Ordre de croissance, points d'explosion et solutions stationnaires pour l'équation de Burgers

Jean-François Rault
LMPA, Université du Littoral Côte d'Opale
50 rue F. Buisson BP699, F-62228 Calais Cedex (France)
email: jfrault@lmpa.univ-littoral.fr

On considère l'équation de Burgers dans un domaine réel borné Ω, sous les conditions au bord dynamiques dissipatives et à valeur initiale :

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u - u\partial_x u + u^p & \text{dans } \overline{\Omega} \text{ pour } t > 0, \\ \sigma\partial_t u + \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \text{ pour } t > 0, \\ u(\cdot, 0) = \varphi & \text{dans } \overline{\Omega}, \end{cases} \tag{1}$$

où $\sigma > 0$ et $p > 1$ sont deux nombres réels, et où φ est un fonction continue, positive et non-nulle sur $\overline{\Omega}$.
Dans un premier temps, on s'intéresse à l'ordre de croissance des solutions en fonction de la puissance p : pour tout $p > 2$ on montre que l'ordre de croissance de la norme L^∞ de la solution est au moins de $\frac{-1}{p-1}$, et si $p > p^*$, avec la valeur limite $p^* \approx 3,04030220028546361784388944339341 4\ldots$, on montrera qu'il est au plus de $\frac{-1}{p-1}$.
Par la suite, nous étudierons l'ensemble des points d'explosion et l'allure des solutions du Problème (1). Lorsque la donnée initiale a la forme d'une bosse, nous démontrons que la solution préserve ce profil tout au long de son intervalle d'existence maximale, et que l'ensemble de ses poins d'explosion est un singleton. Ensuite, on donne des exemples numériques de solutions ayant un profil initial à deux bosses et préservant ce profil jusqu'à l'explosion, ainsi que des solutions où ce profil est modifié. Pour finir, on étudie le cas de l'équation stationnaire

$$u'' - uu' + u^p - \lambda u = 0 \ .$$

En posant $v = u'$, et en analysant le plan des phases du système

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ uv - u|u|^{p-1} + \lambda u \end{pmatrix},$$

on étudie l'existence des solutions staionnaires du Problème (1) sous les conditions au bord de Dirichlet, de Neumann et dynamiques.

Ce travail a été fait en collaboration avec Joachim von Below et Gaëlle Mailly.