Extinction en temps fini des solutions de certains problèmes paraboliques quasilinéaires et singuliers

Paul SAUVY, Université de Pau et des Pays de l'Adour

Nous présentons ici certains résultats issus de [1], où est étudié le problème parabolique suivant :

$$(\mathrm{P})\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t u - \Delta_p u + \mathbb{1}_{\{u>0\}} u^{-\beta} & = & f(x,u) & \text{dans }]0,T[\times\Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ u(0,\cdot) & = & u_0 & \text{dans } \Omega. \end{array}\right.$$

Dans ce problème, $T > 0$, Ω est un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 1$, $\Delta_p u \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ représente l'opérateur p-Laplacien, $\beta \in]0,1[$ et la condition initiale vérifie

$$u_0 \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) \cap \mathrm{L}^\infty(\Omega) \quad \text{et} \quad u_0 \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Dans le second membre de la première équation, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable satisfaisant une condition de croissance convenable.

Dans un premier temps, nous démontrerons l'existence de solutions d'un tel problème. Pour cela, nous commencerons par étudier en détail un problème régularisé (P_ε), où le terme d'absorption singulier $\mathbb{1}_{\{u>0\}} u^{-\beta}$ est approché de façon appropriée. À l'aide d'une semi-discrétisation en temps, nous démontrerons l'existence, l'unicité ainsi que certaines estimations d'énergie pour les solutions de (P_ε). Puis par un argument de monotonie, nous démontrerons l'existence de solutions du problème (P) en passant à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ dans le problème régularisé (P_ε).

Dans un deuxième temps nous nous intéresserons au comportement asymptotique de ces solutions. Plus précisément nous démontrerons que les solutions du problème (P) s'éteignent en temps fini sur tout le domaine Ω ; et ceci même avec une condition initiale strictement positive dans Ω. Pour ce faire, nous démontrerons que l'application $t \mapsto \|u(t)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$ (où u est une solution de (P)) satisfait une certaine inégalité différentielle, dérivant d'une estimation d'énergie sur u couplée à une inégalité du type Gagliardo-Nirenberg.

Références

[1] J. Giacomoni, P. Sauvy, S. Shmarev, Quenching phenomenon for a quasilinear and singular parabolic problem. *Soumis*.

Paul SAUVY, LMA Pau UMR CNRS 5142
Bâtiment IPRA - Université de Pau et des Pays de lAdour
Avenue de l'université - BP 1155 - 64013 PAU CEDEX (FRANCE)

`paul.sauvy@etud.univ-pau.fr`