y a une infinité de solutions.
5. B est une matrice carrée de rang 3 donc elle est inversible. Le système $BX = Y$ admet donc une unique solution $X = B^{-1}Y$.
6. Soit Z dans $\mathrm{Im}(AB)$, alors il existe X' tel que $ABX' = Z$. Mais donc il existe un vecteur $X = BX'$ tel que $AX = Z$ donc Z est aussi dans $\mathrm{Im}(A)$.
7. Soit Z un vecteur de $\mathrm{Im}(A)$ alors il existe X' tel que $AX' = Z$. Comme B est inversible pour tout X' il existe X tel que $X' = BX$. On a ainsi $ABX = Z$ donc Z est aussi dans $\mathrm{Im}(AB)$.
8. On a $\mathrm{Im}(AB) = 2$. Donc ce systyme n'admet de solution que si $Y \in \mathrm{Im}(AB)$. Pour analyser l'unicité, il faut étudier le noyau de AB : par le théorème du rang, la dimension du noyau est $3 - 2 = 1$, donc s'il existe une solution il y en a une infinité.
9. Chaque ligne de N : N_i^T satisfait
$$N_i^T B = 0.$$
Puisque B est inversible, cela implique
$$N_i^T = 0,$$
donc $N = 0$.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 16 : Première partie – Problème avec préparation - corrigé,

Exercice. — 1. On calcule
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 3x^2\mathrm{d}x = 3\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{1}{3} = 1.$$
Donc f_X est bien une densité.

2. On calcule
$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x\cdot 3x^2\mathrm{d}x = 3\int_0^1 x^3\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$
Calculons $\mathbb{E}(X^2)$:
$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2\cdot 3x^2\mathrm{d}x = 3\int_0^1 x^4\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$
La variance est donc
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{48}{80} - \frac{45}{80} = \frac{3}{80}.$$

3. Pour $x < 0$, $F_X(x) = 0$. Pour $x \in [0,1]$:
$$F_X(x) = \int_0^x 3t^2\mathrm{d}t = 3\cdot\frac{x^3}{3} = x^3.$$
Pour $x > 1$, $F_X(x) = 1$.

4. (a) Pour tout $y \in [0,1]$, on a :
$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^2 \leq y) = \mathbb{P}(|X| \leq \sqrt{y}) = \mathbb{P}(X \leq \sqrt{y}),$$
car $X \geq 0$.

Donc
$$F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^3 = y^{3/2}.$$
Pour $y < 0$, $F_Y(y) = 0$, et pour $y > 1$, $F_Y(y) = 1$.

(b) La fonction de répartition F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuelement en 0 et en 1. De plus

$$\lim_{y\to 0^-} F_Y(y) = 0 = \lim_{y\to 0^+} y^{3/2} \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 1^-} F_Y(y) = 1 = \lim_{y\to 1^+} 1$$

donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$. Dérivons F_Y sur $(0,1)$ pour obtenir f_Y :

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}y^{3/2} = \frac{3}{2}\sqrt{y}.$$

Ainsi,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{y}, & y \in [0,1], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(c) On a $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2) = 3/5$.

5. (a) Pour $w \in [0,1]$, l'événement $\{W \le w\}$ est

$$\{\min(X, 1-X) \le w\} = \{X \le w\} \cup \{1 - X \le w\} = \{X \le w\} \cup \{X \ge 1 - w\}.$$

(b) Si $x \le 1/2$, alors $1-x \ge 1/2$ et $\min\{x, 1-x\} = x \le 1/2$. Si $x \ge 1/2$, alors $1-x \le 1/2$ et $\min\{x, 1-x\} = 1 - x \le 1/2$. Donc $W(\Omega) \subset]0, 1/2[$.

La fonction de répartition de W est

$$F_W(w) = \mathbb{P}(W \le w) = \mathbb{P}(X \le w \text{ ou } X \ge 1 - w).$$

- Soit $w \in]0, 1/2[$. On a :

$$\mathbb{P}(X \le w) = F_X(w) = w^3,$$

et,

$$\mathbb{P}(X \ge 1 - w) = 1 - F_X(1 - w) = 3w - 3w^2 + w^3.$$

De plus, pour tout $w \le 1/2$,

$$\{X \le w\} \cap \{X \ge 1 - w\} = \emptyset.$$

Donc, par union disjointe

$$F_W(w) = 3w - 3w^2 + 2w^3.$$

Et $w > 1$, $F_W(w) = 1$.

- Pour $w < 0$, $F_W(w) = 0$.
- Pour $w > 1/2$, $F_W(w) = 1$.

Concours BLSES 2025

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 16 : Deuxième partie – Exercice sans préparation - corrigé,

Exercice. — 1. La fonction f est définie sur

$$D = \{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*\} \cup \{\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_-^*\}.$$

2. Sur ce domaine, f est composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, donc $f \in \mathcal{C}^2(D)$.
3. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x,x) = 0$.
4. Dérivées partielles premières :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{1}{2}.$$

   On cherche les points critiques :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{y}{x} = 1 \Rightarrow y = x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = 1 \Rightarrow x = y.$$

   Donc l'ensemble des points critiques est $\{(x,y) : x = y\}$.
5. Dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{4}x^{-3/2}y^{1/2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{4}x^{1/2}y^{-3/2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4}x^{-1/2}y^{-1/2}.$$

   Lorsque $x = y$, le discriminant de la forme quadratique vaut 0. On ne peut pas conclure directement.
6. En (x,x) on a déjà vu que :

$$f(x,x) = 0.$$

7. On a

$$\lim_{y\to\infty} f(1,y) = -\infty\ .$$

   Donc f n'admet pas de minimum global.

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 17 : Première partie – Problème avec préparation - corrigé,

Exercice. — 1. (a) $F = \mathrm{Ker}(f)$ où f est la forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = x - 2y + z$, donc $(F, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

(b) $K = \mathrm{Vect}\{(1, -2, 1)\}$ par exemple.

(c) La matrice canonique de projection sur F parallèlement à K est donnée par :

$$P = I_3 - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Les vecteurs $(1, 1, 1)$ et $(1, 2, 3)$ sont libres et tout élément de F s'écrit :

$$x.(1, 0, -1) + y.(0, 1, 2) = (2x - y).(1, 1, 1) + (y - x).(1, 2, 3),$$

donc $G \oplus H = F$.

(b)

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2x - y)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

3. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = \cos(x + \pi/4) = \cos(x)\cos(\pi/4) - \sin(x)\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x).$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on déduit :

$$f(x) = \sqrt{2}\, g(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\, h(x).$$

Épreuve orale d'admission : Mathématiques

- Planche n° 17 : Deuxième partie – Exercice sans préparation - corrigé,

Exercice. — 1. Si la boule noire n'est pas tirée lors des n premiers tirage la composition de l'urne pour le prochain tirage sera : une boule noire et 2^n boules blanches.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La formule des probabilités composées donne $P(A_{n+1}) = P(A_n) P_{A_n}(A_{n+1})$. Or, au vu de l composition de l'urne (voir question précédente) et par équiprobabilité de tirer chacune des boules, on a $P_{A_n}(A_{n+1}) = \dfrac{2^n}{2^n+1}$.
On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n \cdot \frac{2^n}{2^n+1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
$v_{n+1} = -\ln(u_{n+1}) = -\ln\left(u_n \cdot \frac{2^n}{2^n+1}\right) = -\ln(u_n) + \ln\left(\frac{2^n+1}{2^n}\right) = v_n + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.
D'où l'égalité demandée.

3. (a) $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $\mathbb{R}^* - +$ car $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x^2)} < 0$ et la tangente en 0 à $\mathcal{C}_f$ a pour équation $y = x$.
Donc $\ln(1+x) < x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (courbe en dessous de ses tangentes).

(b) On déduit, en prenant $x = \dfrac{1}{2^k}$ dans l'inégalité précédente et en se servant de la relation de récurrence qui définit la suite (v_n), que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $v_{k+1} - v_k \leq \dfrac{1}{2^k}$.

Donc, en sommant : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \Leftrightarrow v_{n+1} - v_1 \leq \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(c) $(v_n)_{n\geq 1}$ est donc croissante, car $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right) > 0$, et majorée par $1 + v_1$ d'après l'inégalité précédente.
Donc $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers un réel ℓ d'après le théorème de convergence monotone.
Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = e^{-v_n}$.
D'où, par composition, $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $e^{-\ell}$.

4. L'événement :« la boule noire est tirée » est le contraire de « la boule noire n'est jamais tiré » , qui est égal à $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$.
Or, comme (A_n) est une suite décroissante d'événements, le théorème de la limite monotone donne $P\left(\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} u_n = e^{-\ell}$.
La probabilité cherchée vaut donc $1 - e^{-\ell}$.